Un cours « Langage mathématique » en 1ère année d'Université.

Prendre le temps de quelques explicitations qui nous semblent nécessaires.

Christophe Hache - Zoé Mesnil
Université Paris Diderot

Journées Bisontines de Didactique et d'Épistémologie
4 avril 2013

n est une variable astreinte à $\mathbb{N}$

$$n \text{ est premier} \Rightarrow n \text{ est impair}$$

$$n \text{ est premier ET } n \text{ est impair}$$

Ces deux énoncés ont des structures très similaires, pourtant nous ne réagissons de la même manière face à l'un ou l'autre :
Nous n'hésitons pas à déclarer le premier faux, le deuxième nous laisse perplexe, il est déclaré parfois vrai, parfois faux.
Nous lisons la première proposition comme universellement quantifiée, même si ça n'est pas explicite.

$x+1 \geq 5$ lorsque $x \geq 2$

$f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0

$x+1 \geq 5$ lorsque $x \geq 2$

Relation entre deux propositions :

$$x \geq 2 \Rightarrow x+1 \geq 5$$

On peut se demander si c'est vrai quelle que soit la valeur attribuée à la variable x.

$f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0

Pas de sens de se demander si c'est vrai quelle que soit la valeur attribuée à x.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \quad (|x| < \eta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon)$$

Le langage est outil de construction, de négociation et de transformation des significations (individuelles et sociales).

Les pratiques langagières prennent part :

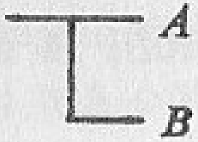
- à la construction du lien social, à la cohérence du groupe, de ses activités et de sa façon de penser le monde

- ainsi qu'à la construction des représentations et actions individuelles.

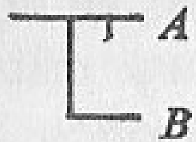
La langue n'est pas régie par des lois logiques
telles que l'observance de la grammaire puisse
suffire à garantir la rigueur formelle
du cours de la pensée.

G. Frege

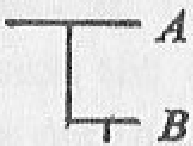
Examinons l'association du trait d'implication et du trait de négation dans le tableau suivant :

(1) 

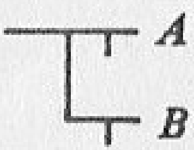
Le cas « non A et B » est nié

(2) 

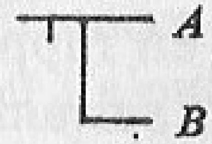
Le cas « A et B » est nié : A et B s'excluent

(3) 

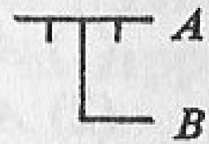
Le cas « non A et non B » est nié : A ou B

(4) 

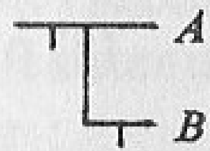
Le cas « A et non B » est nié

(4) 

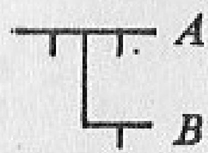
Le cas « non A et B » a lieu : B et non A.

(5) 

Le cas « A et B » a lieu : A et B

(6) 

Le cas « non A et non B » a lieu : ni A ni B

(8) 

Le cas « A et non B » a lieu : A et non B

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

2) Quand n tend vers l'infini, u_n tend vers ℓ

3) Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite u_n à partir d'un certain rang N

4) u_n tend vers ℓ quand n tend vers l'infini

5) Vers l'infini et au delà ! (ah non, ça c'est Buz l'éclair)

6) ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

7) La suite u a pour limite ℓ

8) u_n converge vers ℓ

9) En prenant n aussi grand que l'on veut, on peut rendre u_n arbitrairement proche de ℓ

10) Pour epsilon aussi petit qu'on veut, à partir d'un certain rang on aura $|u_n - \ell| < \varepsilon$

11) Pour tout epsilon positif, pour n assez grand on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$

12) Pour tout epsilon positif, il existe un entier N tel que, si $n \geqslant N$, alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$

13) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geqslant N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$

14) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$

15) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \;\; [(\varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon))]$

Cours Langage Mathématique

Proposé en L1, obligatoire pour les parcours Math/Info/Math-Info, quelques étudiants de MASS.

Plan du cours :

Chapitre 1 : généralités sur le langage : expressions mathématiques, statut des variables.

Chapitre 2 : les connecteurs logiques (attention particulière portée à l'implication).

Chapitre 3 : les quantificateurs (avec aussi il existe au plus, il existe au moins…)

Chapitre 4 : les raisonnements (introduction, élimination des connecteurs et des quantificateurs vu sous l'angle démonstrateur/utilisateur).

Chapitre 5 : langage ensembliste.

En ligne : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/logique/

Les expressions mathématiques

le carré du réel x

x est un réel positif

x est un réel quelconque

soit x un réel

x est supérieur à 0

x tend vers 0

3. Expressions mathématiques, noms, énoncés. Le discours est formé d'EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES, qui sont des assemblages de signes qui obéissent à certaines règles et à certaines conventions, lesquelles peuvent être soit très générales (voire universellement admises) soit particulières à un contexte donné (un ouvrage, un chapitre, un paragraphe...). Nous n'allons pas du tout essayer de donner une définition précise de ce qu'est une expression mathématique. L'expérience montre que, dans la plupart des cas, un consensus se fait assez facilement sur le fait que tel assemblage de signes est ou n'est pas une expression mathématique. Il y a certes des cas où c'est moins clair, où c'est discutable. Nous nous en accomoderons.

4. On peut classer les expressions mathématiques en deux grandes catégories.

Observons les expressions [1] à [21] ci-dessus. On remarque que

- les expressions [3], [4], [6], [12], [13], [15], [17], [18], [19], [20], [21] et [22] servent à DÉSIGNER des objets mathématiques ; nous les appellerons des NOMS (on dit aussi TERMES) ;

- les expressions [1], [2], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [14] et [16] sont des affirmations de FAITS concernant des objets mathématiques ; nous les appellerons des ÉNONCÉS (on dit aussi, entre autres, PROPOSITIONS).

$x^2 + 1$

$x^2 + 1 = 0$

L'équation $x^2 + 1 = 0$, d'inconnue réelle x.

L'équation $x^2 + 1 = 0$, d'inconnue réelle x, n'a pas de solution.

$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 1 = 0\}$

$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + a = 0\} = \emptyset$

Les propositions peuvent s'écrire de diverses manières allant
- de formulations dans un langage proche du langage courant
jusqu'à
- des formulations dans un langage plus formalisé qui peut comporter des symboles logiques (connecteurs, quantificateurs, variables) et des symboles mathématiques.

Le carré d'un nombre réel est positif.

Tous les réels ont un carré positif.

Pour tout x réel, x^2 est positif.

$$\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0$$

Une variable est un nom d'objet, qui ne désigne pas un objet particulier mais qui sert à marquer dans une proposition les places auxquelles on peut mettre des noms d'objets particuliers pris dans le domaine auquel la variable est astreinte.

À propos de variable (et du mot “variable”) :

a croit rapidement

b augmente indéfiniment

c se rapproche de 0

d est proche de zéro

pour e assez grand

pour f suffisamment proche de 1

g devient plus grand que 2

faire tendre h vers 3

i tend vers 4

K parcourt l'ensemble E

L décrit la courbe C

Variables libres/variables liées

De qui parlent les expressions mathématiques suivantes
(la variable a, n, k et x sont astreinte à $\mathbb{Z}$) ? :

$$\sum_{n=1}^{4} a \times n$$

$$\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \;\; x = k \times a\}$$

Le polynôme $ax^2 + 4x + 4$ a deux racines réelles distinctes

Expressions synonymes

$2 \times x + 1 = 0$ et $2 \times y + 1 = 0$

$\sin^2 x + \cos^2 x$ et $\sin^2 y + \cos^2 y$

$\textit{Pour tout réel } x,\ x^2 \geq 0$ et $\textit{Pour tout réel } y,\ y^2 \geq 0$

3) Voici un texte de preuve de cet énoncé proposé par un étudiant (les numéros de ligne [1], [2], [3] etc. ont été ajoutés) :

---

[1] $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

[2] $m = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$

[3] $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, on peut donc écrire le nombre n^2 sous la forme $2 \times p$ avec $p \in \mathbb{N}$, donc il est pair.

[4] $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$ (et $q \in \mathbb{N}$), donc m^2 est impair.

[5] n et n^2 sont donc pairs.

[6] m et m^2 sont donc impairs.

[7] Étant donné que tous les entiers sont pairs ou impairs, on en déduit que passer un entier au carré conserve la parité.

(a) Donner le statut des variables n et k dans l'expression "$n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$" (ligne [1]). Si une variable est muette indiquer le mutificateur correspondant, si une variable est quantifiée préciser la quantification.

(b) Même question ligne [3] pour n, k et p.

(c) Même question ligne [4] avec m, k et q.

(d) Que peut-on reprocher à cette preuve concernant la gestion des variables ?

Montrer que le carré d'un entier pair est une entier pair.

Deux propositions de réponses :

- Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier pair.
  Alors il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$
  On a alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$
  Puisque $k \in \mathbb{Z}$, $2k^2 \in \mathbb{Z}$ et donc n^2 est pair.
- Soient n et k deux entiers tels que $n = 2k$
  On a alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$
  Il existe donc un entier $k' = 2k^2$ tel que $n^2 = 2k'$, donc n^2 est pair.

Une petite mignardise

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?
(les variables x et h sont astreintes à $\mathbb{R}$)

$$\exists h > 0 \, (|x| < h \Rightarrow x = 0)$$

Si l'on place une quantification universelle sur x en tout début, on obtient une proposition vraie, si' l'on place une quantification universelle sur x juste avant la parenthèse, on obtient une proposition fausse.
On ne peut donc pas se contenter de dire qu'en mathématique l'implication est systématiquement universellement quantifiée !