page 1

Réflexions à la lecture de Poincaré. Qu'est-ce qu'un « être mathématique » ? et « la vérité » en mathématiques ?

Besançon, 4 et 5 avril 2013, journées « Démonstration-Logique-Enseignement »

H. Lombardi, Besançon

Henri.Lombardi@univ-fcomte.fr, http://hlombardi.free.fr

Voir ces transparents : http://hlombardi.free.fr/publis/DLE-Besancon2013Slides.pdf

page 2

La nature du raisonnement mathématique

Poincaré, *La Science et l'Hypothèse.* Première partie : Le nombre et la grandeur. Chapitre premier.

La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on donc que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ?

page 3

La nature du raisonnement mathématique

...

On ne peut donc se soustraire à cette conclusion que la règle du raisonnement par récurrence est irréductible au principe de contradiction.

Cette règle ne peut non plus nous venir de *l'expérience* ; ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite. ...

page 4

La nature du raisonnement mathématique

Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Fin de citation

Notons que Poincaré ne présente pas cette étude comme une injonction à utiliser le raisonnement par récurrence chaque fois que l'on veut démontrer une propriété générale concernant les entiers naturels (parce qu'il serait lui seul rigoureux). Mais il affirme plutôt que, quant au fond, toute vérité générale concernant les entiers provient en dernière analyse de preuves qui se fondent sur la récurrence et non sur la seule logique (au sens de l'art général du raisonnement correct).

——— page 5 ———

La nature du raisonnement mathématique

Poincaré affirme aussi que toute activité mathématique vraiment créative doit faire appel à ce type d'induction, nécessaire pour passer du particulier au général, et qui se distingue de l'induction en physique par son absence de toute référence au monde « extérieur à l'esprit humain ».
Le théorème de Cayley-Hamilton par exemple est un théorème général qui ne peut pas être démontré par un « logiciel de calcul algébrique ». Il revient certes à affirmer pour chaque taille de matrice carrée les identités algébriques correspondant à son énoncé : tel calcul aboutit à une matrice identiquement nulle. On peut donc « vérifier » par un calcul purement analytique le théorème pour les matrices de taille 3, 4, 5 etc., mais il faut nécessairement inventer quelque chose pour avoir accès au théorème général. Et cette invention, vraiment créatrice de neuf, reposera en dernière analyse sur quelque chose de même nature que le raisonnement par récurrence.

——— page 6 ———

La nature des nombres

Poincaré. *Revue de Métaphysique et Morale, 1905, p. 815–835.*
Texte repris dans *Science et Méthode.*
Les définitions du nombre sont très nombreuses et très diverses ; je renonce à énumérer même les noms de leurs auteurs. Nous ne devons pas nous étonner qu'il y en ait tant. Si l'une d'elles était satisfaisante, on n'en donnerait plus de nouvelle. Si chaque nouveau philosophe qui s'est occupé de cette question a cru devoir en inventer une autre, c'est qu'il n'était pas satisfait de celles de ses devanciers, et s'il n'en était pas satisfait, c'est qu'il croyait y apercevoir une pétition de principe.

——— page 7 ———

La nature des nombres

J'ai toujours éprouvé, en lisant les écrits consacrés à ce problème, un profond sentiment de malaise ; je m'attendais toujours à me heurter à une pétition de principe et, quand je ne l'apercevais pas tout de suite, j'avais la crainte d'avoir mal regardé.
C'est qu'il est impossible de donner une définition sans énoncer une phrase, et difficile d'énoncer une phrase sans y mettre un nom de nombre, ou au moins le mot plusieurs, ou au moins un mot au pluriel. Et alors la pente est glissante et à chaque instant on risque de tomber dans la pétition de principe.

——— page 8 ———

La nature des nombres

... Le langage symbolique créé par M. Peano joue un très grand rôle dans ces nouvelles recherches. Il est susceptible de rendre de grands services, mais il me semble que M. Couturat y attache une importance exagérée et qui a dû étonner M. Peano lui-même.
... Nous voyons d'abord M. Burali-Forti définir le nombre 1 de la manière suivante :

$$1 = \iota\, \mathrm{T}' \{ \mathrm{Ko} \cap (u, h) \ni (u \,\varepsilon\, \mathrm{Un}) \}$$

définition éminemment propre à donner une idée du nombre 1 aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler. J'entends trop mal le Péanien pour oser risquer une critique, mais je crains bien que cette définition ne contienne une pétition de principe, attendu que j'aperçois 1 en chiffre dans le premier membre et Un en toutes lettres dans le second.

page 9

La nature des nombres

Quoi qu'il en soit, M. Burali-Forti part de cette définition et, après un court calcul, il arrive à l'équation :

$$(27) \qquad 1\ \varepsilon\ \mathrm{No}$$

qui nous apprend que Un est un nombre. Et puisque nous en sommes à ces définitions des premiers nombres, rappelons que M. Couturat a défini également 0 et 1. Qu'est-ce que zéro ? c'est le nombre des éléments de la classe nulle ; et qu'est-ce que la classe nulle ? c'est celle qui ne contient aucun élément.

page 10

La nature des nombres

Définir zéro par nul, et nul par aucun, c'est vraiment abuser de la richesse de la langue française ; aussi M. Couturat a-t-il introduit un perfectionnement dans sa définition, en écrivant :

$$0 = \iota\Lambda : \varphi x = \Lambda . \supset . \Lambda = (x \,\varepsilon\, \varphi x)$$

ce qui veut dire en français : zéro est le nombre des objets qui satisfont à une condition qui n'est jamais remplie. Mais comme jamais signifie en aucun cas je ne vois pas que le progrès soit considérable.

page 11

La nature des nombres

Je me hâte d'ajouter que la définition que M. Couturat donne du nombre 1 est plus satisfaisante. Un, dit-il en substance, est le nombre des éléments d'une classe dont deux éléments quelconques sont identiques. Elle est plus satisfaisante, ai-je dit, en ce sens que pour définir 1, il ne se sert pas du mot un ; en revanche, il se sert du mot deux. Mais j'ai peur que si on demandait à M. Couturat ce que c'est que deux, il ne soit obligé de se servir du mot un.
Fin de citation
Derrière l'ironie féroce du propos, on ne peut qu'admirer le fait qu'en 1905, Poincaré prévoit en quelque sorte le théorème d'incomplétude de Gödel dans sa critique de l'incapacité du formalisme à fonder la rigueur, et ceci pour de simples raisons de circularité.

page 12

Le formalisme au secours de la rigueur ?

On propose souvent à titre d'exemple de démontrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2. \qquad (*)$$

Ce cas d'école n'est en fait pas très convaincant, car « comment a-t-on deviné le résultat ? ». Pour établir cette égalité il vaut beaucoup mieux écrire, comme le fit Gauss pour $n = 100$:

$$\begin{array}{rcrcrcccrcr} 2 \times (1 + \cdots + 100) & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ & + & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ & = & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \\ & = & 101 & \times & 100 & & & & & & \end{array}$$

page 13

Le formalisme au secours de la rigueur ?

On trouve des gens qui contestent l'usage des trois petits points dans les preuves (mais sans doute pas sur leurs feuilles de brouillon) et qui prétendent par exemple que l'égalité $(*)$ plus haut ne peut être établie en toute rigueur que par récurrence.
En fait ces « puristes » se situent non pas dans le cadre intuitif des entiers naturels, mais dans le cadre d'un système formel (à préciser) où l'on développe une théorie dans laquelle l'usage intuitif des trois petits points est interdit a priori.
L'inconvénient est que **la métathéorie, la théorie du système formel lui-même, nécessaire pour valider son utilisation, ne peut pas être développée sans une théorie naïve des entiers naturels intuitifs.**

page 14

Les bons côtés du formalisme

Si le formalisme ne peut pas être d'un grand secours pour certifier la rigueur de telle ou telle approche globale des mathématiques, cela ne signifie pas qu'il soit inutile en général. Bien au contraire, une fois un cadre conceptuel informel accepté pour des raisons de nature pré ou extra mathématique, il s'est avéré très intéressant d'en explorer les conséquences en formalisant ce cadre conceptuel.
Certains théorèmes aux démonstrations très compliquées ne semblent pas pouvoir être certifiés sans un tel travail, qui aboutit à vérifier une démonstration par des méthodes purement mécaniques.
Par ailleurs, la compréhension des « structures » comme sousbassement fondamental permettant d'appréhender la surprenante unité des mathématiques semble inévitablement liée à la mise en place des systèmes d'axiomes formels correspondants.

page 15

L'invention de la droite réelle par Cantor et Dedekind

Il s'agit d'un coup de force étonnant.
Que sont et que doivent être les nombres réels ?, dit Dedekind.
Dedekind prétend être le premier à démontrer $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$
Pourtant Archimède savait le démontrer.
Alors qu'est-ce qui a changé ?

page 16

L'invention de la droite réelle, suite

L'autorisation d'utiliser librement les « infinis actuels » permet à Dedekind et Cantor de définir un nombre réel en toute généralité.
On voit que la définition de Dedekind utilise l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ et celle de Cantor $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
Ce n'est plus la géométrie qui justifie intuitivement l'analyse, c'est l'analyse qui justifie la géométrie (via le calcul sur les coordonnées).
Et l'analyse semble avoir été réduite à l'arithmétique grâce à l'autorisation donnée aux ensembles infinis

page 17

L'appréciation de Poincaré

La Science et l'Hypothèse. Chapitre II.
La grandeur mathématique et l'expérience.

Avant d'aller plus loin, faisons une première remarque. Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais *extérieurs* les uns aux autres. Ce n'est pas là la conception ordinaire, où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est l'unité dans la multiplicité, la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu. Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens.

page 18

Les paradoxes de l'Univers cantorien : des infinis trop grands !

L'univers mathématique de Cantor est trop grand pour être lui-même un ensemble (le cardinal de l'univers est plus grand que tous les autres, mais tout cardinal $\aleph_{bidule}$ est strictement plus petit que le cardinal de $\mathcal{P}(\aleph_{bidule})$.
Au départ, Cantor pensait pouvoir définir un ensemble simplement en disant quelle propriété satisfont ses éléments.
Borel, Lebesgue, Brouwer, Poincaré, Hermann Weyl refuseront de considérer que les ensembles à la Cantor puissent être un fondement fiable pour les mathématiques.
Pour eux, même $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne sont pas acceptables.

page 19

Poincaré sur le cantorisme

J'ai parlé plus haut du besoin que nous avons de remonter sans cesse aux premiers principes de notre science et du profit qu'en peut tirer l'étude de l'esprit humain. C'est ce besoin qui a inspiré deux tentatives qui ont tenu une très grande place dans l'histoire la plus récente des mathématiques. La première est le cantorisme, qui a rendu à la science les services que l'on sait. Cantor a introduit dans la science une manière nouvelle de considérer l'infini mathématique ....
Un des traits caractéristiques du cantorisme, c'est qu'au lieu de s'élever au général en bâtissant des constructions de plus en plus compliquées et de définir **par construction**, il part du **genus supremum** et ne définit, comme auraient dit les scolastiques, que per **genus proximum et differentiam specificam**.

page 20

Poincaré sur le cantorisme, suite

De là l'horreur qu'il a quelquefois inspirée à certains esprits, à Hermite par exemple, dont l'idée favorite était de comparer les sciences mathématiques aux sciences naturelles.
Chez la plupart d'entre nous ces préventions s'étaient dissipées, mais il est arrivé qu'on s'est heurté à certains paradoxes, à certaines contradictions apparentes, qui auraient comblé de joie Zénon d'Élée et l'école de Mégare. Et alors chacun de chercher le remède ...
Quel que soit le remède adopté, nous pouvons nous promettre la joie du médecin appelé à suivre un beau cas pathologique.
in : l'avenir des mathématiques, 1908

page 21

Poincaré et les axiomes de Zermelo

M. Zermelo a voulu construire un système impeccable d'axiomes ; mais ces axiomes ne peuvent être regardés comme des décrets arbitraires, puisqu'il faudrait montrer que ces décrets ne sont pas contradictoires, et qu'ayant fait entièrement table rase on n'a plus rien sur quoi l'on puisse appuyer une semblable démonstration. Il faut donc que ces axiomes soient évidents par eux-mêmes.
Or quel est le mécanisme par lequel on les a construits ? on a pris des axiomes qui sont vrais des collections finies ; on ne pouvait les étendre tous aux collections infinies, on n'a fait cette extension que pour un certain nombre d'entre eux, choisis plus ou moins arbitrairement.
À mon sens d'ailleurs [...] aucune proposition concernant les collections infinies ne peut être évidente par définition.
in : la logique de l'infini, 1909

page 22

Le programme de Poincaré

Quant à moi je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :
1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;
2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;
3. Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.
in : la logique de l'infini, 1909

page 23

Le programme de Hilbert

Hilbert tient les critiques de Brouwer et Poincaré pour sérieuses. Mais ce qui lui importe, c'est avant tout de faire des mathématiques. Or, dit-il, les mathématiques sont plus faciles à faire dans le paradis de Cantor que dans l'enfer de Brouwer.
Hilbert tient le langage suivant : finalement peu nous importe de savoir si les infinis actuels existent ou non, si l'hypothèse du continu a un sens ou si elle n'en a pas ; ce qui nous importe, c'est de savoir si, en utilisant la théorie des ensembles infinis, on est assuré de ne jamais démontrer des énoncés qui ont du sens mais qui seraient faux.
C'est exactement la même attitude que vis à vis des nombres imaginaires qui servent à trouver la racine réelle d'une équation du troisième degré : l'important est avant tout que, une fois le calcul terminé, et les nombres imaginaires évaporés, le résultat soit juste.

page 24

Le programme de Hilbert, suite

Autrement dit, si l'on pouvait réduire l'infini mathématique à n'être qu'une manière de parler, on serait pleinement satisfaits.
À défaut de pouvoir élucider **la sémantique** des ensembles infinis, essayons au moins de comprendre **leur syntaxe** : comprendre ce que l'on fait exactement quand on les utilise en mathématiques.
Cette position de repli peut sembler effarante, car elle consiste à arithmétiser les mathématiques d'une façon radicale : l'étude d'une théorie formelle n'est rien d'autre que l'étude d'une unique fonction primitive récursive de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: celle qui énumère les numéros des théorèmes de la théorie.

page 25

L'échec du programme de Hilbert

Les théorèmes d'incomplétude de Gödel
1) Aucune théorie formelle ne peut décrire complètement le plus simple des infinis : $\mathbb{N}$.
2) Pour démontrer qu'une théorie formelle suffisamment expressive est consistante, on a besoin de méthodes de démonstration plus puissantes que celles codifiées dans la théorie formelle.

page 26

Les vertus du programme de Hilbert

1) Un nouveau domaine des mathématiques : la logique mathématique
2) Cela conduit par exemple à une clarification décisive, due à Brouwer et Heyting : la distinction nette entre la logique des mathématiques constructives (la logique intuitioniste) et la logique classique, qui accepte une idée de vérité absolue a priori : toute propriété ayant une signification claire est vraie ou fausse dans l'absolu (principe du tiers exclu).
3) La volonté de trouver une façon convaincante de justifier les idéalités cantoriennes. Ceci trouve aujourd'hui des confirmations surprenantes lorsque l'on remplace les exigences « finitistes » du programme de Hilbert par des exigences « constructives » ou « algorithmiques ».

page 27

L'analyse constructive à la Bishop

Dans **Foundations of Constructive Analysis** (1967), Errett Bishop développe une version constructive de la théorie des ensembles, avec laquelle **il réalise un nouveau type de programme de Hilbert**.
Il démontre dans un cadre entièrement constructif l'essentiel des théorèmes qui fondent l'analyse réelle et complexe (ce que l'on enseigne aujourd'hui jusqu'au Master).
Il s'agit d'un **cadre mathématique minimaliste** parce que les démonstrations sont acceptables aussi bien par un mathématicien classique que par toutes les variantes des mathématiques constructives.

page 28

Le programme de Poincaré réalisable ?

En fait Bishop réalise même le programme de Poincaré. Tous les objets usuels de l'analyse, qui sont de nature infinie par définition (les nombres réels, les espaces fonctionnels ...) sont traités dans les algorithmes à travers leurs approximations finies.
Ce ne sont certes pas des mathématiques qui tournent sur ordinateur, car la complexité des algorithmes est en général trop grande. Mais il s'agit néanmoins de la base théorique solide sur laquelle fonder l'analyse numérique.
En algèbre :
Mines R., Richman F., Ruitenburg W. **A Course in Constructive Algebra.** Universitext. Springer-Verlag, (1988).
Lombardi H., Quitté C. **Algèbre Commutative, Méthodes Constructives.** Calvage & Mounet, (2011).

Quelques autres références

WEYL H. *Le continu et autres écrits.* Traduits et commentés par Jean Largeault. Librairie Vrin (1994).
FEFERMAN S. *In the Light of Logic.* Oxford University Press, (1998).
DOWEK G. *Les métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire de mathématiques*, Le Pommier. (2007).
COQUAND T. *La contribution de Kolmogorov en logique intuitionniste.* dans : L'héritage de Kolmogorov en mathématiques. Charpentier E., Lesne A., Nikolski N. (eds). Belin, Paris (2004).
LOMBARDI H. *Épistémologie mathématique*, Ellipse. (2011).

Merci de votre attention