Le symbolisme en algèbre abstraite : épistémologie et didactique du structuralisme algébrique

Thomas Hausberger

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, CNRS, Univ. Montpellier

4-5 mai 2017
Cinquièmes journées bisontines de didactique et épistémologie des mathématiques - le symbolisme et l'enseignement de l'algèbre

Insertion dans la thématique des cinquièmes journées

Didactique

Etudier, sur des exemples, la question de l'enseignement de l'algèbre à différents niveaux de la scolarité

- Algèbre (classique, du secondaire) $\rightsquigarrow$ algèbre abstraite (moderne, à l'université)
- Précisément : enseignement-apprentissage des structures algébriques (groupe, anneau, corps, etc.)
- "entrée dans l'algèbre" (la lettre) $\rightsquigarrow$ entrée dans la "pensée structuraliste" (les structures)
- Position dans le curriculum : transition entre la licence et le master de mathématiques (pures)

Insertion dans la thématique des cinquièmes journées (suite)

Epistémologie

Il apparaît que loin d'une construction purement formelle, l'invention du symbolisme doive être considérée comme indissociable de la construction d'une méthode intégrant la dimension sémiotique au sein de la pensée mathématique.

- Quelle médiation sémiotique des structures en relation avec les objets auxquels elles renvoient ?
- La méthode axiomatique dans son usage structuraliste
- Les mathématiques contemporaines : formalisées mais non formelles ? Déficit sémantique ?
- Rôle de la dimension sémiotique dans la dialectique entre concret et abstrait, forme et contenu, objets et structures

Plan

1. Structuralisme et méthode axiomatique
   - Epistémologie historique : Hilbert, Noether et Bourbaki
   - Epistémologie expérimentale : un forum en ligne
2. Le problème de l'accès à la pensée structuraliste
   - Le problème
   - Des questions de recherche
3. L'ingénierie des banquets
   - Aspects mathématiques
   - Aspects didactiques
4. La dialectique objets-structures : un cadre sémio-cognitif
   - Cavaillès
   - Freudenthal
   - Théories des modèles et sémiotique
   - Duval
5. Quelques résultats et phénomènes didactiques identifiés
   - Conclusion

Références

Structures et relations entre objets

Peu à peu se dégage une idée générale qui se précisera au XXème siècle, celle de **structure** à la base d'une théorie mathématique ; elle est la conséquence de la constatation que ce qui joue le rôle primordial dans une théorie, ce sont les **relations** entre les objets mathématiques qui y figurent, plutôt que la nature de ces objets, et que dans deux théories très différentes, il se peut que des relations s'expriment de la même manière dans les deux théories ; le système de ces relations et de leurs conséquences est une même structure « sous-jacente » aux deux théories (Dieudonné, 1987, p. 114).

Exemple : la géométrie de Hilbert

- 3 "systèmes de choses" : points (A, B, C, etc.), droites (a, b ; c, etc.) et plans (α, β, γ, etc.)
- des relations : "être sur", "entre", "congruent"
- "La description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie" (Hilbert)
- Le système d'axiome exprime la "logique des relations"
- Axiomatique formelle : abstraction de la nature des objets et de la sémantique des relations
- Symbolisation incomplète des relations

Les structures, un point de vue formalisateur, unificateur et fondateur

- Une **méthodologie** et un style spécifique, qui font école à Göttingen autour de Noether dans les années 1920
- Privilégier les preuves **générales** limitant les calculs et mettant en avant les **concepts** (structures)
- Définir des concepts pour objectif de **reconstruire un domaine** sur une nouvelle base

  > Il faut s'appliquer à réduire un domaine mathématique à ses concepts fondamentaux les plus généraux, donc les plus simples, puis à construire et à reconstruire à l'aide de ces seuls concepts (Hasse, 1930, pp. 26-27)

- Ne plus penser en termes d'opérations sur des éléments mais en termes de **sous-ensembles distingués** et d'**homomorphismes**
- Un second niveau d'**unification** : une même méthodologie pour les différentes structures (groupes, anneaux, etc.)

Les structures, un point de vue généralisateur-simplificateur qui sert d'heuristique

Son trait le plus saillant [de la méthode] est de réaliser une **économie de pensée** considérable. Les structures sont des **outils** pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiomes d'une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type, là où, auparavant, il devait péniblement se forger lui-même des moyens d'attaque dont la puissance dépendait de son talent personnel, et qui s'encombraient souvent d'hypothèses inutilement restrictives, provenant des particularités du problème étudié (Bourbaki, 1948, reed. 1997).

Un fil de discussion sur les nombres décimaux

La question de Mic

Mic : deux assertions et deux questions

- A_1 ($\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$).
- A_2 (Tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est principal).
- Q_1 (Comment le démontrer ?)
- Q_2 (Comment définit-on le pgcd de deux décimaux ?)

$A_2 = A_0^g$ où A_0 : $\mathbb{D}$ est principal

Le fil de discussion

Analyse en termes de questions-réponses

- *bs* : Q_1^g (*Tout sous-anneau d'un anneau principal est-il principal ?*)
- *barbu rasé* : Q_1^{gg} (*Toute propriété remarquable des anneaux (euclidien, principal, factoriel, noethérien, de Bezout) est stable par sous-anneau ?*). Classe de contre-exemples utilisant le plongement d'une anneau intègre dans un corps.
- *Toto le zéro* : A_3 ($\mathbb{Z}[X]$ *n'est pas principal*), contre-exemple à Q_1^g.
- *Olivier G* : A_4 (*L'idéal* $(2, X)$ *de* $\mathbb{Z}[X]$ *n'est pas principal*).
- Pluralité de preuves de A_3 mobilisant de façon plus ou moins importante l'outillage structuraliste.

Deux dialectiques épistémiques saillantes

Dialectique **particulier-général**

La reformulation du problème avec un niveau de généralité supérieur (**passage de** A **à** A^g) : une démarche qui reflète les **démarches expertes** en algèbre abstraite.

Dialectique **objets-structures**

- Les structures axiomatiques : un **point de vue conceptuel généralisateur-simplificateur** pour démontrer des propriétés sur les objets.
- Réciproquement, un **contrôle sémantique** sur les énoncés axiomatiques : mise à l'épreuve des exemples connus, donc des objets.

Pour approfondir l'étude du fil de discussion : (Hausberger, 2016a)

Une rupture dans les apprentissages

- Un constat d'importantes difficultés relayé au niveau international :

  > The teaching of abstract algebra is a disaster, and this remains true almost independently of the quality of the lectures (Leron & Dubinsky, 1995, p. 1).

- Présence d'un obstacle épistémologique ? Le "défi de la pensée structuraliste" (Hausberger, 2012).
- La notion de structure : un **meta-concept**, qui n'est pas défini mathématiquement

  > As a consequence, students are supposed to learn by themselves and by the examples what is meant by a structure whereas sentences like "a homomorphism is a structure-preserving function" is supposed to help them make sense of a homomorphism (Hausberger, 2013).

Patras et la critique hüsserlienne

> Faire la part de modernisme dans le **style d'exposition** et de retour au système d'intuitions originales qui sous-tendent une théorie est sans nul doute l'une des difficultés majeures auxquelles est confrontée la **pédagogie mathématique** aujourd'hui, car la science est condamnée à être stérile si elle cesse de prendre appui sur une **intuition pleine et vivante de ses contenus**. C'est la conscience de cette stérilité qui gouverne les **réactions de rejet de l'enseignement mathématique** comme un **bloc d'abstractions gratuites** et dépourvues de significations tangibles (Patras, 2001, p. 27-28).

- Une **crise du sens** provoquée par un "appauvrissement techniciste" de la pensée mathématique
- "**L'illusion d'une autonomie du discours mathématique**" (Patras, 2001, p.2-3).

Des premières questions à raffiner

- Comment enseigner les techniques structuralistes en mettant en avant l'heuristique ?
- Quelles situations proposer engageant des objets ?
- Comment prendre appui sur l'origine phénoménologique des concepts structuralistes ?

Apports de la Théorie des Situations Didactique (Brousseau, 1986)

- Penser l'apprentissage de la pensée structuraliste en termes de **situations** (en relation avec des démarches structuralistes), malgré le problème de construction de situations fondamentales dans le cas des concepts FUGS.
- En relation avec la **méthodologie de l'ingénierie didactique**.
- Construire les situations dans l'esprit de la **phénoménologie didactique** de Freudenthal.

Questions de recherche que le cadre de la TSD permet d'étudier

- Est-il possible de construire une situation fondamentale ou un ensemble de situations pour l'entrée dans la pensée structuraliste ?
- Si oui, comment organiser le milieu ?
- Comment prendre en compte le fait que la notion de structure est un meta-concept ?

Autres questions didactiques, d'inspiration psycho-cognitives

- Comment les aspects épistémologiques, sémiotiques et cognitifs s'articulent-ils dans le déploiement de la pensée structuraliste ?
- Comment analyser le travail de conceptualisation d'une structure algébrique abstraite et le favoriser ?
- Pour y répondre : nécessité d'un cadre théorique sémio-cognitif adapté à la pensée structuraliste

Définition axiomatique de la structure de banquet

Un **banquet** est la donnée d'un ensemble E muni d'une **relation binaire** $\mathcal{R}$ tel que les axiomes suivants sont satisfaits :

(i) aucun élément ne vérifie $x\mathcal{R}x$;

(ii) si $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}z$ alors $y = z$;

(iii) si $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}x$ alors $y = z$;

(iv) pour tout x, il existe au moins un y tel que $x\mathcal{R}y$.

La structure dans sa "violence axiomatique"

> En mathématique, l'**objet savant** est l'objet dans toute la **violence aveugle de sa définition axiomatique**, dépouillé de tout enracinement dans une pensée humaine et son cortège d'affects, d'incertitudes et d'espérances troubles. La **chose pensée** est celle qui se déploie dans une **intuition**, celle dont la présence habite et fait vivre le travail de recherche (Patras, 2001, p. 158).

Un banquet ?

Vers le palais de Rosemonde au fond du Rêve
Mes rêveuses pensées pieds nus vont en soirée
Le palais don du roi comme un roi nu s'élève
Des chairs fouettées des roses de la roseraie

...

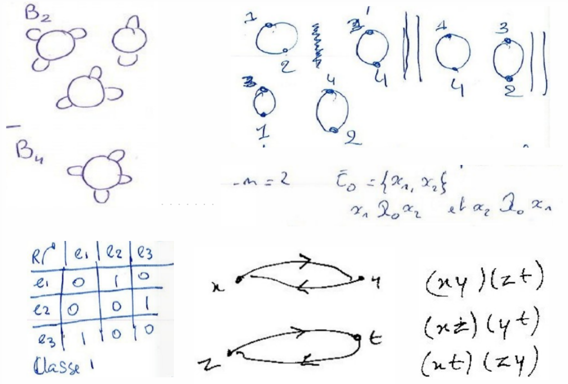
Ah ! nom de Dieu ! qu'ont donc crié ces entrecôtes
Ces grands pâtés ces os à moelle et mirotons
Langues de feu où sont-elles mes pentecôtes
Pour mes pensées de tous pays de tous les temps

Palais. Appolinaire.

Sémantique des banquets, cadres et registres sémiotiques

- Une grande **diversité de modèles**, construits dans des **cadres mathématiques variés**, une grande **diversité de représentations sémiotiques** : interprétation empirique, théorie des ensembles, algèbre matricielle, théorie des graphes, théorie des fonctions, théorie des groupes (permutations).
- Un banquet fini correspond à une permutation sans point fixe (poser $y = \sigma(x)$ ssi $x\mathcal{R}y$). Une analogie dissimulée.
- Une théorie mathématiquement riche qui ne se trouve dans aucun manuel, plus simple que la théorie des groupes
- Une **intuition** sous-jacente : l'**image mentale** de convives assis autour de tables (idée de Freudenthal).

Représentations sémiotiques produites par les étudiants



Une pluralités de tâches reflétant les démarches structuralistes

- Une tâche de **construction de modèles** en relation avec l'examen logique du système d'axiomes.
- Une tâche de **classification** de modèles.
- Une tâche de **définition axiomatique** des tablées :
  On veut placer n personnes quelconques autour d'une table ronde. Une telle configuration s'appelle une tablée de cardinal n. Quelle relation entre les personnes pourrait-on poser afin de définir abstraitement une tablée ? Enoncer un système d'axiomes définissant abstraitement une tablée.
- Une tâche d'**élaboration théorique** : définition d'un sous-banquet, d'un banquet irréductible, du banquet engendré par un élément, énoncé et preuve du théorème de structure des banquets.

La tâche de classification

a) Classifier les banquets de cardinal $n \leq 3$.

b) Classifier les banquets de cardinal 4.

c) Que dire de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de la relation $\bar{i}\mathcal{R}\bar{j} \Leftrightarrow \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}$?

d) Comment caractériser abstraitement le banquet précédent (i.e. caractériser sa structure abstraite de banquet parmi les différentes classes de banquets, en fait caractériser sa classe) ?

L'ingénierie didactique, en appui sur la TSD

- Objectif de la **recherche-action** : faciliter l'entrée dans la pensée structuraliste
- **Variables macrodidactiques** : l'ordre des tâches, le type de structure, le type de relation.
- **Variables microdidactiques** : cadres et registres introduits dans le milieu.
- Le **levier méta** : *Une théorie structurale est une théorie abstraite : elle parle donc d'objets dont la nature n'est pas spécifiée. On les note alors par des symboles :* x, y, z *ou* α, β, γ, *etc. Dans notre théorie des banquets, il n'y a qu'un seul type d'objets [...] La nature des objets n'étant pas spécifiée, ce sont les relations entre les objets qui sont le propos de la théorie [...]*

Objectifs et méthodologie

L'ingénierie didactique, en appui sur la TSD (suite)

- Un niveau de **meta-cognition** : la stratégie d'apprentissage (jeu contre un milieu) vise la **thématisation du concept d'isomorphisme** via l'**analogie** avec les démarches de classification des groupes de petits ordres (ainsi que la thématisation de la notion de sous-structure, etc.).
- **Rôle de l'enseignant** et nécessaires interactions entre dimensions a-didactiques et didactiques de l'activité.
- **Validation interne** : confrontation entre une analyse *a priori* et *a posteriori*.
- Cadre didactique pour cette analyse : la dialectique objets-structures.

La dialectique des concepts de Cavaillès : l'idéalisation

> Leaving aside or discarding all other aspects, especially specific substantial or space-time aspects. [...] it comes down to extracting a form from sundry situations [...] **idealization** follows from seeing or guessing some invariant basic properties attached to a plurality of apparently heterogeneous situations and it leads to a unifying view of the different domains on which we perform the same type of operations (Benis-Sinaceur, 2014, p. 94-95).

La dialectique des concepts de Cavaillès : la thématisation

Cavaillès appelle ensuite « thématisation » le fait que « les gestes accomplis sur un modèle ou un champ d'individus peuvent, à leur tour, être considérés comme des individus sur lesquels le mathématicien travaille en les considérant comme un nouveau champ » (Benis-Sinaceur, 1987, p. 24).

Les différents niveaux de formes-objets impliqués dans la pensée structuraliste

Espace de formes	*Théorie d'objets*
niveau 3 : catégories, objets, morphismes, foncteurs, concepts et méthodes structuralistes (invariants, objets simples, irréductibles, quotients, transferts, oubli de structure,...)	théorie des catégories
niveau 2 : groupes, anneaux, corps, idéaux...	algèbre abstraite
niveau 1 : permutations, isométries, nombres...	arithmétique élémentaire, géométrie élémentaire...
niveau 0 : fil à plomb, solides, cailloux...	faits empiriques

Phénoménologie didactique du structuralisme algébrique

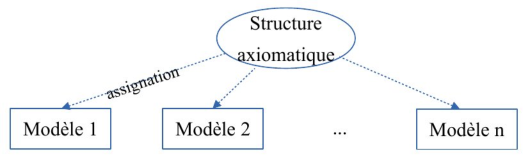
- Freudenthal (1983) : l'**analyse phénoménologique** d'un concept (ou structure) mathématique consiste à repérer le phénomène dont ce concept est le principe d'organisation et à décrire les relations entre structure et phénomène.
- L'idéalisation $\simeq$ *mathématisation horizontale* de RME, et la thématisation $\simeq$ *mathématisation verticale* (réorganisation à l'intérieur des mathématiques). Mais :
  - l'idéalisation ne se réduit pas à une mathématisation du monde réel ;
  - la thématisation est une mathématisation verticale particulière, propre au projet structuraliste.

Phénoménologie didactique du structuralisme algébrique (suite)

- Cas de l'algèbre classique : un système de signes modélisant des grandeurs dans des situations d'action sur le réel
- Cas de l'algèbre abstraite : **deux niveaux**
  1. **PO1** : la structure (de groupe, d'anneau, etc.), principe organisateur de phénomènes impliquant des objets de niveau inférieur ;
  2. **PO2** : le **meta-concept de structure** lui-même, qui joue un rôle architectural dans l'élaboration des théories mathématiques, en relation avec la méthodologie structuraliste.

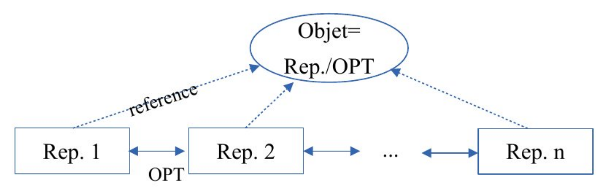
Théorie des modèles, syntaxe et sémantique

- Point de vue logique : une définition par axiomes est une « phrase ouverte »
- Les **modèles** : contenu **sémantique** de la structure, par rapport au **système d'axiomes** qui la **définit syntaxiquement**.



Point de vue sémiotique sur la conceptualisation des objets mathématiques, d'après (Winslow, 2004, p. 4)

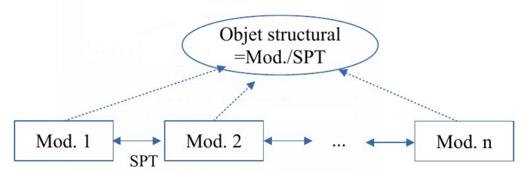
Les objets mathématiques : des "signes modulo des transformations préservant les objets (object preserving transformations ou OPT)".



Exemple : le cercle unité ; $S^1 \subset \mathbb{R}^2$; $x^2 + y^2 = 1$; etc.

Cas d'une structure mathématique abstraite définie axiomatiquement

Point de vue **sémantique** sur l'idéalisation : les *classes d'isomorphisme de modèles* ("**objets structuraux**"), un intermédiaire entre le domaine sémantique concret des objets et celui syntaxique abstrait de la structure.



Hypothèse : une *tâche de classification* des modèles est fondamentale pour la *conceptualisation* d'une structure abstraite.

Image mentale, sémiosis et noésis (Duval, 1995)

- Les "banquets de mariage" : une **image mentale** (représentation interne) qui sert à l'**objectivisation** de la structure de banquet.
- Observables : les représentations externes produites par les apprenants (**sémiosis**), en particulier lors de la conceptualisation des objets structuraux (**noésis**).

Référence pour approfondir la dialectique objets-structures : (Hausberger, 2017)

L'**image mentale** des banquets de mariage : un point d'appui aux raisonnements syntaxiques sur les axiomes et au travail de classification

E1: Classique, on spécifie la structure par des relations, d'accord.
E2: Antisymétrie [à propos de l'axiome (i)]
E1: C'est pas tout à fait ça, c'est la non-réflexivité ; il y a un seul type à droite et un à gauche, c'est l'idée, quoi [des rires] ; il y a personne qui est assis tout seul à une table
E2: Les éléments sont des personnes ? Et en relation si ensemble à table ?
E1: Oui, c'est ça. La relation est d'être assis à la droite (ou à la gauche). Par contre, tu peux avoir au plus un type à droite et au plus un à gauche, il y a au moins un type à droite. Oui [continuant à lire]... il y a la théorie et les modèles. Pour montrer que c'est non contradictoire, on peut montrer qu'il y a un modèle. Je propose de prendre un type. Non, un type ne marche pas, 2 types assis l'un à côté de l'autre. Donc tu prends $E = \{x, y\}$. On peut aussi mettre $\{0, 1\}$.
E2: $\{1, 2\}$?
E1: Allez, on prend $E = \{a, b\}$ et pour la relation les couples (a, b) et (b, a). Donc c'est bien un modèle.

Travail du binôme (suite)

E2: Le cardinal 3...

E1: Le truc circulaire, des personnes a, b, c autour de la table. $(a, b), (b, c), (c, a)$. Reste à voir que c'est le seul. (a, b) moyennant numérotation, c'est toujours valable

E2: $(a, c), (c, b), (b, a)$?

E1: C'est le même modèle, à isomorphisme près.

E2: C'est vrai.

E1: (b, a)... il va avoir un soucis, car c va être envoyé sur quoi ? Si c est envoyé sur a ou b, comme a et b sont déjà atteints, on va nier (ii).

E2: Si on avait (a, b) et (b, a) on ne saurait pas quoi faire avec c...

E1: Oui, c'est ça. Parce que ses deux voisins de droite potentiels ont déjà un voisin

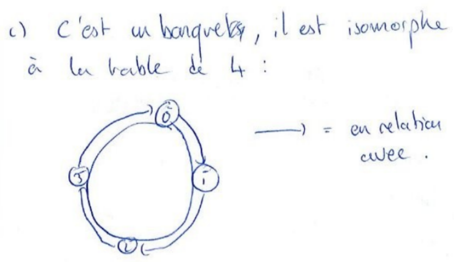
E2: Donc c'est forcément (b, c) et on complète.

E1: Le cardinal 4 sera peut-être plus intéressant. On va dire $\{a, b, c, d\}$? [...]

E1: Donc on a toujours (a, b) ; on a toujours (b, c)... ah, est-ce que b peut s'envoyer sur a ? Ca ferait un premier branchement.

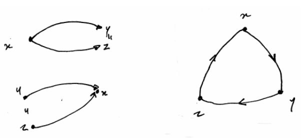
E2: Ca ferait un banquet à deux tables, en quelque sorte.

Reconnaissance de la classe d'isomorphisme par conversion vers le registre des banquets empiriques et reconnaissance d'une congruence de formes



Objet structural associé : un cercle muni de 4 points distincts

Sémiotique de la logique des relations et théorie des graphes



Représentations sémiotiques utilisées spontanément par le binôme afin de faire sens des axiomes de banquet

E: Globalement, on a un point x qui s'amène sur y et sur z, on a nécessairement l'égalité.

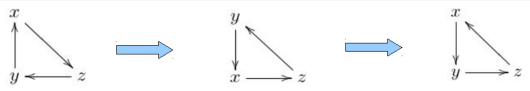
Prof: Quel est pour vous le statut de ces dessins ?

E: Ceux-là, c'est pour expliciter un peu les relations, enfin (ii) et (iii), et celui-là [dessin de droite de la figure], c'est pour nous donner une idée d'un modèle qui ressemblerait à ça [désignant l'axiomatique des banquets].

La logique des relations de (Carnap, 1928, p. 49)

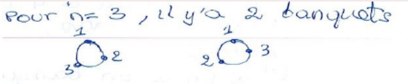
Pour comprendre ce que l'on entend par la structure d'une relation, pensons au diagramme de flèches suivant : représentons tous les membres de la relation par des points. De chaque point, une flèche va vers les autres points qui lui sont en relation. Une flèche double désigne les paires pour lesquelles la relation vaut dans les deux directions. Une flèche qui retourne à son origine désigne un membre en relation avec lui-même. Si deux relations ont le même diagramme de flèches, on les dit structurellement équivalentes, ou isomorphes. Le diagramme de flèches est la représentation symbolique de la structure.

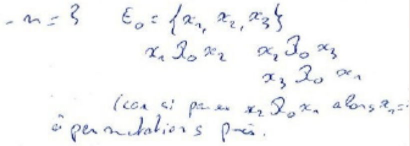
Reconnaissance d'un isomorphisme par un traitement au sein du registre sémiotique de la théorie des graphes et processus visuel de congruence de formes



Objet structural associé : un cercle muni de 3 points distincts

Un déficit d'articulation syntaxe-sémantique

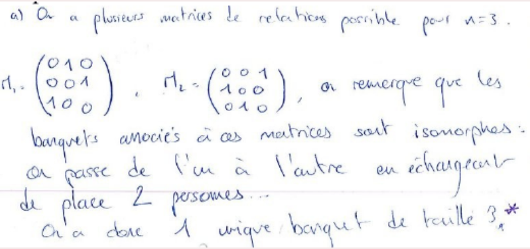




Approche sémantique : la théorie des banques, une théorie semi-empirique. Ecrasement des structures par les objets.

Approche syntaxique sans retour sur la sémantique.

Un déficit d'articulation syntaxe-sémantique (suite)

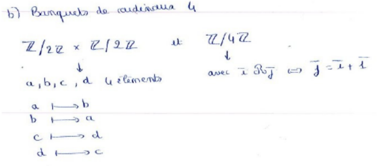

a) On a plusieurs matrices de relations possible pour $n=3$.

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que les banquets associés à ces matrices sont isomorphes : on passe de l'un à l'autre en échangeant de place 2 personnes...

On a donc 1 unique banquet de taille 3.*

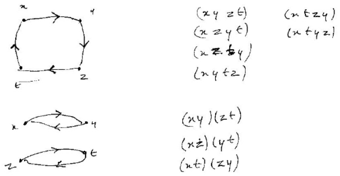
Approche sémantique avec modèles génériques dans le cadre matriciel. Notion intuitive d'isomorphisme ancrée dans le contexte phénoménal, pas de définition syntaxique.

Difficile thématisation du concept d'isomorphisme en appui sur la théorie des groupes



- Extension abusive du formalisme de la théorie des groupes, utilisé pour interpréter le domaine phénoménal des banquets.
- Incapacité du groupe d'étudiants à transposer les démarches de classification à ce nouveau contexte.

Classification des banquets d'ordre 4 par un binôme d'étudiants



E3: Il y en aurait 9.
E4: Après, on fait que réfléchir sur des objets que l'on connait. Or depuis le début, on parle de structure.
E3: Mais attends, les éléments on peut toujours les numéroter. Qu'est-ce qui pourrait boguer ?
E4: Notre propre cohérence.
E3: Mais là, on a réfléchi sur les relations, on réfléchit pas sur les objets eux-mêmes, on n'a pas pris une relation particulière
E4: Bon passons.

Obstacle des symboles (x, y, z, t) qui ne réalisent qu'une abstraction partielle de la structure

Dialogue avec le professeur

Prof: Pour vous, c'est une classification abstraite parce que vous n'avez pas considéré des relations particulières et que, pour n'importe quel ensemble, vous pouvez numéroter les éléments et finalement vous ramener à x, y, z, t.

E4: Il y aurait donc 2 classes à isomorphisme près, ce genre d'objets et ce genre d'objets

E3: Là, du $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et là du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en fait

Prof: Vous pensez à la classification des groupes ?

E4: Nécessairement, on pense aux classifications que l'on connait.

Prof: Donc il y a 2 types d'objets et là, vous les avez énumérés tous sur x, y, z, t

E4: On a énuméré tous les isomorphismes possibles.

Prof: Tous les quoi ?

E4: Tous les graphes, enfin tous les éléments...

Prof: Vous avez listé tous les graphes orientés possibles sur x, y, z, t qui vérifient les axiomes.

E3: En fait, on a fait 2 sortes de représentations : la représentation graphique et l'autre qui nous évite de refaire tous les graphes.

Prof: Et pourquoi dites-vous que ce sont deux classes ?

E3: Deux classes, c'est-à-dire ?

Emergence de la notion d'isomorphisme de banquets

Prof: Vous dites que ce sont 2 classes distinctes parce que...
E4: Oui, parce que nous...
E3: On a mis toutes les permutations derrière, de toute façon.
Prof: Et pourquoi ($xyzt$) et ($xytz$) seraient les mêmes ?
E3: Non, pas les mêmes, du même type.
Prof: Que veut dire "être du même type" ?
E3: Je pense aux permutations. Il y en a une qui va boucler plus vite que l'autre. Je pense clairement à l'ordre qu'il y a derrière.
E4: Une bijection. On peut passer d'un élément de cette classe à un autre par une bijection, mais pas entre les 2 classes.
Prof: Ne peut-on pas toujours trouver une bijection entre 2 ensembles de cardinal 4 ?
E3: Si !
E4: Ah oui, mais est-ce qu'elle va respecter la structure ?

Emerge progressivement la notion d'isomorphisme en tant que bijection "coordonnant" les relations, ce que la représentation sous forme de graphe permet de visualiser (étymologie d'isomorphisme)

Algèbre abstraite et sémiotique

- Les banquets, un ensemble de situations pour éclairer les rapports du concret à l'abstrait en algèbre abstraite (épistémologie expérimentale)
- Soutenir la thèse que si les mathématiques contemporaines sont formalisées, elles ne sont pas pour autant formelles : différents aspects phénoménologiques
- Différents niveaux de "couplage" entre l'image mentale des banquets de mariage et le symbolisme mathématique, également porteur de gestes et d'images mentales

Merci !

Référence pour approfondir : ma note de synthèse à l'habilitation à diriger des recherches (Hausberger, 2016b)

Le banquet de Platon

Références I

Benis-Sinaceur, H. (1987). Structure et concept dans l'épistémologie mathématique de jean cavaillès. *Revue d'histoire des sciences*, *40*(1), 5-30.

Benis-Sinaceur, H. (2014). Facets and Levels of Mathematical Abstraction. *Philosophia Scientiæ*, *18(1)*, 81-112.

Bourbaki. (1948, reed. 1997). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique.* Paris : Hermann.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-55.

Carnap, R. (1928). *Der logische aufbau der welt*. Berlin : Weltkreis.

Dieudonné, J.-A. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui*. Paris : Hachette.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht : Reidel.

Hasse, H. (1930). Die moderne algebraische methode. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *39*, 22-34.

Références II

Hausberger, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social, enjeux et défis pour le 21e siècle, actes du colloque emf2012* (p. 425-434). Genève : Université de Genève.

Hausberger, T. (2013). On the concept of (homo)morphism : a key notion in the learning of abstract algebra. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the eight congress of the european society for research in mathematics education* (p. 2346-2355). Ankara : Middle East Technical University.

Hausberger, T. (2016a). Comment développer des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *36*(1), 97-142.

Hausberger, T. (2016b). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université et premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : études croisées en didactique et épistémologie des mathématiques*. Université de Montpellier. Note de synthèse pour l'obtention de l'Habitation à Diriger des Recherches.

Références III

Hausberger, T. (2017). La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. *Education et Didactique. To appear*.

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly*, *102*(3), 227-242.

Patras, F. (2001). *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : PUF.

Winslow, C. (2004). Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordic studies in Mathematics Education*, *9*(2), 81-100.