La recherche didactique en algèbre : que nous apprennent les perspectives sémiotiques ?

Michèle Artigue

LDAR, Université Paris Diderot – Paris 7, USPC

Journées bisontines de didactique et d'épistémologie

Laboratoire de Mathématiques et École Supérieure du Professorat et de l'Éducation

4 et 5 mai 2017

Plan

- Premières approches et conceptualisations :
  - les discontinuités symboliques entre arithmétique et algèbre
  - Le double aspect procédural/structural des expressions algébriques
  - les interactions entre symbolisme algébrique et les autres registres de représentation mobilisés dans le travail algébrique
  - La dualité sens/dénotation
- Quelques évolutions cruciales :
  - l'intégration de nouvelles perspectives épistémologiques et sémiotiques
  - le développement du champ de l'Early Algebra
  - l'impact du développement technologique
- Des acquis de la recherche à l'action didactique

Les débuts de la recherche

Discontinuités symboliques entre arithmétique et algèbre

(Kuchemann 1981 ; Filloy & Rojano 1989 ; Drouhard 1992) et la synthèse (Bednarz, Kieran & Lee 2001)

- Le changement de statut des lettres .
- Le phénomène de « lack of closure » des expressions algébriques.
- Les implicites nouveaux du symbolisme algébrique.
- Le changement de statut de l’égalité, de signe indicateur d’action à signe d’équivalence .

Discontinuités symboliques

Dans le triangle ABC,
AB=3cm

$2x+1=5x-3$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$\frac{n(n+1)}{2}$

$f(x)=2x+1$

$y=ax+a$

$3a+b$

$3+\sqrt{2}$

$(x+3)(y+4)$

$a.b^2.a^3$

$3+ 2(x^2+3xy^2-(x+y))^2$

$-x+(x-y)^2$

$f(x+1)$

$(x+1)+(x+1)^2$

Des exemples emblématiques

- Le problème élèves-professeur :

Dans un établissement scolaire, il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs. On désigne par E le nombre d'élèves et P le nombre de professeurs. Exprimer la relation entre E et P.

La réponse symptomatique : $6E=P$

- L'obstacle didactique des fausses aides à la compréhension d'une l'algèbre « salade de fruits » : l'analogie des pommes et des bananes pour expliquer que :

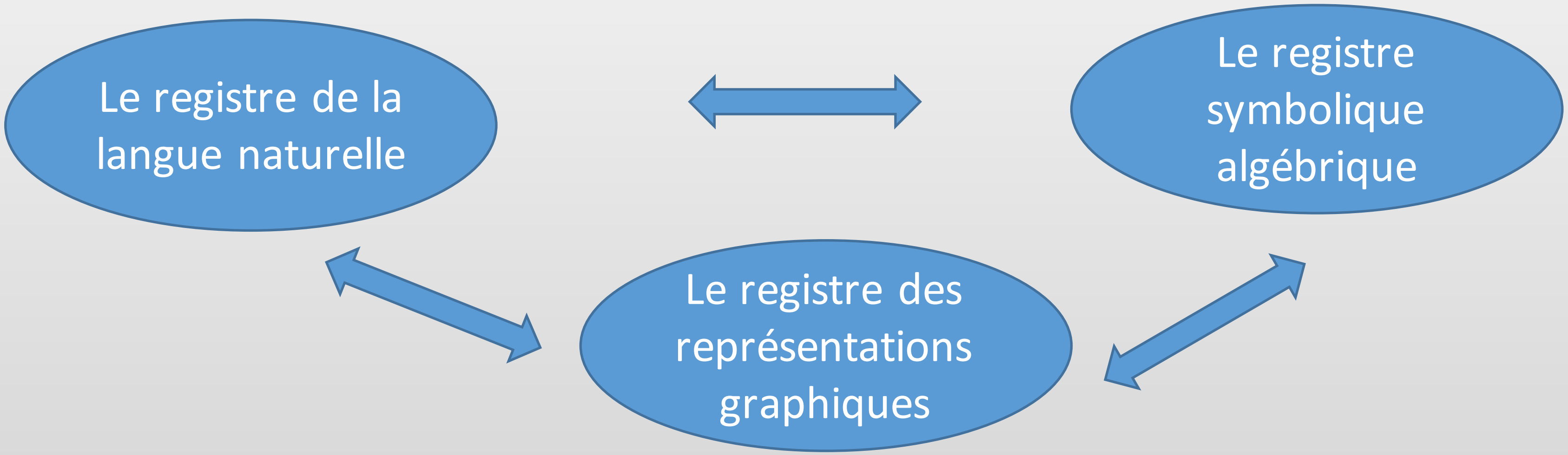
$2a+3b+4a+7b=6a+10b$ ou que $2a+b \neq 2ab$

Conceptions procédurale-opérationnelle / structurale des expressions algébriques (Sfard 1991 ; Sfard & Linchevski 1994)

2x+1

- Une conception procédurale des expressions algébriques nourrie par les pratiques de calcul arithmétique et la substitution numérique dans les formules ou programmes de calcul.
- Une conception limitée et qui ne permet notamment pas ni la substitution algébrique, ni l'identification de structures.
- Une hiérarchisation de ces conceptions qui évolue vers une vision dialectique de leurs rapports, portée notamment par la notion de procept (Gray & Tall 1994) et la distinction entre procept opérationnel et template process (3+2/2x+1).

Les interactions entre registres de représentation sémiotique (Duval 1995)



Trois croissants et deux chocolatines coûtent six euros
$3x+2y=6$

Il y a six fois plus d'élèves que que professeurs
$6P=E$ ou $E=6P$

La dualité sens-dénotation (Frege, 1971)

Signe

Dénotation Sens

$2(x+1)(x+2)$ $2x^2+6x+4$ $2(x^2+3x+2)$ $2(x+1.5)^2-0.5$

Avec des extensions et adaptations

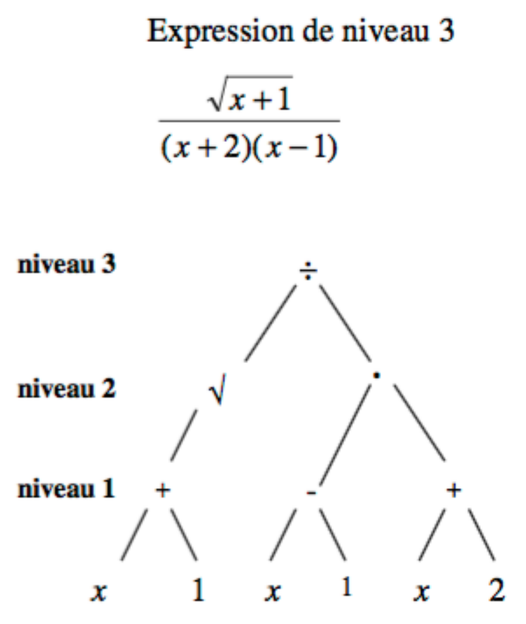
Interprétation et connotation (Drouhard 1992)
Sens algébrique/sens contextuel (Arzarello, Bazzini & Chiappini 2001)

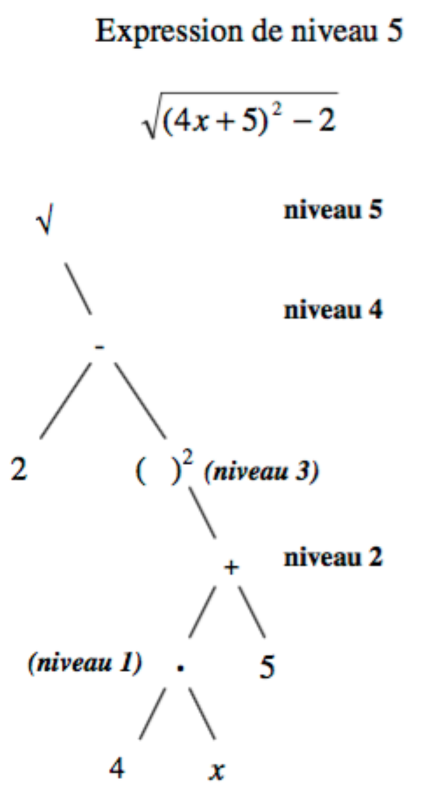
L’intégration de nouvelles perspectives épistémologiques et sémiotiques

Perspectives épistémologiques (Bardini 2003)

- L’intégration des six figures de la représentation symbolique de M. Serfati : représentation du requis, du donné, des instructions opératoires élémentaires (assembleurs), de l’enchevêtrement des instructions (délimitants), de la mise à égalité, des concepts composés.
- La distinction entre combinatoire (matérialité et syntaxe) et signification d’un signe (ex. le signe +)
- La distinction entre les positions de lecteur (ordination croissante des assembleurs) et d’auteur (ordination décroissante) (ex. $(x+2).3.5$)

Niveaux et complexité





Des convergences épistémologie-didactique

- La difficile distinction entre ‘part d’inconnu’ et ‘substance d’inconnu’.
- La priorité donnée par les élèves à l’interprétation opérationnelle des assembleurs (conception opérationnelle) par rapport à l’expression du résultat (conception structurelle), conforme à l’analyse épistémologique (la possibilité de délimitants matérialisant le résultat comme forme symbolique (ex. (a+3)) étant non exploitée).
- La résistance de la dissymétrie du signe d’égalité caractéristique de l’écriture rhétorique.

Mais aussi :

- Le constat que l’idée de « nombre donné de façon indéterminée » de Frege n’épuise pas les significations multiples des lettres que rencontrent les élèves et ne suffit pas à rendre compte des difficultés que cette diversité engendre.
- Un rapport différent à la puissance créatrice du calcul symbolique.

Exploitation didactique: dialectique auteur-lecteur

<u>Exercice T3 – Énoncé</u>

Inspire-toi de l'exemple fourni pour répondre aux questions suivantes

Exemple
La suite des instructions

- prendre un nombre x
- le multiplier par 2
- soustraire 5 au résultat
- prendre la racine carrée du résultat
- ajouter 3 au résultat

constitue un algorithme de calcul qui permet d'obtenir au final : $\sqrt{2x-5}+3$.

Écrire les phrases suivantes sous la forme d'un algorithme.

a) Le tiers de la somme des carrés de x et y

b) Le carré de la somme de 2 et de x

c) La racine carré du double de a

Exploitation didactique: dialectique auteur-lecteur

Exercice T5 - Énoncé

Pour les questions 1 à 3, associer, à chaque expression mathématique, la phrase qui la décrit. Si vous associez « autre », à une expression, préciser la phrase qui la décrit dans le rectangle prévu :

a et *b* représentent deux nombres non nuls.

Question 1

A= $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$:	n°1 :	L'inverse du carré de la somme de a et b
B= $\frac{1}{a^2+b^2}$:	n°2 :	La somme des inverses des carrés de a et b
C= $\frac{1}{(a+b)^2}$:	n°3 :	Le carré de la somme des inverses de a et b
	n°4 :	Autre(s) :

Question 2

Exploitation didactique : combinatoire symbolique et substitutions

Exercice S1 – Énoncé

Imaginez-vous dans un monde sans grandes puissances : où les carrés, les cubes, etc. n'existent pas. Un monde où toutes les puissances sont écrites en fonction de la seule puissance existante : celle du premier degré. En d'autres mots, c'est un monde où x existe, mais où x^2, x^3, x^4, etc. n'existent pas. Dans ce monde où x est la référence absolue, on n'a qu'une information : on sait que $x^2 = 2x$-2.

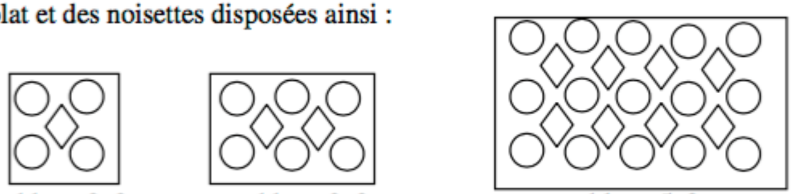
a) Dans ce monde, comment peut-on écrire x^3 ?

b) Complétez le tableau de multiplication suivant :

1	x	x^2	x^3
x			
x^2			
x^3			

Exploitation didactique : expression de ‘patterns’ géométriques

<u>Exercice n°2</u>
Une marque de chocolat propose des tablettes de différentes tailles, contenant toutes des pépites de chocolat et des noisettes disposées ainsi :



tablette 2x2 tablette 3x2 tablette 5x3

et ainsi de suite.....

<u>Légende</u> : Les cercles représentent les noisettes, les losanges les pépites.
*La 1ère tablette est notée **2x2** car il y a **2 noisettes** en longueur et **2 noisettes** en largeur.*
*La 2nde tablette est notée **3x2** car il y a **3 noisettes** en longueur et **2** en largeur ; et ainsi de suite…*

a) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans chacun de ces 3 exemples ?
Tablette 2x2 :.......... Tablette 3x2 :.......... Tablette 5x3 :...............
b) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans une tablette 11x9 ? ....

c) Et dans une tablette 20x17 ?............

d) Si on ne connaît que le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, peut-on calculer le nombre de pépites d’une tablette? Expliquer (au dos)

e) Existe-t-il des tablettes contenant 7 pépites de chocolat ? Si oui, lesquelles ?

Du collège à l'université (Bardini & Pierce 2015)

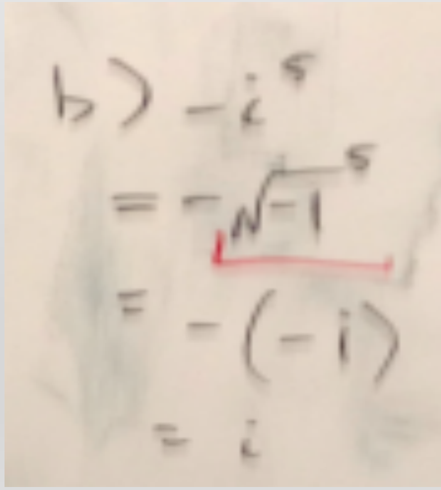
- L'hypothèse faite que l'accroissement de la charge symbolique du travail mathématique est une cause importante des difficultés de la transition lycée-université et du faible taux de survie des étudiants (moins de 17% en troisième année);
- Un classement des symboles en trois catégories (Serfati 2005) lettres, signes opératoires (+, =, $\sqrt{}$, $\int$), formes composées qui les combinent en des assemblages linéaires ou bidimensionnels.
- La charge symbolique est évaluée via deux caractéristiques : la densité symbolique et la familiarité symbolique, en prenant en compte les trois attributs des symboles que sont leur matérialité, syntaxe et sens.
- Des études menées et en cours qui semblent confirmer la pertinence de l'hypothèse faite et amènent à raffiner les outils conceptuels utilisés.

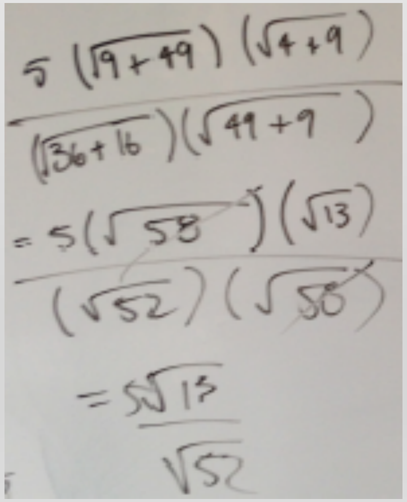
Des exemples de productions d'étudiants à un tutoriel sur les nombres complexes (Bardini, Pierce & Vincent 2015)

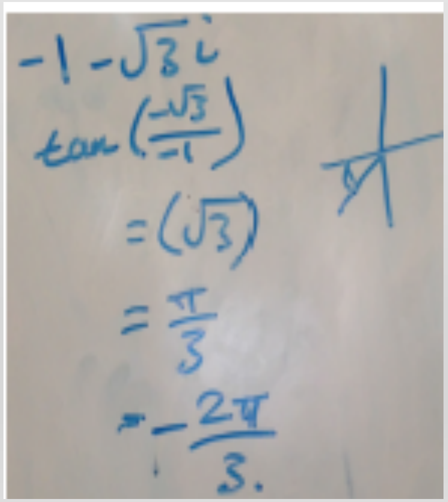
Calculer $-i^5$

Calculer le module de $\frac{-5i(3-7i)(2+3i)}{(6+4i)(7+3i)}$ sans le mettre sous forme cartésienne

Déterminer l'argument du nombre complexe $1-\sqrt{3}i$



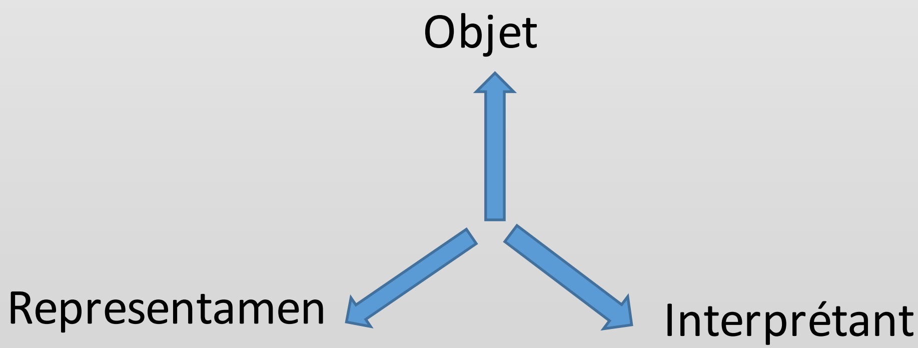




L’évolution des perspectives sémiotiques

(Arzarello & Robutti 2008)

- De la sémiotique de Frege à celle de Peirce : une vision triadique du signe incluant la subjectivité et l’accès à des processus de sémiose potentiellement infinis grâce à la notion d’interprétant



- Une distinction entre trois types de signes (icone, indice, symbole) suivant la nature de la relation entre le representamen et l’objet

L'importance accordée dans ces travaux

- A des genèses sémiotiques non limitées à celle du rapport aux registres de représentation institués, à l'émergence des signes dans l'activité des élèves et à leur élaboration progressive.
- A la multimodalité de l'activité sémiotique, d'où par exemple la notion de 'semiotic bundle', et l'importance particulière accordée aux gestes comme éléments de cette multimodalité.
- Au rôle crucial de l'enseignant pour soutenir les genèses sémiotiques via des techniques de médiation comme celle des 'jeux sémiotiques'.
- Pour les chercheurs, ceci nécessite des méthodologies spécifiques, permettant de capter les dynamiques sémiotiques dans leur multimodalité, à différentes échelles de temps du micro au macro.

Le développement de l’Early Algebra

A la base de l'Early Algebra

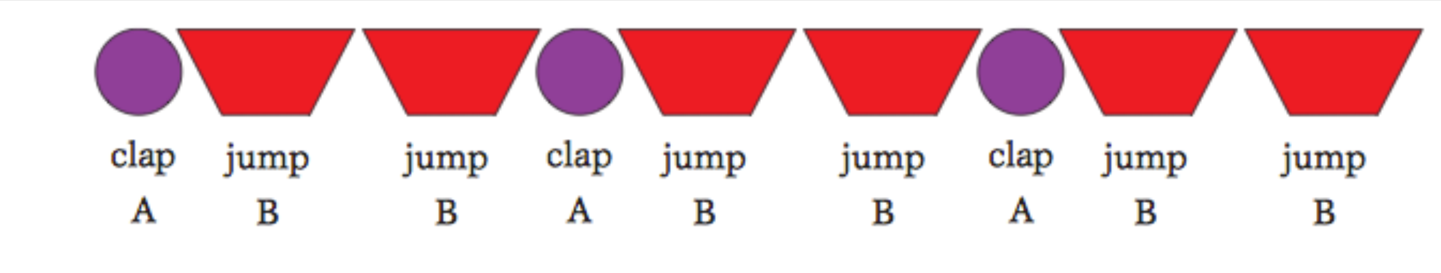
- L'hypothèse que la généralisation, l'identification de structures, de régularités, et leur représentation sous des formes sémiotiques appropriées mais pouvant aller jusqu'à des formes symboliques conventionnelles ne sont pas inaccessibles à de jeunes enfants.
- L'hypothèse que ceci peut aider la conceptualisation des nombres et des opérations.
- L'hypothèse que ceci peut éviter que les apprentissages numériques ne deviennent des obstacles aux apprentissages algébriques.

L’Early Algebra

- Trois stratégies principales :
  - raisonner sur des quantités physiques et des mesures en utilisant des lettres pour exprimer des relations d’égalité et d’inégalité, et exprimer des relations entre quantités connues et inconnues (Davydov, 1991)
  - **mettre l’accent sur l’expression symbolique de régularités et propriétés des opérations, identifier des structures, généraliser** (Carpenter et al., 2003), (Radford, 2011)
  - privilégier une approche fonctionnelle et les connexions entre représentations (Carraher et al., 2008).
- Une progression soigneusement organisée de l’utilisation de matériel et de représentations iconiques à des représentations symboliques, sans la pression du temps.
- Des résultats encourageants et un certain impact curriculaire.
- L’importance du rôle de l’enseignant et donc de sa formation.

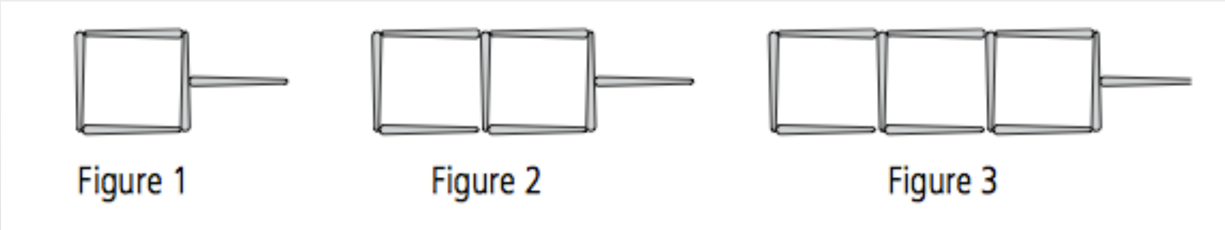
Reconnaître des structures, exprimer des régularités, généraliser

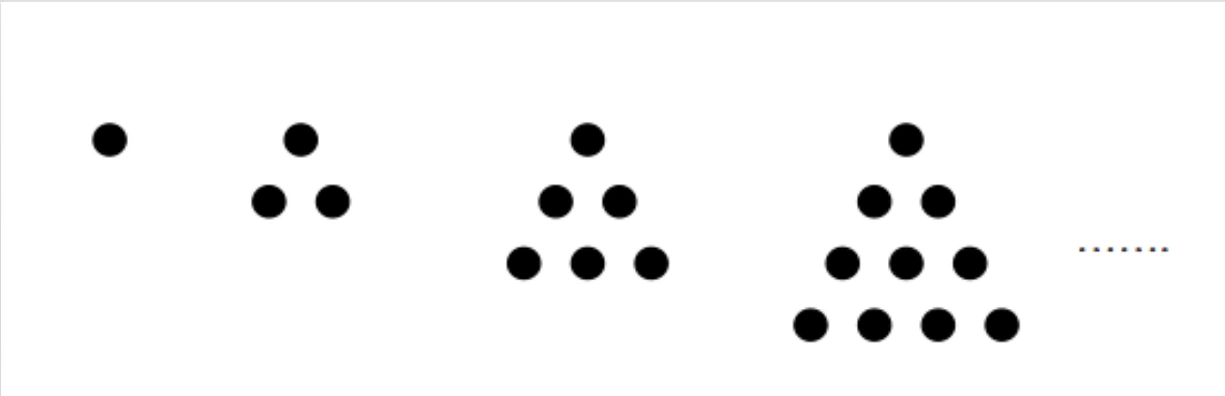
Un des thèmes centraux en mathématiques est l'étude de « patterns » et de relations. Cette étude requiert des élèves qu'ils reconnaissent, décrivent et généralisent des « patterns », et qu'ils construisent des modèles mathématiques pour simuler le comportement de phénomènes réels qui présentent des « patterns » observables.
(Ontario Ministry of Education, 2005, p. 9)



http://www.eworkshop.on.ca/edu/resources/guides/Patterning_and_Algebra_K-3.pdf
http://www.eworkshop.on.ca/edu/resources/guides/Guide_Patterning_and_Algebra_456.pdf

Reconnaître des structures, exprimer des régularités, généraliser





Reconnaître des structures, exprimer des régularités, généraliser

Number Property	**Generalized Expression**
Addition and subtraction are inverse operations (e.g., since 5 + 6 = 11, then 11 – 6 = 5).	If □ + ○ = ☆ , then ☆ – ○ = □
Multiplication and division are inverse operations (e.g., since 3 x 7 = 21, then 21 ÷ 7 = 3).	If □ x ○ = ☆ , then ☆ ÷ ○ = □
Adding 0 to or subtracting 0 from any number does not change the number's value (e.g., 6 + 0 = 6; 7 – 0 = 7).	□ + 0 = □ □ – 0 = □
Multiplying or dividing a number by 1 does not change the number's value (e.g., 8 x 1 = 8, 7 ÷ 1 = 7).	□ x 1 = □ □ ÷ 1 = □

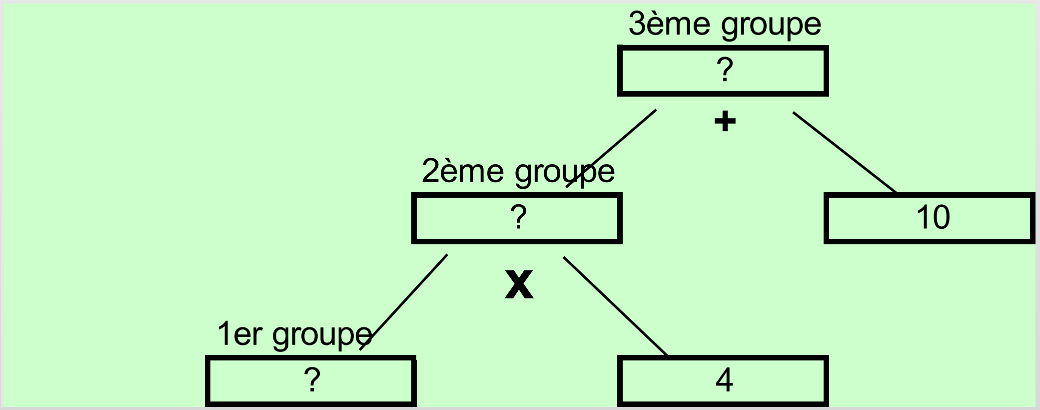
L’impact des technologies numériques

Les tableurs et l'entrée dans le monde algébrique

- Des travaux initiés dès les années 80 (Capponi, Sutherland, Rojano…),
- Le tableur y apparaît comme un outil qui permet d'assouplir la transition entre arithmétique et algèbre en faisant vivre un monde intermédiaire entre les deux :
  - algébrique par l'organisation de la feuille de calcul et l'utilisation d'un langage symbolique,
  - arithmétique par les stratégies de résolution.

Le problème classique des chocolats

3 groupes d'enfants se partagent 100 chocolats. Le deuxième groupe reçoit 4 fois le nombre de chocolats du premier. Le troisième groupe reçoit 10 chocolats de plus que le deuxième groupe. Combien de chocolats chacun des 3 groupes reçoit-il ?



Résolution algébrique : système d'équations ou équation

$Y=4X$

$Z=Y+10$ ou $X+4X+(4X+10)=100$

$X+Y+Z=100$

Résolution tableur

C4 =B4+10

	A	B	C	D
1	PROBLEME DES CHOCOLATS			
2				
3	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Total
4	5	20	30	55
5				

B4 =4*A4

	A	B	C	D
1	PROBLEME DES CHOCOLATS			
2				
3	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Total
4	5	20	30	55
5	6	24	34	64
6	7	28	38	73
7	8	32	42	82
8	9	36	46	91
9	10	40	50	100
10	11	44	54	109

Une organisation et symbolisation type système d'équations
B4=4*A4
C4=B4+10
D4=A4+B4+C4

Une résolution par essais-erreurs ou exploration systématique numérique

Un lien possible avec la dénotation fonctionnelle des expressions algébriques

Des proximités symboliques évidentes mais…

- La variable tableur est en fait un objet complexe dans laquelle se combinent une variable au sens mathématique, une adresse géographique, une case du tableau et un contenu numérique que Mariam Haspekian (2005) dénomme *variable-cellule*.
- A ceci s'ajoutent :
  - des *variables-ligne* (ou *colonne*), des *variables-nom*, dotées chacune de caractéristiques propres ;
  - la distinction entre *référence absolue ou relative* avec le symbole $ qui a été souvent rapprochée de la distinction entre variable et paramètre, mais sans coïncider non plus avec elle.
- De même, la fonctionnalité de recopie confère à la formule tableur des spécificités propres, conduisant à la notion *de formule-ligne* (ou *colonne*), dont la matérialité varie à chaque ligne (ou colonne).

Identifier des régularités, travailler la structure et l'équivalence d'expressions algébriques

B3 =A3+1

	A	B	C	D	E
1	Comparer deux programmes de calcul				
2	x	x+1	(x+1)^2	x^2+1	
3	1	2	4	2	
4	2	3	9	5	
5	3	4	16	10	
6	4	5	25	17	
7	5	6	36	26	
8	6	7	49	37	
9	7	8	64	50	
10	8	9	81	65	

P1 : je prends un nombre, je lui ajoute 1 et j'élève le résultat au carré

P2 : je prends un nombre, je l'élève au carré et j'ajoute 1 au résultat

Logiciels de calcul symbolique

- Des expressions symboliques plus proches de celles de l'algèbre papier-crayon, dans leur matérialité comme dans leur syntaxe.
- Mais cependant une transposition informatique conduisant à des phénomènes de pseudo-transparence et des transformations symboliques différentes des usages en papier-crayon (Artigue 1997).
- De fait, la recherche (cf. la synthèse de (Guin & Trouche 2002)) a montré qu'il y a là :
  - une réelle opportunité pour aider à distinguer entre règles mathématiques et conventions.
  - un milieu favorable aussi pour travailler l'équivalence d'expressions, tant d'un point de vue syntaxique que sémantique.
  - une ouverture à un champ plus riche de formes symboliques, pour l'identification de structures symboliques, soutenir la généralisation et la production de preuves algébriques.

Phénomènes de pseudo-transparence (Derive au collège)

- Afficher et simplifier des expressions : $\dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{9}}$ $\quad a+\dfrac{2}{5}-\left(\dfrac{a+2}{5}\right)$ $\quad 3+\dfrac{3}{3+\frac{3}{5}}$
- Une entrée en ligne et un affichage spatial globalement ‘conforme’ au papier crayon pour un lecteur averti mais des décalages :
  - la disparition de repères structuraux comme la longueur des traits de fractions
  - la gestion par le logiciel des couples de parenthèses ou crochets
  - des simplifications parfois surprenantes
- Mais des phénomènes qui, anticipés, deviennent sources de discussions fructueuses.

Une opportunité pour travailler l'équivalence d'expressions (Guin & Delgoulet 1997)

f(x)	g(x)	h(x)	k(x)
$\frac{1}{x}+\frac{3x-5}{x-7}$	$\frac{3x^2-4x-7}{x(x-7)}$	$\frac{2}{x}+2+\frac{16}{x-7}$	$\frac{(x+1)(3x-7)}{x(x-7)}$

A	B
$6+\frac{35}{4(x-3)}-\frac{7}{4(x+1)}$	$\frac{6x^2-5x-4}{(x-3)(x+1)}$
$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-2}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	$2+3\sqrt{3}-\sqrt{6}$
$\frac{2x^2-3x-2}{(x-4)(3x-1)}$	$\frac{(x-2)(2x+1)}{3x^2-13x+4}$

Avec la TI-Nspire, aujourd'hui

$\frac{1}{x}+\frac{3\cdot x-5}{x-7}$	$\frac{16}{x-7}+\frac{1}{x}+3$
$\text{factor}\left(\frac{1}{x}+\frac{3\cdot x-5}{x-7}\right)$	$\frac{(x+1)\cdot(3\cdot x-7)}{x\cdot(x-7)}$
$\text{expand}\left(\frac{1}{x}+\frac{3\cdot x-5}{x-7}\right)$	$\frac{16}{x-7}+\frac{1}{x}+3$
$\frac{1}{x}+\frac{3\cdot x-5}{x-7}=\frac{(x+1)\cdot(3\cdot x-7)}{x\cdot(x-7)}$	true
$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-2}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	$-(\sqrt{3}+2)\cdot(\sqrt{2}-1)+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}$
$\text{factor}\left(-(\sqrt{3}+2)\cdot(\sqrt{2}-1)+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\right)$	$-\left((\sqrt{3}+2)\cdot(\sqrt{2}-1)-2\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}\right)$
$\text{expand}\left(-(\sqrt{3}+2)\cdot(\sqrt{2}-1)+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{3}+(2-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}+2$
$6+\frac{35}{4\cdot(x-3)}+\frac{7}{4\cdot(x+1)}$	$\frac{7}{4\cdot(x+1)}+\frac{35}{4\cdot(x-3)}+6$
$\text{factor}\left(6+\frac{35}{4\cdot(x-3)}+\frac{7}{4\cdot(x+1)}\right)$	$\frac{12\cdot x^2-3\cdot x-29}{2\cdot(x-3)\cdot(x+1)}$

9/99

Avec GeoGebra, aujourd'hui

1

(1/x)+(3x-5)/(x-7)

$\rightarrow \frac{3x-5}{x-7} + \frac{1}{x}$

2

$1

Factoriser: $(x+1) \cdot \frac{3x-7}{x(x-7)}$

3

$2

Développer: $\frac{3x^2-4x-7}{x^2-7x}$

4

(1/x)+(3x-5)/(x-7)=((x+1)(3x-7))/(x(x-7))

Résoudre: $\{x = x\}$

5

(sqrt(2)-1)/(sqrt(3)-2)+2/(sqrt(3)-sqrt(2))

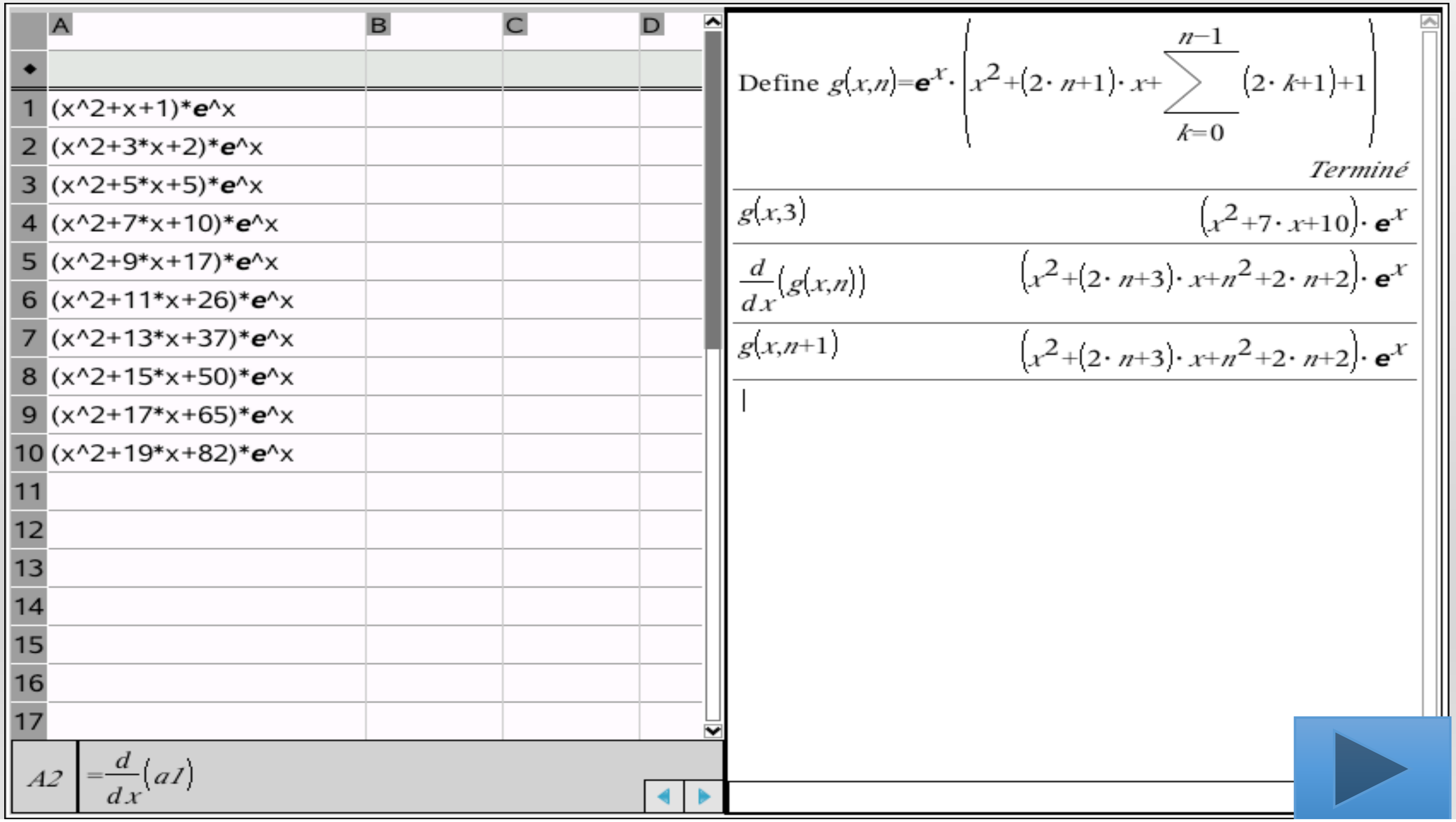
$\rightarrow \sqrt{3} \cdot 3 - \sqrt{6} + 2$

Découverte de structures symboliques, généralisation et preuve

Quelques exemples :

- L'étude des factorisations de X^n-1 en première (initiée par (Mounier & Aldon 1996) et retravaillée par divers auteurs).
- L'étude des dérivées successives du produit d'un polynôme par une exponentielle, en terminale (Trouche 1997).
- L'étude des expressions de la forme : $a + b\sqrt{2}$, somme, produit, quotient, et la généralisation à d'autres nombres premiers, en seconde (Projet EcoLab piloté par l'INRP).

La découverte de structures et l’assistance à la preuve



Les factorisations de X^n-1 (Mounier & Aldon 1996 ; Kieran & Drijvers 2006)

Factoring $X^n - 1$ (some examples of tasks)

1) First explorations with products : (x−1)(x+1), (x−1)(x^2 +x+1), (x−1)$\left(x^3+x^2+x+1\right)$

2) Factorization of $X^n - 1$ for n=1 to 6, using paper and pencil, using the Factor command. Calculation to reconcile the two forms if necessary.

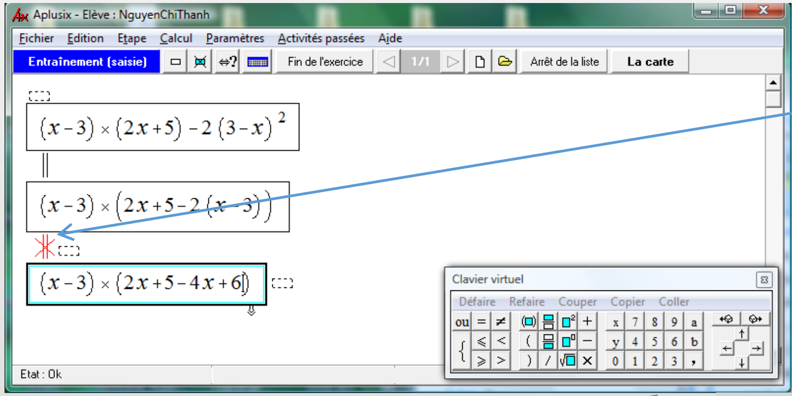
3) Conjecture, in general, for what numbers n will the factorization of $X^n - 1$:

- contain exactly two factors?
- includes (x+1) as a factor?

$\text{factor}\left(x^2-1\right)$	$(x-1)\cdot(x+1)$
$\text{factor}\left(x^3-1\right)$	$(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$
$\text{factor}\left(x^4-1\right)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)$
$\text{factor}\left(x^5-1\right)$	$(x-1)\cdot\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$
$\text{factor}\left(x^6-1\right)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)$
$\text{factor}\left(x^7-1\right)$	$(x-1)\cdot\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$
$\text{factor}\left(x^8-1\right)$	$(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^4+1\right)$
$\text{factor}\left(x^9-1\right)$	$(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^6+x^3+1\right)$

Un logiciel centré sur l’équivalence : Aplusix

Aplusix (http://www.aplusix.com)

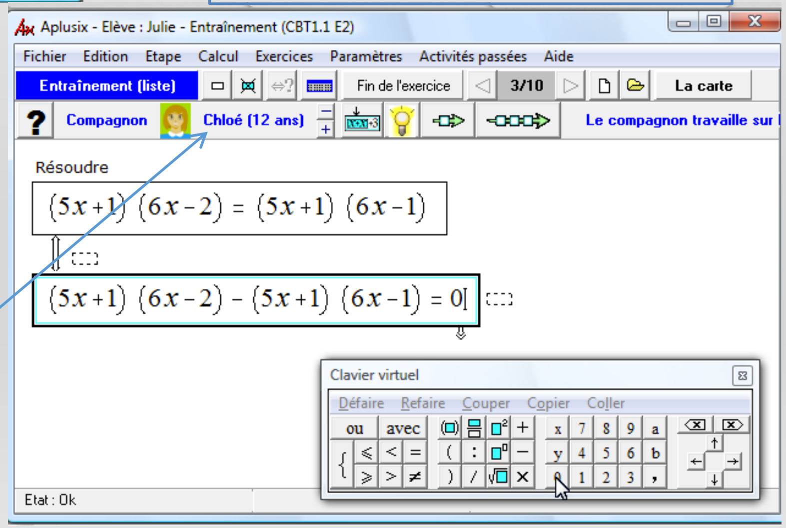


Contrôle de l'équivalence

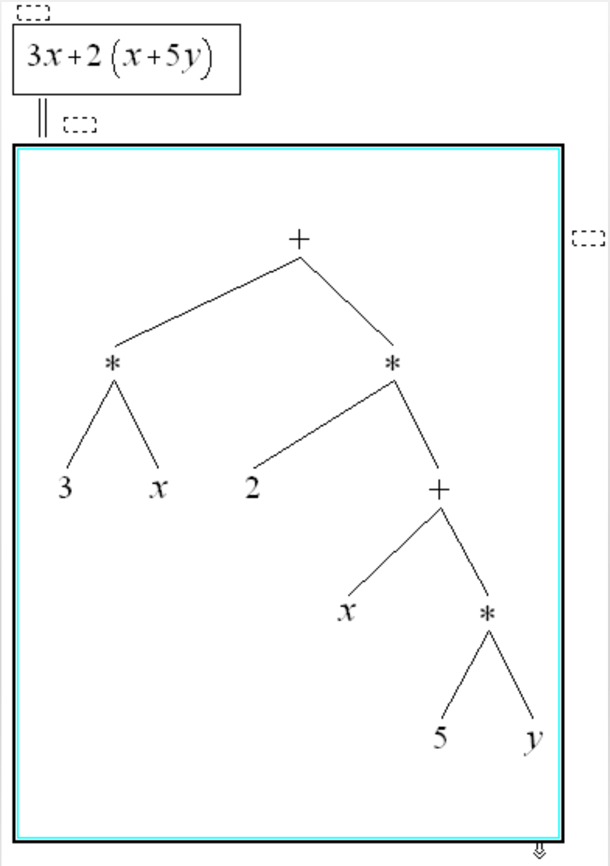
Différents modes : entraînement, test, auto-correction

Ecriture spatiale, duplication, déplacement de blocs sélectionnés

Compagnonnage



Aplusix : la représentation en arbre des expressions



La connexion entre registres : expressions algébriques et arbres

L'articulation entre vision procédurale et vision structurale

De nouvelles tâches

L’évolution vers une algèbre dynamique : EpsilonWriter

L'évolution vers une algèbre dynamique : EpsilonWriter

Les gestes de l'algèbre dynamique

- le glisser-déposer par équivalence,
- le d'autres glisser déposer
- le calcul par clic

Exemple détaillé de glisser-déposer par équivalence

Partant de $2x=5$ on sélectionne 2 et on fait glisser devant 5, on a :

$\boxed{2}x=\boxed{5}$

$x=\frac{5}{2}$ Division des deux membres par 2

on voit ce que l'on obtiendra si l'on relâche le bouton de la souris ici.

Si on relâche le bouton, on obtient l'explication et le résultat :

$2x=5 \rightsquigarrow x=\frac{5}{2}$	Division des deux membres par 2

$x=\frac{5}{2}$

Exemples de glisser-déposer par équivalence

On fait glisser $3x^2$ sur $4x^2$:

$3x^2+2x+4x^2 \rightsquigarrow 2x+7x^2$

On fait glisser le premier x dans la parenthèse :

$x\left(x^2-2x-1\right) \rightsquigarrow x^3-2x^2-x$

On fait glisser le premier a^2 légèrement à gauche :

$a^2+ab+b^2 \rightsquigarrow a^2\left(1+\frac{ab}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$

Autre glisser-déposer : substitution

On fait glisser $\begin{cases} x=a+2 \\ y=2a-1 \end{cases}$ sur $\frac{2x+y}{x-y}$ on obtient :

$\frac{2(a+2)+2a-1}{a+2-(2a-1)}$

Autre glisser-déposer : addition/soustraction d'équations

On fait glisser $2x+3y=z-3$ sur $5x-y=z+2$ on obtient, au choix : $7x+2y=2z-1$ ou $3x-4y=5$ le choix se fait dans un menu popup

L'évolution vers une algèbre dynamique : EpsilonWriter

L'algèbre dynamique pédagogique

On appelle ainsi une limitation de l'algèbre dynamique à certains gestes basiques, avec indications de certains gestes refusés.

Quand l'option algèbre dynamique pédagogique est active, avec $\frac{2+6}{5}$ si l'on essaie de faire glisser 2 devant la fraction, l'action est refusée avec le message : Pas de sortie additive basique du numérateur.

Quand l'option est active, cela est accepté avec le résultat $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}$ et l'explication : Mise sous forme d'une somme de deux fractions.

L'idée est qu'il n'y a pas d'action simple permettant de faire sortir 2 du numérateur en obtenant une expression équivalente, mais qu'il y a une action complexe qui est la somme de deux fractions.

Voir une démonstration d'algèbre dynamique pédagogique

L'algèbre dynamique pour le professeur : faire des maths du 21ème siècle sur tableau blanc interactif

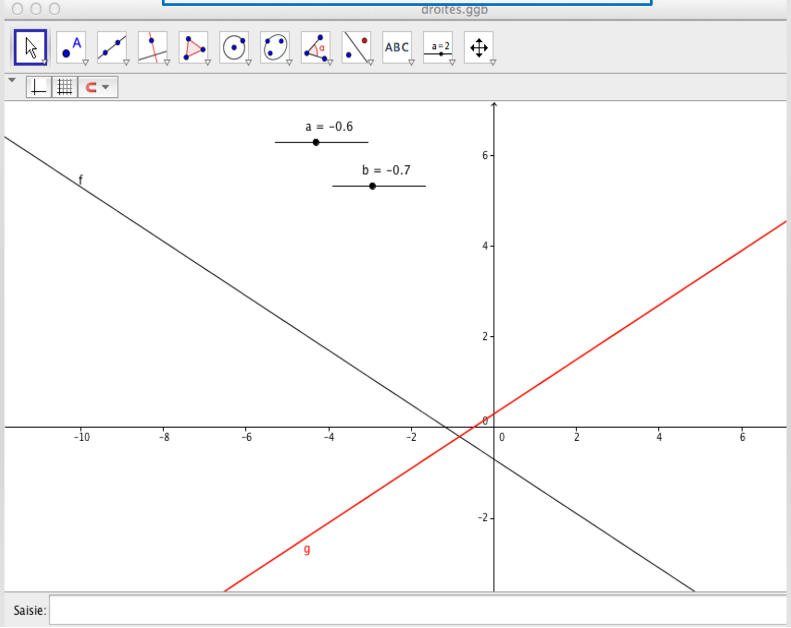
Faites certains de vos calculs sur TBI avec epsilonwriter, faites en faire à vos élèves.

L'algèbre dynamique pour le professeur : rédiger des corrigés, rédiger des documents

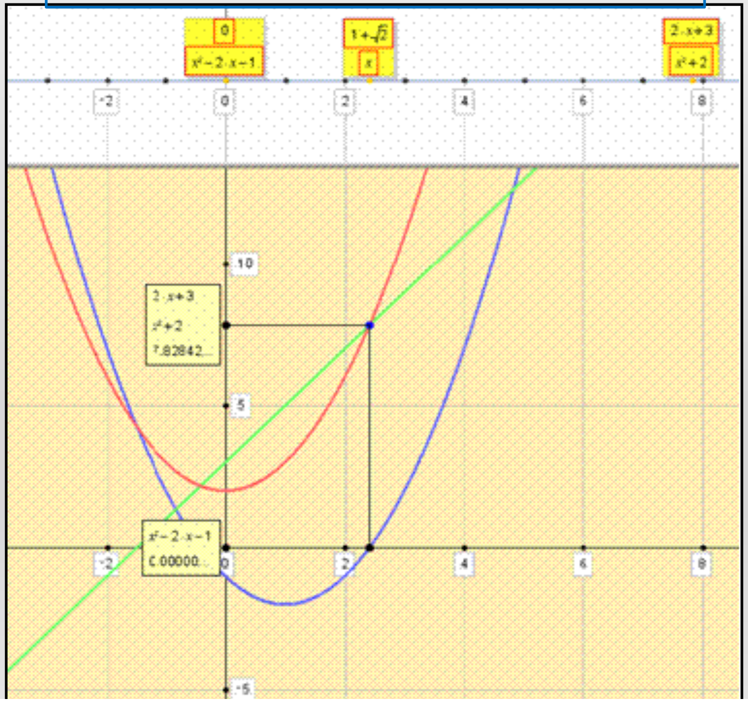
Utilisez l'algèbre dynamique pour rédiger des corrigés. Vous pouvez supprimez des lignes, supprimer certaines explications, en modifier d'autres. Vous aurez bientôt la possibilité de modifier les textes qu'epsilonwriter utilise pour ses explications et ses descriptions.

Des connexions dynamiques entre représentations, des outils nouveaux

GeoGebra : des curseurs ‘paramètres’



Le logiciel Alnuset : une droite algébrique www.alnuset.com/fr



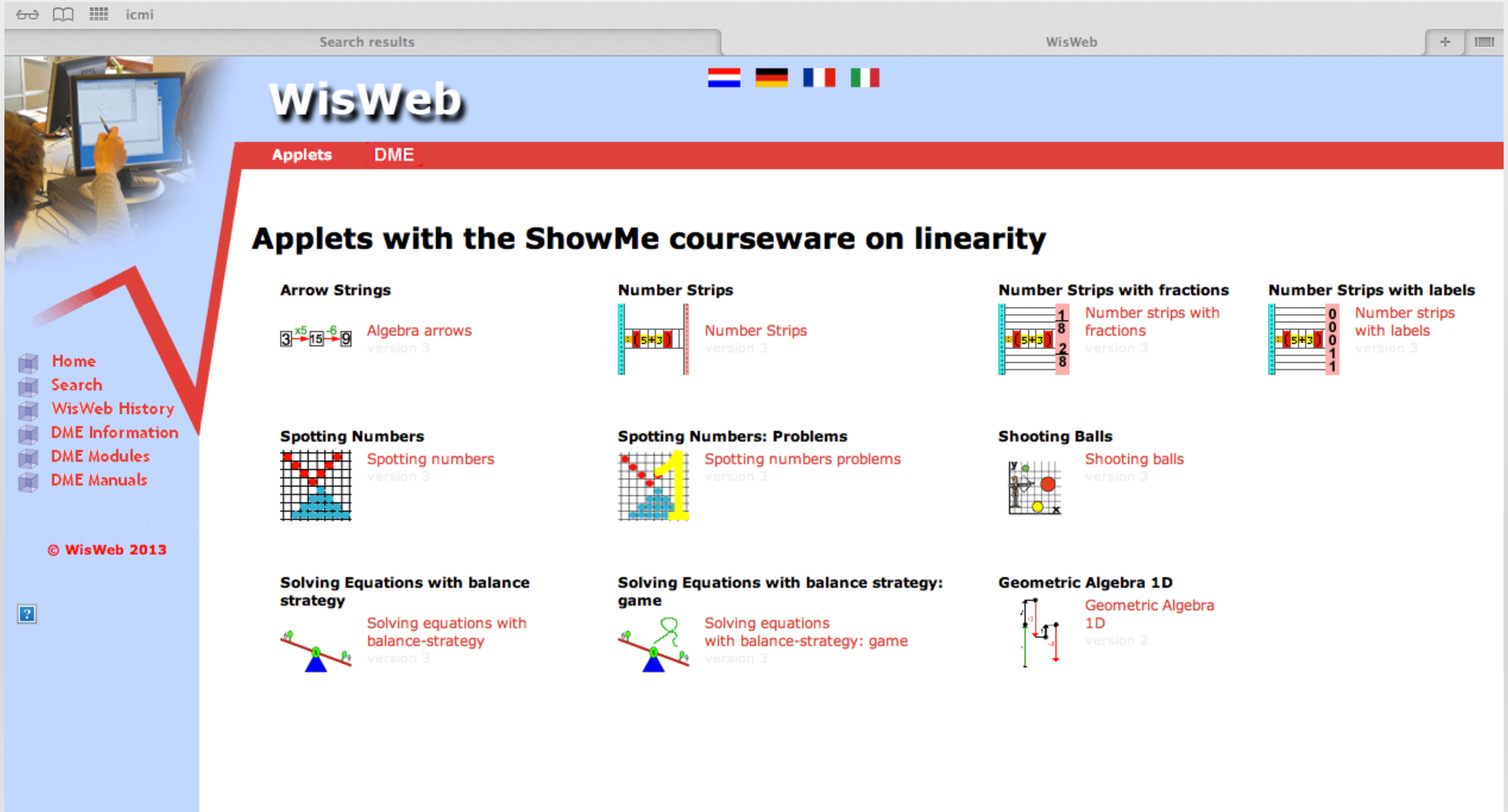
De la recherche à l’action

De la recherche à l’action

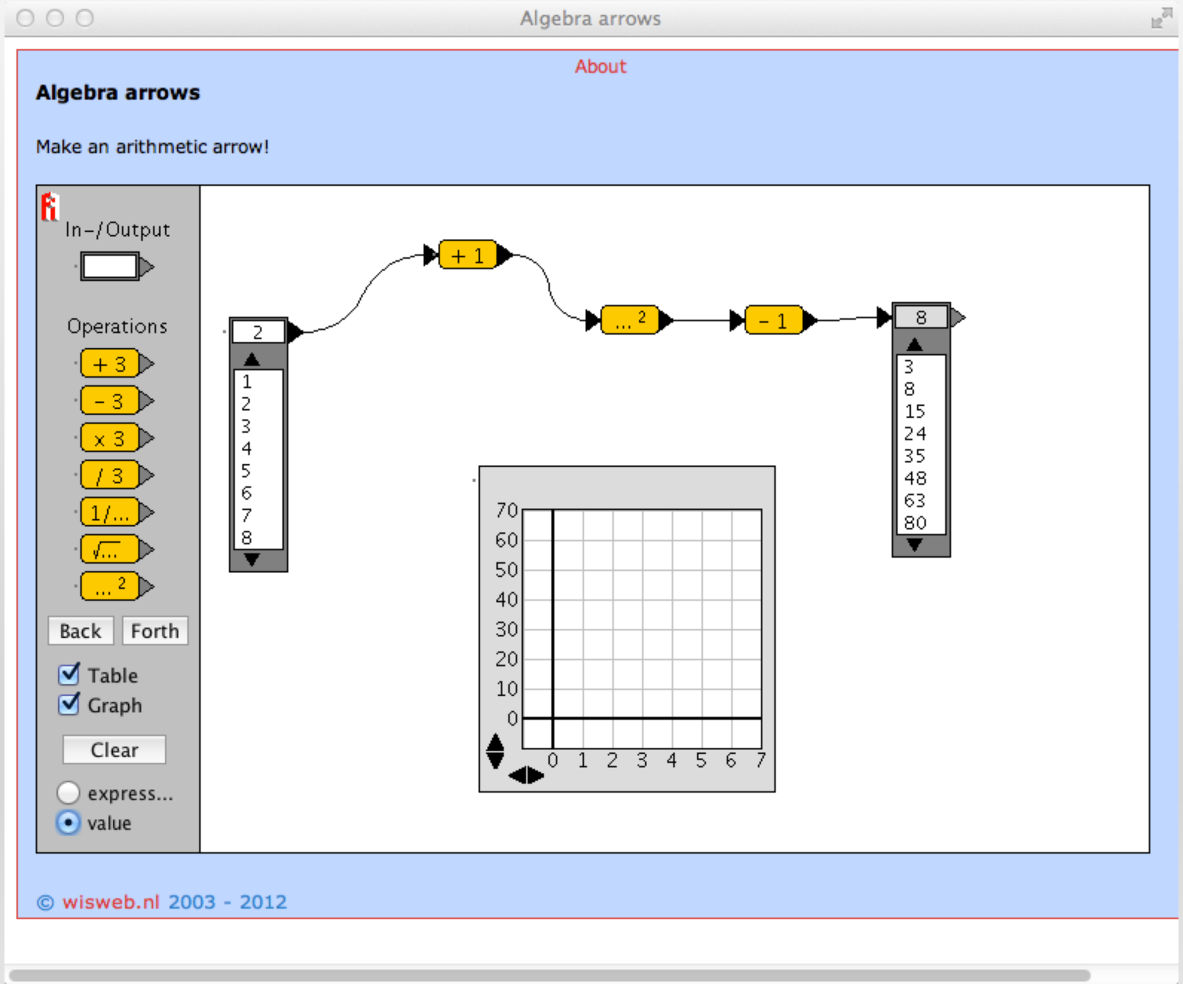
- Des acquis de la recherche et des points réels de consensus qui devraient permettre de rompre avec la ‘fatalité algébrique’ si incrustée dans nos sociétés et l’inconscient collectif, mais aussi une diversité d’approches et de constructions didactiques, en partie incommensurables.
- Des travaux et des réalisations qui aujourd’hui couvrent tous les niveaux de la scolarité, de la maternelle à l’université, jusqu’au master, l’enseignement comme la formation des enseignants.
- Le développement croissant de ressources accessibles en ligne.


PEGAME
pour les Professeurs et leurs Elèves un Guide pour l'Apprentissage des Mathématiques et leur Enseignement
icar
vendredi 05 mai 2017
Ce site est consacré à l'enseignement de l'algèbre au collège et en classe de seconde.
Les documents proposés sur ce site sont le fruit de plusieurs travaux de recherche
dirigés par Sylvie COPPE Maitresse de conférences IUFM, Université LYON 1,
auxquels participent des enseignants de collège et lycée.
Cette rubrique contient les séquences d'enseignement, conformes aux programmes officiels en vigueur.
Chaque séquence d'enseignement est structurée en parties, puis en activités rédigées pour être proposées en l'état aux élèves.
Des commentaires pour les professeurs sont associés à chacune des activités : but de l'activité, informations pratiques, commentaires sur le savoir, informations sur le comportement des élèves (dont vidéos d'élèves) et corrigé des activités.
Enseigner
Se former
Site optimisé pour fonctionner avec Mozilla Firefox.
ifé
ENS DE LYON
recherche sur les titres...
liens
partenaires
contact
Notice légale – Administration

Les applets de l'Institut Freudenthal
http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

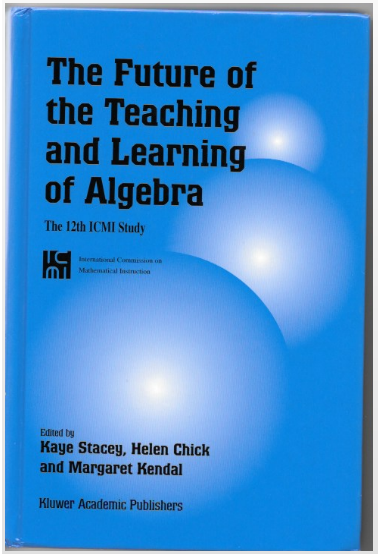


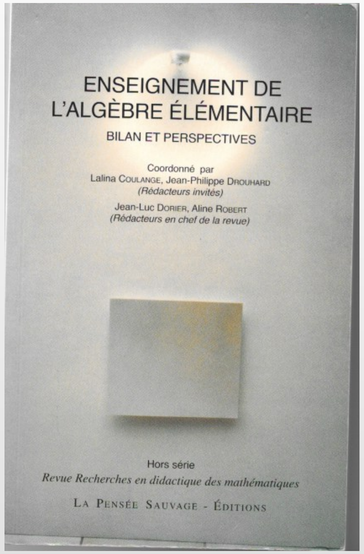
Un exemple d'applet

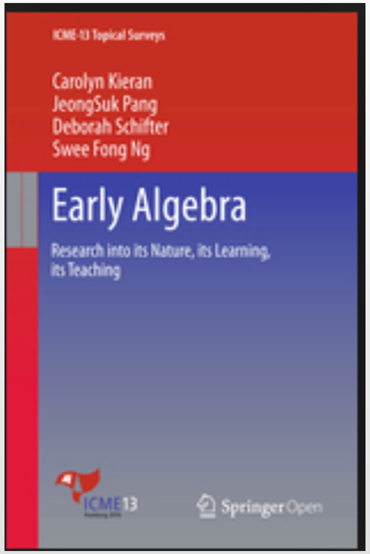


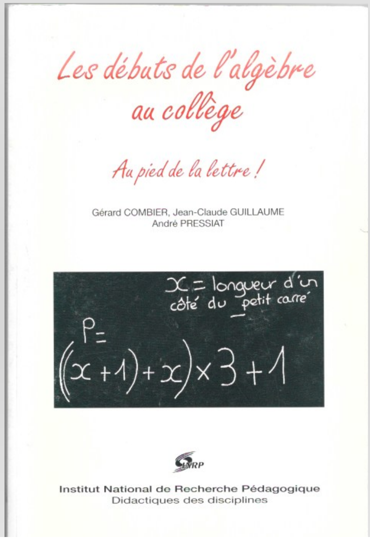
De la recherche à l’action

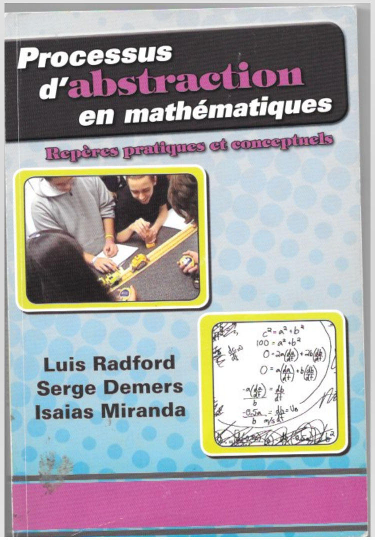
- Le développement d’outils de diagnostic, de régulation et de différenciation, comme ceux développés successivement dans le cadre des projets Pépite, Lingot, PepiMeP et NéoPræval dans mon laboratoire en collaboration avec des chercheurs en EIAH (http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval.
- Un effort de développement d’une littérature d’interface entre recherche, enseignement et formation des enseignants (cf. par exemple (Combier et al. 1996), (Radford et al. 2009), (Arcavi et al. 2017)).

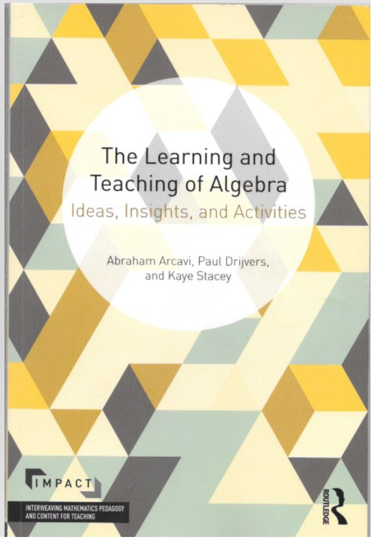

The Future of the Teaching and Learning of Algebra
The 12th ICMI Study
Edited by
Kaye Stacey, Helen Chick and Margaret Kendal
Kluwer Academic Publishers


ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE
BILAN ET PERSPECTIVES
Coordonné par
Lalina Coulange, Jean-Philippe Drouhard
(Rédacteurs invités)
Jean-Luc Dorier, Aline Robert
(Rédacteurs en chef de la revue)
Hors série
Revue Recherches en didactique des mathématiques
La Pensée Sauvage - Éditions


ICME-13 Topical Surveys
Carolyn Kieran
JeongSuk Pang
Deborah Schifter
Swee Fong Ng
Early Algebra
Research into its Nature, its Learning, its Teaching
ICME13
Springer Open


Les débuts de l'algèbre au collège
Au pied de la lettre !
Gérard COMBIER, Jean-Claude GUILLAUME
André PRESSIAT
x = longueur d'un côté du petit carré
P =
((x+1)+x)×3+1
INRP
Institut National de Recherche Pédagogique
Didactiques des disciplines


Processus d'abstraction en mathématiques
Repères pratiques et conceptuels
Luis Radford
Serge Demers
Isaias Miranda


The Learning and Teaching of Algebra
Ideas, Insights, and Activities
Abraham Arcavi, Paul Drijvers, and Kaye Stacey
IMPACT
INTERWEAVING MATHEMATICS PEDAGOGY AND CONTENT FOR TEACHING
ROUTLEDGE

Et pour conclure …

Un exposé qui ne donne qu’une image très partielle de ce qu’offre la recherche didactique pour comprendre l’enseignement et l’apprentissage de l’algèbre et l’améliorer, même si l’on se limite à regarder cette recherche à travers le prisme symbolique et sémiotique, et des ressources développées pour mettre cette recherche au service de l’enseignement et de la formation des enseignants.

Mais un exposé qui, je l’espère, vous aura donné envie d’aller plus loin dans ce voyage sémiotico-didactique autour du symbolisme algébrique…

Merci pour votre attention !

Références

- Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra*. Ideas, Insights, and Activities. New York : Routledge.
- Artigue M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage, *Educational Studies in Mathematics,* n°33, 133-169.
- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. In R. Sutherland et al. (Eds.), *Perspectives on School Algebra*, 61-81. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique. Une approche épistémologique et didactique*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.
- Bardini, C, & Pierce, R. (2015). Assumed Mathematics Knowledge: The Challenge of Symbols. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education,* 23(1), 1-9.
- Bardini, C., Pierce, R., & Vincent, J. (2015). Contemplating symbolic literacy of first year mathematics students. In M. Marshman, V. Geiger, & A. Bennison (Eds.), *Mathematics education in the margins (Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia),* (pp. 77–84) . Sunshine Coast: MERGA.

Références

- Bednarz, N., Kieran, C, & Lee, L. (Eds.)(2001). *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*, 115-136.Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Combier, G., Guillaume J.C., & Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre* !. Paris : INRP.
- Coulange, L., Drouhard, J.P., Dorier, J.L., & Robert, A. (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. Recherche en Didactique des Mathématiques (hors série). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Drouhard, J.P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.
- Drouhard, J.P., & Teppo, A. (2004). Symbols and language. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*, (pp. 227-264). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations, the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9* (2), pp. 19-25.

Références

- Frege, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. (traduction de C. Imbert). Paris : Seuil
- Gray E. and Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A “proceptual” View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* 25(2), 116-140. Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics,* 12(3), 317-326.
- Guin, D., & Delgoulet, J. (1997). *Etude des modes d’appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de seconde.* Montpellier : IREM de Montpellier.
- Guin, D., & Trouche, L. (Eds.) (2002)., *L’instrumentation de calculatrices symboliques : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Haspekian, M. (2005). *Intégration d’outils informatiques dans l’enseignement des mathématiques : le cas des tableurs.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.
- Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The Co-Emergence of Machine Techniques, Paper-and-Pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of Cas use in Secondary School Algebra. *The International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 11(2), 205-263.
- Kuchemann, D. (1981). Children’s understanding of mathematics : 11-16. In K. Hart (Ed.), *Algebra*, (pp. 102-119). Londres.
- Mounier, J., & Aldon, G. (1996). A problem story: Factorisations of x^n-1. *International DERIVE Journal*, 3, 51-61.

Références

- Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en algebra. una perspectiva postvigotskiana. *Educacion Matematica*, 11(3), 25-53.
- Radford, L., Demers, S., & Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques. Repères pratiques et conceptuels.* www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/abstraction.pdf
- Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Paris : Editions Pétra.
- Sfard, A. (1991). On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra. *Educational Studies in Mat*hematics 26(2-3), 191-228.
- Stacey, K. and MacGregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.). *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.4), 190-197. Lahti, Finland.
- Stacey, K., Chick, H., & Kendal , M. (Eds.) (2004). *The Future of Teaching and Llearning of Algebra - 12th ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Trouche, L. (1997). *Calculatrices « Symboliques ». Un défi mathématique*. CRDP Languedoc-Roussillon.