Démonstration et logique au collège : un modèle pour toutes les mathématiques ?

Gilbert Arsac

Colloque de Besançon, 5-6 Avril 2013

Cet exposé poursuit deux buts :

- réfléchir sur le rapport entre logique et démonstration à l'occasion des modifications de programmes ;
- montrer que les mathématiques du collège peuvent être source d'une réflexion approfondie sur les mathématiques en général. Autrement dit, encourager les enseignants à réfléchir de façon profonde, et je l'espère, intellectuellement séduisante, sur les mathématiques qu'ils pratiquent avec leurs élèves.

Une fois n'est pas coutume, je commence par énoncer ci-dessous les affirmations que je vais essayer d'argumenter dans la suite de l'article, afin de les dégager clairement du contexte dans lequel elles seront immergées dans le corps du texte.

THÈSES

Il y a de la logique dans la langue courante.

La simple logique de la langue courante est insuffisante pour le mathématicien : il modifie donc la langue courante en une langue mathématique dans laquelle suffisamment de logique sera incorporée, y compris sous forme de règles d'usage du symbolisme (règles de calcul par exemple).

Cette incorporation, historiquement évidente dans les mathématiques grecques, se fait par un processus interne aux mathématiques, sans utilisation d'une théorie logique extérieure aux mathématiques.

L'apprentissage des mathématiques comporte l'apprentissage du langage mathématique, donc des règles logiques qu'il contient, il n'y a pas besoin d'apprendre de la logique indépendamment. C'est ce que soutient Thurston (1994).

En revanche, l'histoire montre qu'il ne suffit pas de faire des mathématiques pour connaitre les règles du raisonnement, par exemple les règles de négation, nécessaires en mathématiques (éventuellement, ceci contredit Thurston).

La compréhension des démonstrations en collège introduit à la compréhension de toute démonstration mathématique. Autrement dit, il n'est pas sans intérêt de réfléchir sur les démonstrations, même les plus simples, qu'on rencontre à ce niveau.

1) Langue courante et logique.

1.1) « Il y a de la logique dans la langue »… Explicitons cette affirmation sur un certain nombre d'exemples.

Exemple 1 : « Il n'y a pas de fumée sans feu » c'est-à-dire, avec un symbolisme évident : non (fumée et (non feu)), ou encore (non fumée) ou feu, et on reconnait ici l'implication : si fumée, alors feu à condition de se rappeler que l'implication « si A alors B » est par définition « (non A) ou B ». Bien sûr, tout le monde comprend cela sans faire appel au petit calcul logique précédent, et tout le monde comprend aussi que « boire ou conduire, il faut choisir », « la bourse ou la vie » sont des implications. De plus, toutes ces implications sont réputées vraies.

Exemple 2 : la double négation fait partie de la langue courante.

1.2) Mais la relation entre la logique et la langue n'est pas si claire… Reprenons ces exemples :

Retour sur l'exemple de l'implication

Au troisième siècle avant Jésus-Christ, les débats à propos de l'implication étaient suffisamment connus et virulents pour que le poète Callimaque écrive : « Les corbeaux croassent sur les toits quelles sont les implications justes ». En effet l'idée que l'implication « si A, alors B » soit vraie dès que A est faux n'est pas si intuitive que cela. Elle n'est pourtant pas ignorée de la langue courante : « Si je suis le roi de Prusse, alors tu es la reine d'Angleterre », mais n'est pas maitrisée par une proportion non négligeable de futurs enseignants (cf. Viviane Durand-Guerrier). Cependant, on trouve dès cette époque, avant l'énonciation de toute théorie logique, des raisonnements subtils (s'il ne faut pas philosopher, alors il faut philosopher, donc il faut philosopher).

Retour sur l'exemple de la double négation.

Un mathématicien un peu au courant de la logique peut se réjouir lorsqu'une double négation est employée par un journaliste ou un homme politique : en général ils disent le contraire de ce qu'ils croient dire. Exemple (dû à un ancien ministre de l'Éducation Nationale, en conclusion de son mandat de ministre) : « On ne pourra pas dire que mon ministère n'a pas été celui de la régression ».

Conclusion : la logique est proche de la langue, mais la relation n'est pas simple : la logique est certes présente dans la langue, mais lorsqu'on essaie de théoriser la logique, on ne peut en rester à une simple connaissance intuitive tirée directement de la langue ; c'est sans doute la raison pour laquelle la logique apparait d'abord comme facile puis se révèle ensuite comme un domaine où il est particulièrement fréquent de dire des bêtises et d'admettre de fausses évidences. D'où la question : comment font les mathématiciens ? Nous allons proposer quelques réponses à partir de l'histoire des mathématiques. Étant donné ce que nous avons dit sur la facilité de dire des bêtises en logique, nous éviterons de parler de logique au sens strict de théorie logique.

Remarque : la logique ne saurait être présente de la même façon dans toutes les langues. Par exemple, une élève de Viviane Durand-Guerrier a étudié les difficultés particulières relatives à l'apprentissage de la négation par des étudiants dont la langue maternelle est l'arabe et qui apprennent des mathématiques en français (Durand-Guerrier et Ben Kilani, 2004) ; la présence de la logique dans des langues qui n'ont aucune équivalent de nos verbes « être » et « avoir », si elle est attestée, n'est certainement pas du même genre qu'en français. Enfin, les essais de collaboration entre enseignants de français et de mathématiques ont montré les difficultés dues à la confusion éventuelle entre la négation (opération logique) et la transformation d'une phrase affirmative en phrase négative (opération grammaticale). Par exemple la phrase « tous les poulets sont rouges » a pour négation logique « il existe des poulets qui ne sont pas rouges », souvent confondue avec « tous les poulets ne sont pas rouges » obtenue en remplaçant « sont » par la forme négative « ne sont pas ».

Pour terminer, citons encore des exemples où la langue courante conduit à des énoncés ambigus.

- Premier exemple : L'Organisation des Nations unies, après avoir obtenu un cessez-le-feu durable à la Guerre des Six jours en 1967, a adopté la résolution 242, qui requiert :

    selon sa version officielle en français, « retrait des forces armées israéliennes des territoires occupés lors du récent conflit » ;
    selon sa version officielle en anglais, « withdrawal of Israel armed forces from territories occupied in the recent conflict » ;
    selon ses versions officielles en espagnol, arabe, russe et chinois (autres langues officielles de l'ONU), un texte dont le sens est le même qu'en français.

  On voit ici que le texte anglais prête à une interprétation différente du texte français ; on pourrait même dire que le texte français est implicitement quantifié universellement (quels que soient les territoires occupés…) alors que le texte anglais est implicitement quantifié existentiellement (il existe des territoires occupés…).

Pourtant, les textes juridiques ont la même ambition que les textes mathématiques : ne pas être susceptibles de plusieurs interprétations. Mais l'exemple ci-dessus de la résolution des Nations Unies, qui est pourtant un texte juridique, montre que ce n'est pas si facile.

Autres exemples de textes ambigus ou qui demandent à être interprétés.

Je ne résiste pas au plaisir de citer quelques perles relevées en préparant cet exposé :
« Nous n'acceptons plus les chèques dans tous nos magasins. »
« Depuis six matchs, il n'a pas marqué zéro but. »

2) Logique et langue mathématique.

2.1) La langue mathématique d'Euclide et des mathématiciens grecs.

Les écrits mathématiques d'Euclide ne font nullement référence aux recherches logiques contemporaines (Aristote, Mégariques) et leur mode de raisonnement était certainement fixé antérieurement et indépendamment de ces recherches (cf. Gardies, 1997, ch. 2). Lorsqu'on étudie les *Éléments* d'Euclide, on vérifie qu'ils ne comportent aucune erreur du point de vue de la logique des propositions. En même temps, Euclide ignore manifestement certaines règles de logique relativement élémentaires comme la contraposition.

Mais une autre caractéristique de l'ouvrage euclidien est l'existence d'une *langue mathématique* qui sera ensuite la langue de toutes les mathématiques grecques et dont l'origine est antérieure à Euclide : on en trouve les débuts chez Autolycos de Pitane ou Hippocrate de Chio, le quadrateur des lunules. Il importe de souligner que ce que cette langue a de particulier ne réside pas seulement dans un vocabulaire désignant les objets mathématiques, mais aussi dans une organisation adaptée au raisonnement déductif.

L'étude précise de cette langue est développée dans l'ouvrage de R. Netz (1999) dont les principaux résultats sont résumés dans (Arsac 1999). Comme il n'est pas question ici de reprendre cette étude en détail, car nous nous intéressons à la démonstration au collège, et que ce qui nous importe, c'est de vérifier que dès les mathématiques grecques, il existe une langue mathématique incorporant des outils de raisonnement, nous citons simplement quelques caractéristiques de cette langue liées à la logique.

- le vocabulaire mathématique grec est bien fixé, commun à tous les auteurs.
- La langue est volontairement pauvre : un mot n'est jamais remplacé par un synonyme, même s'il en existe.
- En particulier, les connecteurs logiques sont toujours les mêmes.
- Les énoncés démontrés ne sont pas cités ensuite textuellement mais donnent naissance à des formules fixées une fois pour toutes, analogues à la règle de trois.
- Au total, comme dans un calcul, l'enchainement logique est absorbé dans l'application de règles fixes.

Pour reprendre une expression provocante d'un historien des mathématiques, « Ce n'est pas du grec ». C'est une langue alourdie par des répétitions constantes, mais qui présente l'avantage d'une grande « transparence logique » : elle est comprise de la même manière par tous les lecteurs ayant une culture mathématique suffisante, faisant mentir au moins partiellement l'affirmation suivant laquelle « toute lecture est une interprétation ».

Ceci peut être rapproché des travaux de Duval (1991) ; il me semble en effet que la remarque fondamentale de Duval est la suivante : du fait que le raisonnement en géométrie semble utiliser la langue usuelle, contrairement à ce qui se passe chez Euclide, la différence entre ce raisonnement et une argumentation courante n'est pas visible pour les élèves. Duval utilise un graphe pour mettre en évidence la structure logique caractéristique du raisonnement. Une fois cet apprentissage réalisé, l'élève peut revenir au raisonnement dans le langage courant. C'est bien l'attention à la structure logique du discours, du point de vue du calcul des propositions, que Duval cherche à éveiller. L'analogie avec un calcul est bien relevée et l'on peut dire que le but est d'arriver à la transparence logique en luttant contre l'illusion que la langue courante est utilisable sans précaution spéciale pour le raisonnement mathématique.

Notons que cette appellation de « transparence logique » ne doit donc pas être prise trop naïvement : il ne s'agit pas d'une propriété intrinsèque du texte, mais d'une propriété du texte par rapport à un certain cercle de lecteurs : le travail de Duval montre qu'il faut que l'élève apprenne à rentrer dans le cercle des lecteurs mathématiciens. De même, les textes juridiques ont la même ambition que les textes mathématiques : ne pas être susceptibles d'ambigüité. Et chacun sait que la lecture d'un texte juridique n'est pas à la portée de tout le monde.

3) Démonstration d'un énoncé universel, exemple générique, nécessité et généralité.

Un énoncé universel est un énoncé du type : « quel que soit x, si $A(x)$, alors $B(x)$ » quantifié universellement par « quel que soit », et où $A(x)$ et $B(x)$ sont des propriétés de x. C'est un cas très courant parfois caché quand la quantification est implicite : « les médianes d'un triangle sont concourantes », « si une fonction est dérivable, elle est continue ». Cette quantification implicite est fréquente en géométrie.

Exposons la méthode de démonstration d'un tel énoncé sur l'exemple suivant : « toute fonction définie au voisinage d'un point et dérivable en ce point est continue ».

La démonstration classique débute ainsi :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a et dérivable en a…

Ensuite vient la démonstration bien connue, et on conclut que l'on a démontré le théorème.

Ainsi, on part de la **donnée d'une fonction** *f*, on fait la démonstration pour cette fonction, et si on n'a utilisé aucune propriété de *f* autre que le fait qu'elle soit dérivable en un point, on en conclut que la démonstration est valable pour toute fonction ayant cette propriété. En fait, nous sommes tellement habitués à ce type de démonstration que le commentaire ci-dessus peut sembler oiseux. Nous verrons son intérêt au paragraphe 4.

Dans sa recherche sur les preuves spontanées développées par les élèves de collège, Nicolas Balacheff (1987) voit apparaitre ce type de démarche qu'il caractérise comme l'utilisation d'un exemple générique :

> « L'exemple générique consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe » (Balacheff 1987).

Herbrand énonce cette idée de façon tout à fait générale : « … quand nous disons qu'un théorème est vrai pour tout *x*, nous voulons dire que pour chaque *x* individuellement il est possible de répéter sa démonstration, qui peut être considérée seulement comme un prototype de chaque preuve individuelle » (cité par Longo 2009).

Dans notre exemple, nous pouvons remarquer que *a* aussi est générique : l'énoncé est implicitement quantifié en *a* et en explicitant toutes les quantifications, il devient : quelle que soit *f* et quel que soit *a*, si *f* est définie, etc. ».

Une fois l'objet générique fixé, il reste à démontrer la propriété visée pour cet objet, ce qui se fait par un enchainement logique. Nous dirons que le caractère de *généralité* est assuré par le caractère générique de l'objet, et le caractère de *nécessité* par la rigueur de l'enchainement logique qui prouve la propriété visée pour l'objet générique choisi. Nous allons examiner maintenant comment les démonstrations au collège, en algèbre et en géométrie, répondent à ces deux conditions de généralité et de nécessité.

4) Le cas du calcul littéral : « il n'y a pas de démonstration en algèbre ».

Cette phrase, prononcée par un historien des mathématiques, est reproduite ici à titre de provocation…

Précisons ici que nous entendons le mot algèbre en son sens élémentaire traditionnel, pratiquement synonyme de calcul littéral. Afin d'illustrer le double aspect de nécessité et de généralité, voici deux démonstrations d'un énoncé d'arithmétique (Garuti et al, 1998).

Énoncé : *la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4.*

Première démonstration, par un élève de cinquième :

« Je fais quelques essais : 3 + 5 = 8, 1 + 3 = 4, 5 + 7 = 12 ; je vois que je peux écrire ces additions de la manière suivante : 3 + 5 = 3 + 1 + 5 – 1 = 4 + 4 = 8 (de même pour les autres). C'est la même chose que d'additionner le nombre pair intermédiaire à lui-même, et le double d'un nombre pair est toujours un multiple de 4. »

Deuxième démonstration, par un élève de seconde :

« Je peux écrire deux nombres impairs consécutifs sous la forme $2k+1$ et $2k+3$ ainsi je trouve :

$$(2k+1)+(2k+3)=2k+1+2k+3=4k+4=4(k+1)$$

Le nombre obtenu est un multiple de 4. »

Examinons ces deux démonstrations : dans la première, l'élève, après une vérification sur trois exemples, montre en se concentrant sur le premier, 3 + 5 = 8, que l'on peut présenter le calcul de manière à ce qu'il ait une valeur générale en introduisant le nombre pair « intermédiaire » entre deux impairs consécutifs. Remarquons que cette argumentation de généralité est tout à fait explicite tout en étant valable seulement pour le problème considéré. Elle correspond tout à fait à la définition de Balacheff de l'exemple générique rappelée plus haut.

Dans la deuxième, l'élève traite directement un « cas général » grâce à la notation littérale, c'est l'emploi de cette notation, dont l'origine remonte à Viète, au seizième siècle, qui assure la généralité : la lettre k représente un nombre entier quelconque, donc le calcul est général, mais comme cette argumentation, contrairement à la première, n'est pas liée à un problème particulier, et qu'elle est connue comme classique, elle n'est pas reproduite, il n'y a donc pas d'argumentation explicite de généralité. C'était aussi le cas dans la démonstration citée en exemple : la notation f est censée représenter une fonction quelconque, et ce fait connu dispense de répéter l'argumentation de généralité. Cette question de la généralité n'apparait explicitement dans la classe qu'aux débuts de l'apprentissage du calcul littéral, quand l'enseignant y fait allusion en rappelant « traitez un cas général, calculez avec des lettres ! »

Quant à la nécessité, elle n'apparait à première vue dans aucune des deux démonstrations. La deuxième par exemple se réduit apparemment à un calcul. C'est que le calcul n'est autre qu'un raisonnement automatisé. Si l'on voulait mettre en évidence ce raisonnement, il faudrait revenir aux justifications du calcul, en commençant par écrire en détail :

$$(2k+1)+(2k+3)=(2k+1)+(3+2k)=2k+\left(1+(3+2k)\right)=2k+\left((1+3)+2k\right)=2k+\left(4+2k\right)=$$
$$2k+\left(2k+4\right)=\left(2k+2k\right)+4=\left(2+2\right)k+4=4k+4=4k+4.1=4\left(k+1\right).$$

On pourrait ensuite justifier chaque égalité en citant les propriétés (associativité, distributivité, commutativité) auxquelles on a fait appel. Celles-ci jouent le rôle « d'énoncés tiers » au sens de Duval et permettent de retrouver, à condition de détailler assez, la structure habituelle d'un raisonnement par enchainement de « pas de déduction ». Bien sûr, personne ne fait cela, car le but des règles de calcul est précisément d'éviter d'avoir à le faire. Ceci peut aboutir à une

« perte de sens », c'est-à-dire qu'à force de faire des calculs on finit par oublier qu'ils représentent en fait des raisonnements.

En résumé, dans ces deux démonstrations, la nécessité est assurée par l'usage des règles de calcul, la généralité est assurée dans le premier cas par une argumentation explicite particulière, dans le deuxième par le recours à une méthode, la notation littérale, universellement admise en mathématiques, et qui n'est donc plus argumentée. Ainsi s'explique que dans la deuxième démonstration, qui a la forme la plus courante, **aussi bien la nécessité que la généralité soient apparemment absentes**. De là provient l'idée « **qu'il n'y a pas de démonstration en algèbre** ». Effectivement, les routines de la notation littérale et du calcul algébrique font disparaitre toute intervention explicite de la logique, contrairement à la géométrie. Plus généralement, dans une démonstration complexe, les parties qui comportent du calcul sont celles où toute mention explicite de la logique disparait.

Revenons sur cet exemple : nous avons dit un peu rapidement que dans la démonstration classique de calcul littéral, toute allusion explicite aux énoncés tiers qui justifient le calcul est supprimée. En réalité, il n'en est pas ainsi lorsque ces règles sont encore en cours d'apprentissage : alors le professeur en exigera la mention explicite. Il pourra par exemple trouver un peu « rapide » l'égalité $(2k+1)+(2k+3)=4k+4$ et exiger un commentaire. On reconnait là le fonctionnement du contrat didactique et la transformation progressive du « nouveau » en « ancien » qui n'est plus objet d'apprentissage. La disparition apparente du raisonnement est dans ce cas un signe d'un bon apprentissage…

Une remarque essentielle est la suivante : le fait de savoir choisir un élément quelconque en géométrie n'apprend pas pour autant à savoir le faire en algèbre ; le recours à un élément générique se pratique de façon fondamentalement différente dans ces deux disciplines, et fait appel à des symbolismes, figure dans un cas, notation littérale dans l'autre, bien distincts, le deuxième, découvert des siècles après le premier, est bien une invention mathématique. Soulignons que l'exposé ci-dessus n'a pas de prétention historique, en ce sens qu'il est probable que les lois de l'algèbre aient été « découvertes » en quelque sorte expérimentalement et non pas comme application de règles de la logique.

Rendons enfin hommage à Leibniz qui avait remarqué bien avant nous que le calcul algébrique était du raisonnement automatisé et espérait la généralisation du calcul à tous les raisonnements : « Ce qui fait la stérilité de la plupart des controverses, c'est justement le manque de rigueur et de précision du langage usuel, qui masque les équivoques et les paralogismes » Une fois les raisonnements traduits en calculs « […] il arrivera alors que tout paralogisme ne soit rien de plus qu'une erreur de calcul, et qu'un sophisme, une fois exprimé dans cette espèce d'écriture nouvelle, ne soit réellement rien d'autre qu'un solécisme ou un barbarisme […] Dès lors, quand surgiront des controverses, inutile d'instituer une discussion entre deux philosophes, pas plus qu'on ne le fait entre deux calculateurs. Car il suffira de prendre la plume à la main […] et après avoir au besoin convoqué un ami, de se dire l'un à l'autre : calculons ? »

5) Le cas de la géométrie.

Au témoignage de Proclus, conforté par les travaux d'historiens comme Mueller (1981) ou Netz (1999), il est clair que pour Euclide, la démonstration géométrique consiste dans l'étude d'un exemple générique (pour plus de détails, cf. Netz, loc. cit. et Arsac, 1999). D'après Netz, le caractère générique de la démonstration menée sur une figure était assuré par la possibilité de la répéter à volonté pour toute autre figure proposée. Ceci rend bien compte du plan des démonstrations d'Euclide : tout d'abord, Euclide énonce le théorème à démontrer, dans toute sa généralité, sans introduire de lettres, c'est ce que Proclus appelle « protasis », par exemple :

« Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés qui sous-tendent les angles égaux seront aussi égaux entre eux. »

Vient ensuite l' « ecthesis » ; on se donne un triangle générique et on affirme que l'on va démontrer le résultat dans ce cas particulier :

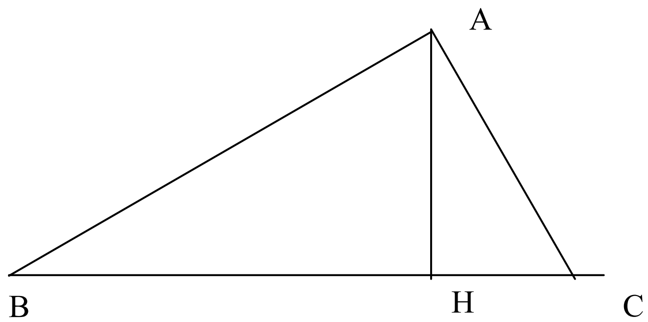
« Soit le triangle ABC ayant l'angle sous ABC égal à l'angle sous ACB. Je dis que le côté AB est égal au côté AC. »

Ensuite seulement vient la démonstration.

Cette question de la généralité dans les démonstrations géométriques est ainsi réglée depuis si longtemps qu'elle n'est plus abordée explicitement par les mathématiciens. Mais revenons à la classe du vingt-et-unième siècle. Lorsque l'enseignant insiste auprès des élèves pour qu'ils dessinent précisément un triangle quelconque, c'est-à-dire ni isocèle, ni rectangle, il essaie d'obtenir qu'ils tracent une figure générique en ce sens qu'on ne risque pas d'y lire d'autres propriétés que celles postulées dans les hypothèses du problème étudié. Cette précaution a-t-elle un statut théorique ? A priori non : on peut parfaitement démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes en s'appuyant sur une figure qui perceptivement représente un triangle isocèle, pourvu qu'on n'utilise pas le fait que deux côtés ou deux angles du triangle sont égaux. Ceci justifierait que l'on affirme, comme parfois, que la figure n'a aucun rôle dans le caractère de nécessité de la démonstration : elle aurait seulement l'utilité d'un changement de registre permettant de mettre en valeur visuellement les hypothèses, de déceler, par un travail propre à son registre, les énoncés à faire intervenir dans la démonstration. Quant à l'insistance de l'enseignant sur les figures génériques, elle n'aurait qu'un rôle pédagogique : éviter de lire sur le dessin des propriétés parasites, montrer que la démonstration doit être dans une certaine mesure indépendante du dessin.

En fait, cette position est illusoire car, comme on peut le vérifier sur l'exemple très simple de la somme des angles d'un triangle, la très grande majorité des démonstrations géométriques font appel à des propriétés lues sur la figure et qu'on ne saurait démontrer sans sortir du cadre de la géométrie traditionnelle (cf. Arsac, 1998). Voici un autre exemple plus simple : considérons un triangle ABC rectangle en A et la hauteur issue de A qui coupe (BC) en H. Plusieurs démonstrations élémentaires du théorème de Pythagore, ainsi que la démonstration d'Euclide elle-même, utilisent le fait que H est entre B et C, qui permet par exemple d'écrire que :

$$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(ABH) + \text{aire}(ACH), \text{ ou bien que } BC = BH + HC.$$



Si l'on veut que le résultat de ces démonstrations ait un caractère de nécessité, il faut donc en particulier que H soit *nécessairement* entre B et C. Si l'on renonce à se placer dans un cadre de géométrie affine, où le problème, moyennant le choix d'un système d'axes, devient un problème algébrique, ce caractère de nécessité peut être établi de deux manières.

- On peut se placer dans un cadre axiomatique « complet », comme celui défini par Hilbert (1899), on disposera alors d'un cadre théorique dans lequel on pourra démontrer que H est entre B et C par un raisonnement déductif ne renvoyant en aucune manière à la lecture de la figure (cf. Arsac 1998).
- Mais en général, comme le faisait Euclide lui-même, on utilise cette propriété sans l'énoncer. Comme le dit Netz (1999, p. 35) dans son commentaire des démonstrations d'Euclide : « Les propriétés que la perception extrait du diagramme forment un sous-ensemble vrai des propriétés réelles de l'objet mathématique. ». Dans ce cas, si l'on pose explicitement la question de la vérité de cette affirmation, la réponse spontanée est que c'est évident. Il s'agit maintenant d'analyser cette évidence.

Afin d'écarter toute équivoque dans l'étude de cette question, rappelons qu'il est classique depuis Platon de distinguer la figure tracée sur le papier (ou l'écran) qu'il est naturel de désigner comme un dessin, de l'objet géométrique « abstrait » sur lequel porte en fait la démonstration. Alors, le problème porte bien sur le dessin : comme personne n'a jamais vraiment contemplé l'objet idéal platonicien, c'est bien sur le dessin, qui en est son représentant, tout imparfait soit-il, que se fait la constatation du fait que H est entre B et C. *C'est donc le dessin qui doit avoir un caractère générique* et attester de la nécessité du fait que H est entre B et C. Autrement dit, il faut que dans tout dessin H soit entre B et C, et même qu'on puisse affirmer que tout dessin contradictoire est faux. Mais comment s'en assurer ? Nous emprunterons à N. Rouche (1989) la formule suivante, concernant ce qu'il appelle la « pensée mathématique immédiate » ou les jugements « d'une seule venue » et qui recouvre en particulier ce que nous avons caractérisé comme des évidences lues sur le dessin.

« Une double condition semble nécessaire et suffisante pour qu'une proposition soit vécue comme évidente, à savoir
a) qu'on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier ;
b) que la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas particuliers » (Rouche, 1989, p. 14).

Bien sûr, les remarques de Rouche constituent plus une description d'un phénomène qu'une explication, et nous laissons la question ouverte sans savoir de quel domaine de la pensée et de la recherche elle relève.

La démonstration géométrique usuelle utilise donc des constatations sur le dessin qui ne peuvent être incorporées dans le déroulement du raisonnement que parce qu'elles présentent un caractère de nécessité et ce caractère de nécessité renvoie à une certitude sur le caractère générique de ces constats graphiques. Serfati (1999, p. 151) avance l'hypothèse que c'est l'expérience du caractère invariant de ces constatations sur le dessin qui a amené chez les mathématiciens grecs l'idée d'un objet abstrait dont les différents dessins ne seraient que des « représentations concrètes contingentes » et donc finalement une « conception platonicienne forte des mathématiques ». Ces constatations sur le dessin, fondées sur la familiarité avec le dessin géométrique, constituent un stock d'évidences qui sont **une partie implicite** de ce que l'on appelle souvent dans l'enseignement **la boite à outils**.

La démonstration géométrique classique ne peut donc être considérée comme un enchainement d'inférences qu'à condition que certaines de ces inférences soient du type « On voit sur le dessin que D et E sont de part et d'autre de A ». Bien sûr, ce type d'inférences où « l'énoncé tiers » est lu sur le dessin n'est pas explicité en général.

La conviction du caractère générique des constatations sur le dessin peut être renforcée par l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique, mais il reste toujours le problème de la séparation entre ce qu'il est légitime de lire sur le dessin et ce qu'il n'est pas légitime d'y lire, la conclusion en particulier (pour une étude plus détaillée, cf. Arsac 1999). Ce problème relève à la fois de la transposition et du contrat didactique.

Par ces dernières remarques, liées à la prise en compte du problème de la généralité, l'analyse ci-dessus diffère de celle de Duval. Mais cette différence porte sur la dimension épistémologique de l'analyse sans remettre nécessairement en cause son aspect didactique, ceci pour deux raisons :

- tout d'abord, l'analyse de Duval se situe à un niveau où l'on peut supposer que l'apprentissage des évidences graphiques ou des « jugements d'une seule venue », est déjà réalisé. Nos remarques soulignent simplement que cet apprentissage préalable doit être acquis pour que l'analyse cognitive de Duval s'applique.
- D'autre part, personne ne songe (ou ne songe plus ?) à enseigner une géométrie sur une base axiomatique rigoureuse, à la Hilbert, ce qui n'était d'ailleurs pas le projet de Hilbert lui-même, lequel s'attache à « l'analyse de notre intuition de l'espace ». Cette analyse consiste pour lui à découvrir, en particulier, les relations logiques entre les divers énoncés géométriques vrais, y compris ceux considérés alors comme évidents, mais le but n'est pas d'inventer une nouvelle façon de faire ou d'enseigner la géométrie plane (Arsac, 1998).

Au total, notre analyse propose donc de compléter celle de Duval en soulignant que la démonstration en géométrie au collège ne se réduit pas à l'aspect raisonnement déductif ; il ne s'agit pas d'une réfutation des résultats de Duval. Il resterait évidemment à compléter notre propre analyse par une étude précise des modifications à apporter compte tenu de l'emploi des logiciels de géométrie dynamique !

Nous avons mentionné le fait que l'on distingue parfois dans une démonstration géométrique différents cas de figure. On peut remarquer que cette distinction entre deux ou trois cas et son caractère exhaustif ne sont en général fondés que sur des évidences graphiques. Lorsqu'on admet, souvent implicitement et toujours sans argumentation explicite, qu'il n'y a qu'un seul cas de figure, ce qui précède montre que l'on admet en fait que le dessin que l'on a tracé a un caractère générique !

Ce genre de question n'est pas abordé en didactique, sans doute parce qu'effectivement on sait depuis longtemps que la démonstration géométrique classique assure la généralité de ce qu'elle démontre, ce qui revient à la réduire au seul aspect de la nécessité. Cet escamotage du problème de la généralité est nécessaire si l'on veut éviter les redoutables problèmes dus à la lecture sur le dessin de certaines informations nécessaires à la démonstration. Cependant la prise de conscience du fait que c'est le dessin, et non l'objet géométrique abstrait, qui doit avoir un caractère générique a les avantages suivants :

- elle montre que l'on peut faire de la géométrie, sans résoudre le problème philosophique du statut de l'objet géométrique (Arsac, 1999, p. 363 et 385-87), que chacun peut résoudre à sa manière sans que cela influe sur la pratique de la démonstration géométrique.
- Elle rappelle l'enracinement de la géométrie dans la perception, et souligne, du point de vue pédagogique la continuité entre la familiarisation avec le dessin géométrique qui remonte à l'école primaire et la démonstration géométrique. Elle fait le lien entre le point de vue de Rouche et celui de Duval.

En ce qui concerne la démonstration elle-même, nous pouvons tirer les conclusions suivantes de cette brève étude : en géométrie, le problème de la généralité n'est pas soulevé, la démonstration utilise des prémisses lues sur le dessin, mais pratiquement toujours de façon implicite. Ainsi ce qui reste visible, c'est un raisonnement déductif, essentiellement en langue naturelle, ce qui explique que l'exemple de la démonstration géométrique soit privilégié pour son apparente transparence logique.

Une dernière remarque concerne ce que l'on peut appeler la « figure complétée », c'est-à-dire dans laquelle ont été ajoutées à la figure initiale toutes les constructions nécessaires à la démonstration ; autrement dit, c'est la figure complétée par les introductions d'objets nécessaires à la démonstration. Aussi bien pour les Grecs que pour Hilbert, cette figure complétée peut être considérée à elle seule comme la démonstration. Ceci souligne à nouveau le rôle fondamental des introductions d'objets et le fait que la démonstration ne se réduit pas d'abord, pour les mathématiciens, à un enchainement logique.

6) Donnée ou hypothèse.

Du fait que la démonstration d'un énoncé universel se fait en considérant un élément générique, elle commence par la « donnée » d'un tel élément. Ainsi, pour démontrer que dans tout triangle les médianes sont concourantes, on commence par la « donnée » d'un triangle quelconque, ce qui explique qu'il soit plus naturel de parler de *donnée* que d'hypothèse. Parfois, l'énoncé du théorème préfigure et met déjà en place cette méthode de démonstration : « soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors f est minorée et majorée sur $[a, b]$ ». La démonstration commencera par « soit donnée une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ » ; la donnée de cette fonction continue tient lieu d'hypothèse, la conclusion restant « alors f est majorée et minorée sur $[a, b]$ ». Quant à l'énoncé complet quantifié, il serait « quels que soient les nombres réels a et b, et la fonction f, si $a < b$ et si f est continue sur $[a, b]$, elle est majorée et minorée sur $[a, b]$ ». Cette forme lourde, dans laquelle on distingue et quantifie les données a, b, f et l'hypothèse (la fonction f est continue), est rarement explicitée. De même, l'énoncé classique du théorème des accroissements finis dissimule également une quantification universelle implicite. En algèbre, comme on vient de le voir, c'est la notation littérale qui permet de travailler sur un nombre quelconque ; par exemple, pour démontrer que « pour tous réels a et b, on a $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ », on commencera par « soit deux réels a et b », en ajoutant éventuellement « quelconques ». La donnée est ici celle de a et b.

Ainsi, la démonstration d'un énoncé universel commence par une introduction d'objet, mais qui est en quelque sorte automatique pour le mathématicien suffisamment expérimenté, et donc distincte de l'introduction d'objets qui, comme la parallèle à la base dans le cas de la preuve relative à la somme des angles, représentent « les idées » qui font tout marcher. Mais bien entendu, comme les élèves ne sont pas en général des mathématiciens expérimentés, il y a ici matière à apprentissage, tout au moins à partir du moment où une part suffisante d'initiative leur est laissée. De plus, dans certains cas, cette introduction d'objet générique est moins évidente. Considérons par exemple l'énoncé « l'ensemble des nombres premiers est infini ». Du point de vue d'un mathématicien contemporain, on peut introduire la donnée « ensemble des nombres naturels premiers », ce qui n'était pas concevable pour un mathématicien grec car il s'agit d'un ensemble dont on va montrer qu'il est « actuellement » infini. Pratiquement, on revient à l'équivalence « infini = non fini » et on démontre en fait : quel que soit l'ensemble fini de nombres naturels que l'on considère, il ne contient pas tous les nombres premiers. Alors la donnée est celle d'un ensemble fini de naturels premiers $n_1, n_2, ..., n_p$. Après l'introduction de cet objet générique vient celle de l'objet qui représente l'idée de la démonstration, le nombre $m = n_1 n_2 ... n_p + 1$. Cette démonstration « simple » a donc une structure logique assez complexe si on ne se limite pas à l'analyse en termes d'énoncés. En revanche, partons de l'énoncé d'Euclide (livre IX, proposition 20) qui évite l'infini :

« Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée. »

Ici, l'introduction de la multitude « proposée » $n_1, n_2, ..., n_p$ s'impose comme la donnée de départ. Mais on pourra trouver au chapitre 1 de Aigner et Ziegler (1998) six démonstrations différentes du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini : pour chacune de ces démonstrations les données changent suivant les stratégies adoptées pour résoudre le problème. Ce lien entre le choix des hypothèses et des données et celui de la stratégie de démonstration renvoie à nouveau au concept « d'unité cognitive » (cf. par ex Pedemonte 2005) : la rédaction de la démonstration finale n'est pas indépendante du processus de recherche qui l'a précédée.

Quand on se « donne » un triangle ABC, l'hypothèse, qui consiste dans le fait que A, B et C ne sont pas alignés est souvent « mangée » par le dessin, c'est ainsi que l'on tracera la parallèle en A à (BC) sans mentionner que le point A n'est pas sur (BC) ou que pour démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes, on considèrera le point d'intersection de deux médiatrices, sans démontrer qu'il existe. Dans ces deux cas, on n'utilise pas les hypothèses alors qu'il s'agit souvent des premières démonstrations proposées aux élèves !

7) Prémisses, invention et rédaction d'une démonstration.

Nous allons maintenant aborder un aspect de la démonstration indépendant du domaine mathématique étudié, mais qui mettra en évidence les variations suivant le niveau mathématique et le public visé, ce qu'on peut résumer en parlant de dépendance par rapport à l'institution de production et de destination de la démonstration.

On affirme parfois que la démonstration consiste en une suite de déductions logiques permettant d'aller de l'hypothèse à la conclusion, en ajoutant toutefois qu'on peut aussi « remonter » de l'hypothèse à la conclusion en raisonnant par conditions suffisantes, ce que l'on dénomme alors « chainage arrière » pour le distinguer de la première démarche « chainage avant ». Cette affirmation doit être complétée et nuancée, en ce sens que cette chaine de déductions utilise non seulement les hypothèses et données particulières dont on dispose, mais aussi les énoncés de la boite à outils, et surtout des objets introduits par des constructions auxiliaires justifiées par l'ensemble des connaissances mathématiques antérieures ; celles-ci n'interviennent donc pas seulement comme un réservoir d'énoncés tiers.

Considérons par exemple la démonstration classique relative à la somme des angles d'un triangle ABC qui consiste à tracer en un sommet la parallèle au côté opposé puis à appliquer le théorème des angles alternes-internes. C'est la construction de cette parallèle qui permet de mettre en branle le processus déductif, car on dispose alors de la configuration nécessaire (au point de vue géométrique), c'est-à-dire des conditions d'entrée indispensables à l'application du théorème des angles alternes-internes. Cette prémisse est donc la clé de la démonstration. De même, dans la démonstration, que nous avons rappelée, de l'infinitude des nombres premiers, la clé est l'introduction du nombre m. Dans les démonstrations élémentaires on peut en général introduire toutes les prémisses indispensables au début, mais dans les démonstrations complexes, l'injection de prémisses se fait tout au long du raisonnement, en brisant la chaine déductive. Il est certes possible de rétablir la continuité logique en citant intégralement les théorèmes qui autorisent l'introduction des prémisses. Par exemple, dans le cas de la somme des angles du triangle : comme ABC est un triangle, le point A n'appartient pas à la droite (BC), par conséquent, comme par tout point extérieur à une droite il passe une parallèle unique à cette droite, il existe une parallèle à (BC) passant par A… Ce pas de déduction rétablit la chaine logique. Mais cette solution n'est pas satisfaisante, ni du point de vue de l'élève, ni de celui du mathématicien.

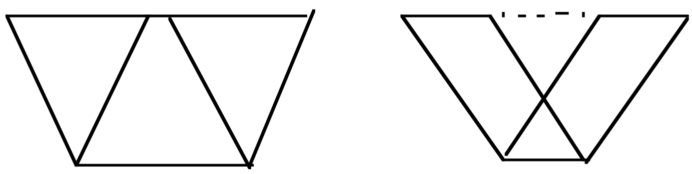
Du point de vue de l'élève, l'existence de la parallèle est attestée par le fait qu'on peut la tracer à la règle et au compas, ou exécuter une commande sur un logiciel de dessin géométrique, opération qui pour lui n'a pas a priori d'aspect logique. D'une manière générale, quand il s'agit de géométrie, l'introduction des prémisses apparait comme une opération de complémentation de la figure, confinée au registre graphique, qui relève de la recherche de problème, de l'heuristique, non d'une tâche d'organisation logique.

Du point de vue du mathématicien, la situation est en fait la même. C'est d'ailleurs ainsi que le comprend Euclide qui sépare soigneusement cette phase de constructions nécessaires à la démonstration de la démonstration proprement dite. Plus généralement, les objets mathématiques introduits sans justification explicite, alors que celle-ci est en général possible, sont ceux qui doivent être présents, disponibles dans l'esprit du mathématicien, comme ils le sont pour l'élève, éventuellement comme primitives dans un logiciel, pour que la démonstration puisse être trouvée, et qui doivent l'être dans l'esprit du lecteur pour qu'elle soit effectivement comprise. Lorsqu'un mathématicien introduit un objet ou lit une propriété sur le dessin, au cours d'une démonstration géométrique, il n'a pas présente à l'esprit une axiomatique de la géométrie ; a fortiori s'il décide de « considérer » l'ensemble des objets qui vérifient une certaine propriété, il n'a pas présent à l'esprit l'axiomatique de la théorie des ensembles qui lui permettrait de justifier l'existence de celui qu'il vient d'introduire.

On retrouve ici la distinction entre forme et rôle d'une démonstration : une soumission totale, une réduction à la pure logique serait contradictoire avec le rôle de compréhension et de communication de la démonstration. En effet, comme le souligne Poincaré (1889), « c'est par la logique qu'on démontre mais c'est par l'intuition qu'on invente » : les introductions d'objets relèvent plutôt de l'intuition et de la découverte et ne doivent pas être dissoutes dans la chaine logique. Du point de vue didactique, ceci soulève le problème du lien dans l'apprentissage entre découverte et rédaction d'une démonstration. Faut-il faire apprendre simultanément à découvrir et à rédiger une démonstration, ou faut-il séparer ces deux tâches ?

Du point de vue mathématique, ceci explique un certain « mépris » des mathématiciens vis-à-vis de l'écriture et de la structure logique de la démonstration. Ce qui est fondamental, c'est l'invention, c'est-à-dire la fabrication des prémisses, la découverte des objets dont l'introduction permettra de mettre en marche le processus déductif. On retrouve ici « l'unité cognitive » (Boero, Garuti, loc. cit., Pedemonte, 2002) entre la recherche et la rédaction de la démonstration : si l'on énumère les domaines dans lesquels on peut repérer cette unité, il faut ajouter à la liste de Pedemonte (2002) la liste des objets à introduire ; cette liste peut d'ailleurs avoir un sens en dehors de la démonstration au simple niveau de la compréhension du problème. Plus ces objets sont nombreux, plus ils se situent dans des domaines a priori éloignés de celui de l'énoncé, plus leur introduction est originale par rapport aux méthodes classiques de démonstration, plus la démonstration sera difficile à trouver. Dans certains cas, au contraire, cette introduction d'objets est relativement naturelle, et pourra être obtenue simplement par « l'analyse » des Anciens, c'est-à-dire en supposant le problème résolu.

La prépondérance des objets sur le raisonnement se retrouve en géométrie, aussi bien chez Hilbert que chez Euclide. Pour toute démonstration géométrique, appelons « figure complétée » (Arsac, 1999) la figure initiale complétée par toutes les constructions d'objets nécessaires à la démonstration. Il semble bien attesté historiquement que pour les Grecs, cette figure complétée pouvait être considérée comme une métonymie de la démonstration. Or, Hilbert adopte le même point de vue. C'est ainsi qu'il écrit (Hilbert, 1899) « La démonstration bien connue, due à Euclide et illustrée par la figure ci-contre, conduit au théorème :



Théorème 44 : deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équicomplémentaires ».

Dans la suite, Hilbert utilise à nouveau la figure complétée comme métonyme d'une démonstration, y compris dans des cas où la reconstitution de la démonstration à partir de la figure n'est pas évidente.

Ainsi, même en géométrie, la démonstration ne se réduit au raisonnement que si l'on écarte les problèmes qui demanderaient un trop grand appel au dessin[1], ou dont la longueur

---

[1] Il en est ainsi du problème suivant : soit dans un plan deux cercles extérieurs l'un à l'autre (la somme des rayons est strictement inférieure à la distance des centres), existe-t-il des points M dans le plan, extérieurs aux deux cercles, tels que toute droite passant par M coupe au moins un des deux cercles ? Il n'est pas trop difficile de résoudre le problème graphiquement, mais il est pratiquement impossible de rédiger une démonstration de la solution fondée sur autre chose que des évidences lues sur le dessin.

nécessiterait des cassures du raisonnement pour introduire de nouveaux objets. Cette restriction de la difficulté est certainement inévitable dans une phase d'initiation.

Yves Chevallard avait identifié deux différences essentielles entre les démonstrations « savantes » et les démonstrations « scolaires » : une démonstration savante est juste ou fausse, il n'y a pas de milieu, alors qu'une démonstration scolaire peut valoir 10/20 ; une démonstration savante a pour fonction de prouver, une démonstration scolaire vise à montrer le niveau de son auteur. Ces différences portent sur la fonction de la démonstration. En ce qui concerne son contenu, nous pouvons ajouter que l'on cherchera au niveau scolaire à réduire la complexité par deux méthodes : diminution du nombre de pas de raisonnement, diminution du nombre d'objets à introduire.

8) Pour conclure sur l'intérêt des mathématiques du collège.

1) On trouvera dans Arsac (1998) une étude systématique des implicites lus sur le dessin dans les démonstrations de géométrie plane.
2) On trouvera dans le premier chapitre de Aigner et Ziegler (1998) six manières différentes de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini qui permettent de voir combien le choix des prémisses anticipe déjà la démonstration. Ce livre, *Raisonnements divins*, est une collection de démonstrations choisies pour leur beauté, souvent complexes, mais n'utilisant guère que des outils enseignés dans les deux premières années de l'université. C'est un bijou à recommander à tous ceux qui s'intéressent à la démonstration et en tout cas à faire acheter par toutes les bibliothèques d'établissement. Et je vous recommande l'étude de la deuxième démonstration proposée, celle du « postulat de Bertrand » qui affirme que pour tout entier n, il existe toujours un nombre premier entre n et $2n$. Parmi toutes les lectures que l'on peut faire d'une telle démonstration, la lecture centrée sur la logique, débusquant les implicites, les introductions d'objet, les introductions d'objets génériques (il n'est pas toujours facile, et parfois un peu arbitraire, de distinguer ces deux catégories), peut montrer que ces catégories, qui apparaissent déjà dans les démonstrations du collège, restent pertinentes pour analyser une démonstration qui est déjà d'une grande complexité, cette dernière se traduisant en particulier par un nombre très élevé d'introductions d'objets, traces des idées remarquables qui ont permis ce résultat.

Aigner M, Ziegler GM, 1998, *Proofs from THE BOOK*, Springer, Berlin. Traduction française par N. Puech et J.-M. Morvan, *Raisonnements divins*, Springer, Paris, 2002.

Arsac G, 1998, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*. Aléas, Lyon, 125 pages.

Arsac G, 1999, Variations et variables de la démonstration géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/3, p. 357-390.

Balacheff N, 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics,* 18, n° 2, Mai 1977, p. 147-176.

Durand-Guerrier V, Ben Kilani I, 2004, Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien, *Les Cahiers du Français Contemporain*, 9, p. 29-55.

Duval R, 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 233-261.

Gardies J-L, 1997, *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*, Vrin, Paris.

Garuti R, Boero P, Lemut E, 1998, Cognitive unity of theorems and difficulties of proof, *Proceedings of PME-XXII,* vol. 2, p. 345-352

Hilbert D, 1899, *Les fondements de la géométrie*, traduction par Paul Rossier, Dunod, Paris, 1971, 311 pages.

Longo G, 2009, Theorems as constructive visions, in Gila Hanna, Michael de Villiers, (éditeurs), *Proof and proving in mathematics education : the 19th ICMI study,* Springer, 2012.

Mueller I, 1981, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*, Cambridge (Massachusetts).

Netz R, 1999, *The shaping of deduction in Greek mathematics : a study in cognitive history*, Cambridge, 327 pages.

Pedemonte B, 2005, Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration?, *Recherches en didactique des mathématiques*, 25/3, La Pensée Sauvage, Grenoble. p. 313-348.

Rouche N, 1989, Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Lyon, 496 pages, p. 9-38.

Serfati M, 1999, La dialectique de l'indéterminé, de Viète et Frege à Russell, *Actes du séminaire d'histoire et épistémologie des mathématiques*, IREM de Paris Sud, p. 145-174.

Thurston WP, 1994, On proof and progress in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 30, p. 161-177 ; trad. française : 1995, Preuve et progrès en mathématiques, *Repères IREM*, 21, p. 7-26.