

# De l'épistémologie de la notion d'application linéaire à la sémiotique de Peirce

Marc Lalaude-Labayle

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications, UPPA  
UMR CNRS 5142



Jeudi 4 mai 2017



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

**1 Émergence et cristallisation du concept d'application linéaire**

**2 Sémiotique de Peirce**

**3 Diagramme sémiotique**

## Émergence et cristallisation du concept d'application linéaire

À l'origine de notre travail épistémologique, un questionnement d'ordre didactique en lien avec les difficultés rencontrées par les étudiants qui peuvent être des :

### 1. difficultés intrinsèques aux savoirs visés :

- « complexité » des objets manipulés,
- caractère FUG(S) des notions enseignées

### 2. difficultés d'ordre institutionnel :

- phénomènes de transition entre le secondaire et le supérieur,
- difficultés liées au cadre institutionnel lui-même (CPGE, Licence d'Université),
- phénomènes de transposition didactique

### 3. difficultés liées à l'étudiant lui-même :

- notion de répertoire didactique de l'étudiant : nécessité d'organisation et d'articulation des savoirs

## Notre questionnement épistémologique initial

Comment émerge la notion d'application linéaire et quel est son rôle dans la genèse de l'algèbre linéaire ?

### Différents éclairages didactiques précisent cette (double) question

1. Lors de l'émergence de la notion d'application linéaire des difficultés voire des ruptures épistémologiques ont-elles été nécessaires ?
2. La notion d'application linéaire relève-t-elle aussi de notions FUG(S) ? Si oui, peut-on isoler des changements épistémologiques correspondant à chacun de ces aspects ?
3. Peut-on identifier différents cadres propices à la genèse de la notion d'application linéaire ? Et peut-on alors identifier le caractère outil ou objet de ces notions ?

## Des origines à Euler : vers une « dégéométrisation » de la notion de fonction

- Jusqu'au XVI<sup>ème</sup> siècle : fonctionnement implicite, peu de registres (tableaux, graphes)
- Entre le XIII<sup>ème</sup> et le XVII<sup>ème</sup> : de nouveaux outils (concept de nombre, symboles et variables mathématiques), de nouvelles idées et questions clairement explicitées (mécanique, géométrie cartésienne)

Début de fonctionnement explicite mais dans le registre géométrique (« functio » de Leibniz, 1692)

- 1718 : première définition formalisée de fonction par Bernoulli  
*« On appelle ici Fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable & de constantes. »*
- 1732 : Euler introduit le symbole  $y = f(x)$  pour décrire une fonction
- 1748 : Euler publie *Introductio in Analysin Infinitorum*, premier ouvrage dans lequel le concept de fonction est central (aucune figure géométrique)  
*« Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitibus constantibus »*

## De Fourier à Dirichlet : vers une définition moderne de la notion de fonction d'une variable réelle

- 1807 (publié en 1822) : Fourier en revenant sur la controverse de la corde vibrante permet
  - Réflexion sur la notion de fonction : distinction entre fonction et représentation analytique et lien entre courbe et fonction
  - Point de départ de l'analyse contemporaine
- 1837 : Dirichlet exhibe une correspondance arbitraire, abstraite entre un élément  $x$  et son image  $f(x)$

« Man denke sich unter  $a$  und  $b$  zwei feste Werthe und unter  $x$  eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen  $a$  und  $b$  liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem  $x$  ein einziges, endliches  $y$ , und zwar so, dass, während  $x$  das Intervall von  $a$  bis  $b$  stetig durchläuft,  $y=f(x)$  sich ebenfalls allmählich verändert, so heisst  $y$  eine stetige oder continuirliche Function von  $x$  für dieses Intervall. »

## De Dedekind à Bourbaki : une définition ensembliste de fonction

- 1887 : Dedekind jette les bases d'une définition ensembliste moderne de la notion d'application

« Unter einer Abbildung  $\varphi$  einer Menge  $S$  wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element  $s$  von  $S$  ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von  $s$  heißt und mit  $\varphi(s)$  bezeichnet wird; wir sagen auch, daß  $\varphi(s)$  dem Element  $s$  entspricht, daß  $\varphi(s)$  durch die Abbildung  $\varphi$  aus  $s$  entsteht oder erzeugt wird, daß  $s$  durch die Abbildung  $\varphi$  in  $\varphi(s)$  übergeht »

**Remarque :** Dedekind, Grassmann et Pincherle notent une fonction  $\varphi$  et non  $\varphi(x)$

- 1905 : Lebesgue construit une fonction qui n'est dans aucune des classes de Baire
- 1939 : Bourbaki propose une première définition ensembliste

« Soient  $E$  et  $F$ , deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable  $x$  de  $E$  et une variable  $y$  de  $F$  est dite relation fonctionnelle en  $y$  ou relation fonctionnelle de  $E$  vers  $F$ , si pour tout  $x$  appartenant à  $E$ , il existe un seul  $y$  appartenant à  $F$ , qui soit dans la relation considérée avec  $x$ . On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément  $x$  de  $E$ , l'élément  $y$  dans  $F$  qui se trouve dans la relation donnée avec  $x$ ; on dit que  $y$  est la valeur de la fonction pour l'élément  $x$ , et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée. »

## Jusqu'à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle

- Dans les domaines de « l'analyse » et de « l'algèbre » :
  - 1617 : Briggs introduit le calcul aux différences finies
  - 1687 : Rolle et Newton utilisent des méthodes de substitution linéaire introduites par Cardan
  - 1690 : Rolle utilise l'opérateur  $D$  pour résoudre des équations diophantiennes
  - 1706 : Bernoulli systématise l'étude du calcul symbolique (introduction de l'opérateur  $\Delta$ )

Mais les opérations ont toujours lieu sur des fonctions explicites, et non sur un ensemble des fonctions

- Dans le domaine de la géométrie :

les transformations ne sont appliquées qu'à des courbes et non au plan tout entier, la géométrie étant conçue comme l'étude des figures géométriques isolées et non comme une étude portant sur l'espace tout entier



## De la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle à la première moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle

- 1771 : Lagrange manipule des substitutions linéaires à deux variables dans des formes quadratiques
- 1800 : Arbogast sépare les opérateurs des fonctions sur lesquels ils opèrent : ces opérateurs deviennent ainsi objets d'étude
- 1801 : Gauss généralise les travaux de Lagrange à 3 puis  $n$  variables
  - introduit une notation matricielle pour simplifier les calculs
  - associe implicitement composition de substitutions et produit matriciel
- 1844 : Eisenstein note  $S$  et  $T$  les substitutions et introduit le produit non commutatif  $S \times T$
- 1848 : Hamilton introduit la notion de « linear vector operator »

## De la notion de système linéaire à celle de déterminant

- 1683 : Seki et Leibniz introduisent la notion de déterminant
- 1812 : définition « formelle » de déterminant par Cauchy

## De la notion de déterminant à celle de matrice (finie)

- 1841 : Boole publie « Exposition of a general theory of linear transformation » motivé par une simplification des calculs de Lagrange
- 1845 : Cayley publie « On the theory of linear transformations »
- 1851 : Sylvester introduit le mot « matrix », relativement à un déterminant
- 1854 : Hermite généralise les méthodes et les résultats de Cayley dans le secteur des formes quadratiques
- 1855 : Cayley publie « Remarques sur la notation des fonctions algébriques » : aspect simplificateur de la notation matricielle pour représenter les systèmes linéaires

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

*Je me sers de la notation*

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

*pour représenter ce que j'appelle une matrice; savoir un système de quantités rangées en forme de carré mais d'ailleurs tout à fait indépendantes (je ne parle pas ici des matrices rectangulaires). Cette notation me paraît très commode pour la théorie des équations linéaires; j'écris par exemple*

$$(\xi, \eta, \zeta, \dots) = \left( \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} (x, y, z, \dots) \right)$$

*pour représenter le système des équations*

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots, \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \dots, \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \dots, \\ \dots & \dots \dots \end{aligned}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

- 1858 : Avec « A Memoir on the Theory of Matrices » de Cayley,
  - la notion de matrice passe du statut d'outil commode à celui d'objet d'étude :  
« *There would be many things to say about this theory of matrices which should, it seems to me, precede the theory of determinants* »
  - les opérations sur les objets plus importantes que les objets eux-mêmes

## De la notion de matrice à celle d'application linéaire (1840-1930)

Convergence de plusieurs domaines :

1. un OMNI<sup>1</sup> : les travaux géométriques de Grassmann (1844) revisités et axiomatisés par Peano (1888), Pincherle (1901) et Weyl (1918)
2. les travaux en analyse fonctionnelle jusqu'à Banach (1920, 1932)
3. les travaux de l'école allemande en algèbre jusqu'à Van der Waerden (1930-31)

---

1. OMNI=Objet Mathématique Non Identifiable

## La première définition d'application linéaire avec Peano (1888)

- La définition :

**75. DEF.** Un'operazione  $R$ , a eseguirsi su ogni ente  $a$  d'un sistema lineari  $A$ , dicesi *distributiva*, se il risultato dell'operazione  $R$  sull'ente  $a$ , che indicheremo con  $Ra$ , è pure un ente d'un sistema lineare, e sonon verificate le identità

$$R(a+a')=Ra+Ra', \quad R(ma)=m(Ra)$$

ove  $a$  e  $a'$  sono enti qualunque del sistem  $A$ , ed  $m$  un numero reale qualunque.

- Un théorème fondamental :

**77. TEOR.** Se  $a_1 \dots a_n$  sono  $n$  enti indipendenti d'un sistema lineare  $A$  ad  $n$  dimensioni, e  $b_1 \dots b_n$  sono enti pure d'un sistema lineare, è determinata una ed una sola trasformazione  $R$  del sistema  $A$  che soddisfa alle condizioni

$$Ra_1=b_1, \dots, Ra_n=b_n.$$

- Une représentation « presque » matricielle :

DEF. La trasformazione degli enti del sistema lineare  $A$  ad  $n$  dimensioni che fa corrispondere agli  $n$  enti indipendenti  $a_1 \dots a_n$  gli enti  $b_1 \dots b_n$  si indicherà colla scrittura :

$$\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \dots & b_n \\ a_1, & a_2, & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

## De la notion de matrice finie à celle d'opérateur via celle de matrice infinie

### Constat

l'absence de notation et de définition claires des objets mathématiques d'algèbre linéaire en dimension finie rend difficile leur généralisation au cas de la dimension quelconque.

### Bilan

Pour la théorie des opérateurs, les mathématiciens s'inspirent des succès de l'algèbre matricielle et refont ce même chemin mathématique : partir des équations linéaires pour aboutir aux vecteurs et opérateurs, via les matrices infinies, les déterminants et les formes bilinéaires.

## Des opérateurs aux espaces abstraits : retour de la géométrie

- 1903 : Fredholm envisage un point de vue nouveau : l'aspect opérateur devient outil simplificateur de description du problème mais surtout de résolution

« En considérant l'équation (b) comme transformant la fonction  $\varphi(x)$  en une nouvelle fonction  $\psi(x)$  j'écris cette même équation

$$(7) S_f \varphi(x) = \psi(x),$$

et je dis que la transformation  $S_f$  appartient à la fonction  $f(x, y)$ . Les transformations (7) forment un groupe. »
- 1922 : Banach propose une définition axiomatique de la notion d'espace vectoriel normé (annotée par les éditeurs)

« L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici: je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui. »

## Dedekind, Noether, Van der Waerden : l'algèbre moderne

- 1890 : Dedekind propose une approche axiomatique de la notion de « Schaar »
- 1921 : Noether introduit la notion de module
- 1929 : Noether souligne le lien matrice/application linéaire en note de bas de page

<sup>15a)</sup> Zusatz bei der Korrektur (14. April 1929). Wie B. L. v. d. Waerden mir mitteilt, kann man einen von der speziellen Basiswahl unabhängigen, also invarianten Zusammenhang direkt gewinnen durch Trennung der Begriffe: *lineare Transformation* und *Matrix*. Eine lineare Transformation ist ein Homomorphismus zweier Linearformenmoduln; eine Matrix ist der Ausdruck (die Darstellung) dieses Homomorphismus bei einer bestimmten Basiswahl.

- 1930-1931 : première apparition des termes « Lineare Algebra » dans l'ouvrage de Van der Waerden



## Diffusion et enseignement

- 1930 à 1950 : Schreier & Sperner (1931), Van der Waerden (1937), Birkhoff & Mac Lane (1941), Halmos (1942), MacDuffee (1943), Lichnérovicz (1947), Bourbaki (1947), Gel'fand (1948)

DEFINITION 1. A set  $\mathbf{R}$  of elements  $x, y, z, \dots$  is said to be a vector space over a field  $F$  if:

(a) With every two elements  $x$  and  $y$  in  $\mathbf{R}$  there is associated an element  $z$  in  $\mathbf{R}$  which is called the sum of the elements  $x$  and  $y$ . The sum of the elements  $x$  and  $y$  is denoted by  $x+y$ .

(b) With every element  $x$  in  $\mathbf{R}$  and every number  $\lambda$  belonging to the field  $F$  there is associated an element  $\lambda x$  in  $\mathbf{R}$ .  $\lambda x$  is referred to as the product of  $x$  by  $\lambda$ .

- 1954 - 1958 :
  - cours de Choquet (théorie des ensembles, algèbre des groupes, anneaux et corps, construction des réels et des complexes, algèbre linéaire, espaces topologiques, espaces normés, espaces de Hilbert)
  - apparition des notions d'espace vectoriel dans les programmes de CPGE en France
  - cours de Kemeny aux États-Unis (Compound Statements, Sets and subsets, Partitions and counting, Probability theory, Vectors and matrices, Linear programming and the theory of games, Applications to behavioral science problems)

## Bilan :

### I. À l'origine de **l'émergence de l'algèbre linéaire**

#### 1. des questions **mathématiques**

- **numérico-algébrique** : de la résolution des systèmes linéaires aux applications linéaires via les matrices et l'algèbre abstraite de l'école allemande
- **géométrico-analytique** : de l'opérateur  $\Delta$  de différence finie aux espaces de formes linéaires de Banach via les transformations géométriques

#### 2. des questions d'ordre « **philosophique** » sur la nature des objets et sur la rigueur des pratiques

II. Des **obstacles** voire des **ruptures épistémologiques** : non contigüité des registres sémiotiques (formes bilinéaires/matrices), lien matrice/application linéaire ...

III. Aspect **FUG(S)** des applications linéaires, objet central de l'émergence de l'algèbre linéaire (Banach)

IV. « La fonction primordiale des signes et des représentations en mathématiques, n'est ni la communication, ni l'évocation d'objets absents mais le traitement d'informations » (Duval)

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \geq 0 \\ -\int_0^{-x} f(t) dt & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\int_0^{-x} f(t) dt & \text{si } x \geq 0 \\ \int_0^x f(t) dt & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• (i)  $\Phi(0) = 0$

Donc  $\Phi \in \mathcal{Ker} E$

• (ii) Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Soit  $g, h \in \mathcal{R}^{\mathbb{R}}$

$\alpha g, \beta h \in \Phi ?$

$\alpha \int_0^x g(t) dt + \beta \int_0^x h(t) dt$

$= \alpha (G(x) - G(0)) + \beta (H(x) - H(0))$

avec  $G$  primitive de  $g$   
 $H$  primitive de  $h$

$= \alpha G(x) + \beta H(x)$

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications  $f$ , continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f(0) = 0$  et soit  $\Phi$  l'application définie par :

$$\forall f \in E \quad \Phi(f) = g$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \geq 0 \\ -\int_0^{-x} f(t) dt & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(-x) = \begin{cases} -\int_0^{-x} f(t) dt & \text{si } x \geq 0 \\ \int_0^x f(t) dt & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• (i)  $\Phi(0) = 0$   
Donc  $\Phi \in \text{Ker } E$

• (ii) Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
Soit  $g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$   
 $\alpha g, \beta h \in \Phi ?$   

$$\alpha \int_0^x g(t) dt + \beta \int_0^x h(t) dt$$

$$= \alpha (G(x) - G(0)) + \beta (H(x) - H(0))$$

avec  $G$  une primitive de  $g$   
 $H$  " "  $h$

$$= \alpha G(x) + \beta H(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \geq 0 \\ -\int_0^{-x} f(t) dt & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f(-x) = \begin{cases} -\int_0^{-x} f(t) dt & \text{si } x \geq 0 \\ \int_0^x f(t) dt & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(i)  $\Phi(0) = 0$

Donc  $\Phi \in \text{Ker } E$

(ii) Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Soit  $g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$\alpha g + \beta h \in \Phi ?$

$$\alpha \int_0^x g(t) dt + \beta \int_0^x h(t) dt$$

$$= \alpha (G(x) - G(0)) + \beta (H(x) - H(0))$$

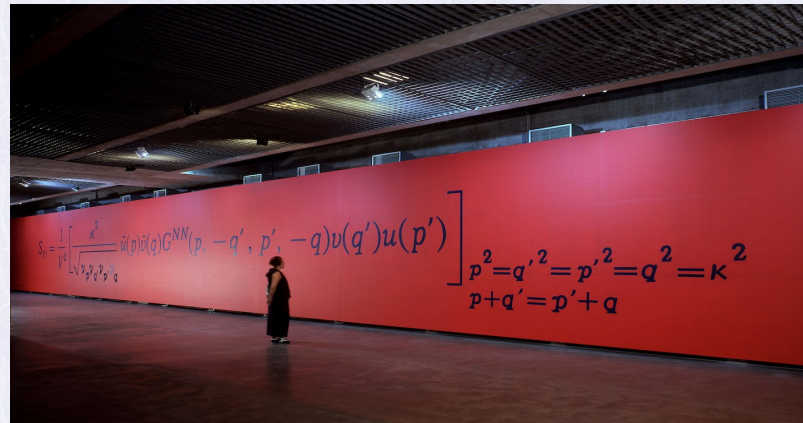
avec  $G$  une primitive de  $g$

$H$  " "  $h$

$$= \alpha G(x) + \beta H(x)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

$$1 + e^{i\pi} = 0$$



## Pourquoi s'intéresser à la sémiotique de C.S. Peirce (slide d'après I. Bloch) ?

- Dans les théories existantes, les interactions didactiques sont envisagées
  - tantôt du côté de l'objet : les maths,
  - tantôt du côté du sujet : l'élève (ou le professeur)

Objectif : envisager l'interaction intrinsèquement dans la situation, et se donner des outils d'analyse

- Lorsqu'une symbolisation est incomprise, analyser la sémiose effectuée
- De façon générale, comment se fait un apprentissage des mathématiques avec l'usage approprié de signes ?

*« It is a most fascinating moment when we can observe students learning from representations they have constructed for themselves, and experimenting with and communicating about those representations.*

*(...) Thus, it is no surprise that discussing the role of signs and the activities of symbolizing and modeling have become major topics in mathematics education research during recent years. (Bakker, Hoffmann). »*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

- La sémiotique (théorie et étude des signes et du sens) de Peirce est
  - Une théorie **générale**
    - qui envisage toutes les composantes de la sémiotique
    - qui généralise le concept de signe
  - Une théorie **triadique**
    - qui repose sur trois catégories philosophiques : la priméité, la secondéité et la tiercéité
    - qui met en relation trois termes : le signe ou representamen, l'objet et l'interprétant
  - Une théorie **pragmatique**
    - qui prend en considération le contexte de production et de réception des signes
    - qui définit le signe par son action sur l'interprète

## Hiérarchisation catégorielle

|              |                       |           |                |          |
|--------------|-----------------------|-----------|----------------|----------|
| Les qualités | se matérialisent dans | les faits | sont régis par | les lois |
|              | →                     |           | →              |          |

Peirce introduit la notion de relation :

- une relation  $\mathcal{R}$  est dite monadique si elle ne s'applique qu'à un seul objet  $x$ .

Par exemple, si  $\mathcal{R}$  est la relation « être un nombre entier », alors  $\mathcal{R}x$  signifie que  $x$  est un nombre entier.

- $\mathcal{R}$  est dite relation dyadique si elle relie deux relata  $x$  et  $y$  :  $\mathcal{R}x y$ .

Par exemple, si  $\mathcal{R}$  est « être plus grand »,  $\mathcal{R}x y$  signifie que  $x$  est plus grand que  $y$ .

- $\mathcal{R}$  est une relation triadique si elle relie trois relata  $x, y$  et  $z$  :  $\mathcal{R}x y z$ .

Par exemple, si  $\mathcal{R}$  est « est égal à la somme des deux derniers »,  $\mathcal{R}x y z$  signifie que  $x = y + z$



## Les trois catégories universelles de Peirce

- la *priméité* est une conception de l'être indépendamment de toute chose : « *Firstness is the mode of being of that which is such as it is, positively and without reference to anything else* »
- la *secondéité* est la conception de l'être relatif à quelque chose d'autre : « *Secondness is the mode of being of that which is such as it is, with respect to a second but regardless of any third* »
- la *tiércéité* est la médiation par laquelle deux choses sont mises en relation : « *Thirdness is the mode of being of that which is such as it is, in bringing a second and third into relation to each other* »

**Un exemple en informatique :** en Haskell, dans la commande `int x = 32`

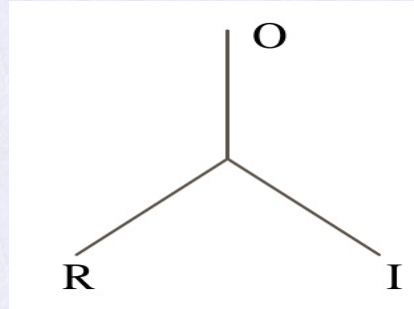
- `32` n'ayant pas de lien avec autre chose que lui-même est dans la priméité
- `x` référence `32` vers une adresse informatique : `x` est donc dans la secondéité
- `int` englobant des objets suivant leur type (« une façon d'être ») est dans la tiércéité

## Signe et sémiologie

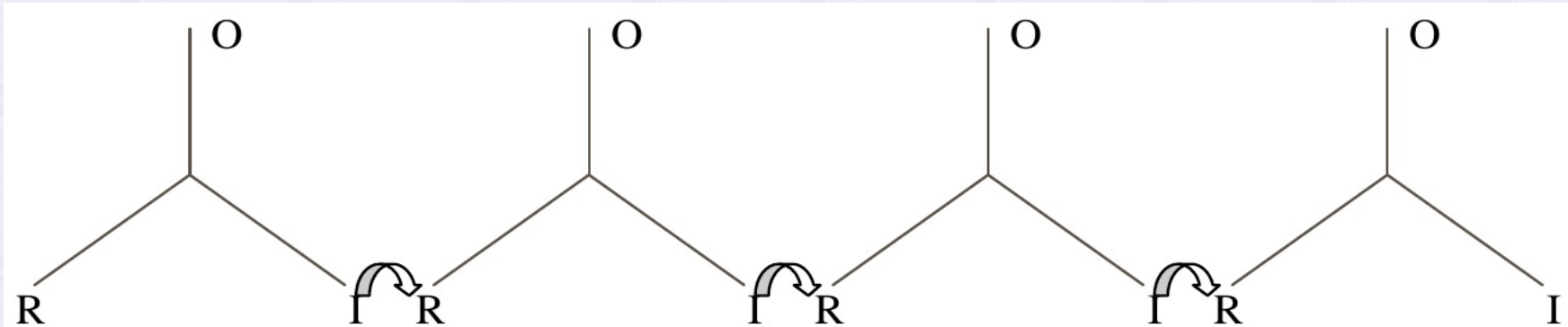
« a sign is something, A, which denotes some fact or object, B, to some interpreting thought, C »

- **Définition triadique du signe**
  - Un signe (ou representamen) est une chose qui représente une autre chose : son objet
  - Un objet est ce que le signe (ou representamen) représente
  - Le representamen, pris en considération par un interprète, a le pouvoir de déclencher un interprétant
- **Processus sémiotique (sémiologie)** : rapport triadique entre un signe ou representamen (noté R), un objet (noté O), représenté par R et un interprétant (noté I), qui met en relation R et O.
- **Approche fonctionnelle du triplet (R,O,I)** : les trois instances sont des fonctions identifiées dans une sémiologie donnée
  - « Pomme » representamen de l'objet pomme
  - « Pomme » interprétant du mot « golden »
  - « Pomme » objet du mot « apple » dans une traduction

## Triade sémiotique



## Sémiologie



« la pensée (qui est une tiercéité) saisit les existants (qui sont des secondéités) comme des possibles (des priméités) réalisés » (Marty)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

**Un premier exemple** : le representamen  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  représente

- les coefficients d'un système linéaire à deux équations, deux inconnues
- une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- une matrice d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$
- une matrice d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension 2
- ...

**Un second exemple** : le representamen  $\int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt$  représente

- l'« aire » sous la courbe
- l'intégrale d'un produit (exemple d'intégration par parties)
- un moment d'ordre 1 associé à une V.A.R.  $X$  suivant une loi  $\mathcal{E}(2)$
- $\frac{1}{2} \mathbb{E}(X)$
- $\frac{1}{4}$
- ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

- Selon Peirce, chacune des trois instances du signe relève de la priméité, secondéité, ou tiercéité
- La relation du representamen à son objet (secondéité) peut être
  - **iconique (icône)** quand  $R$  renvoie à  $O$  par ressemblance : une droite dessinée sur une feuille de papier, un portrait d'une personne, une maquette d'un bâtiment,
 
$$\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$
 icône d'une matrice diagonale ...
  - **indicielle (indice)** quand  $R$  renvoie à  $O$  par indication contextuelle, par un lien réel à l'objet : une girouette, le symptôme d'une maladie, dans l'expression «  $A$  et  $B$  sont mariés et  $C$  est leur enfant »,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des indices (Peirce),
 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$
 indices des variables libres,
 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
 indices des vecteurs libres ...
  - **symbolique (symbole)** quand  $R$  renvoie à  $O$  via une loi, une règle, un habitus : un mot ordinaire de la langue,  $\text{Ker}$  est le symbole de noyau,  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}$  est un symbole d'espace vectoriel engendré ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

Soient les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}[X]$  suivants

$$\mathcal{E}_n = \mathbb{R}_n[X], \quad \mathcal{F}_n = \text{vect}(1, X^2, X^3, \dots, X^n)$$

On désigne par  $\phi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}[X]$  par

$$\phi(P) = (X^2 - X)P'' + (X + 1)P' - P$$

1. Montrer que  $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ . Écrire la matrice de  $\phi$  dans la base  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ . Déterminer  $\text{Ker } \phi$  et  $\text{Im } \phi$
2. Montrer que  $\psi = \phi|_{\mathcal{F}_n}$ , la restriction de  $\phi$  à  $\mathcal{F}_n$ , est un automorphisme de  $\mathcal{F}_n$ . Préciser la matrice de  $\psi^{-1}$  dans la base  $(1, X^2, \dots, X^n)$
3. Résoudre les équations  $\psi(P) = X^k$ ,  $P \in \mathcal{F}_n$  puis  $\phi(P) = X^k$ ,  $P \in \mathcal{E}_n$  où  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

L1

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2n - n^2 \\ 0 & 0 & 0 & & n^2 - 1 \end{pmatrix}$$

L2

Ainsi, on a  $\dim \text{Im } f = n$

L3

On a donc  $\text{Im } f = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2n - n^2 \\ n^2 - 1 \end{pmatrix} \right)$ .

L4

De plus, on a d'après le théorème du rang :

L5

$$\dim \text{Ker } \varphi = 1$$

L6

Or  $\phi(1) + \phi(X) = 0$

L7

$$\Leftrightarrow \phi(X + 1) = 0 \text{ car } \phi \text{ est linéaire}$$

L8

Donc  $\text{vect}(X + 1) \subset \text{Ker } \phi$

L9

Comme  $\dim \text{Ker } \varphi = 1$ , on en déduit que  $\text{Ker } \varphi = \text{Vect}((X + 1))$





1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

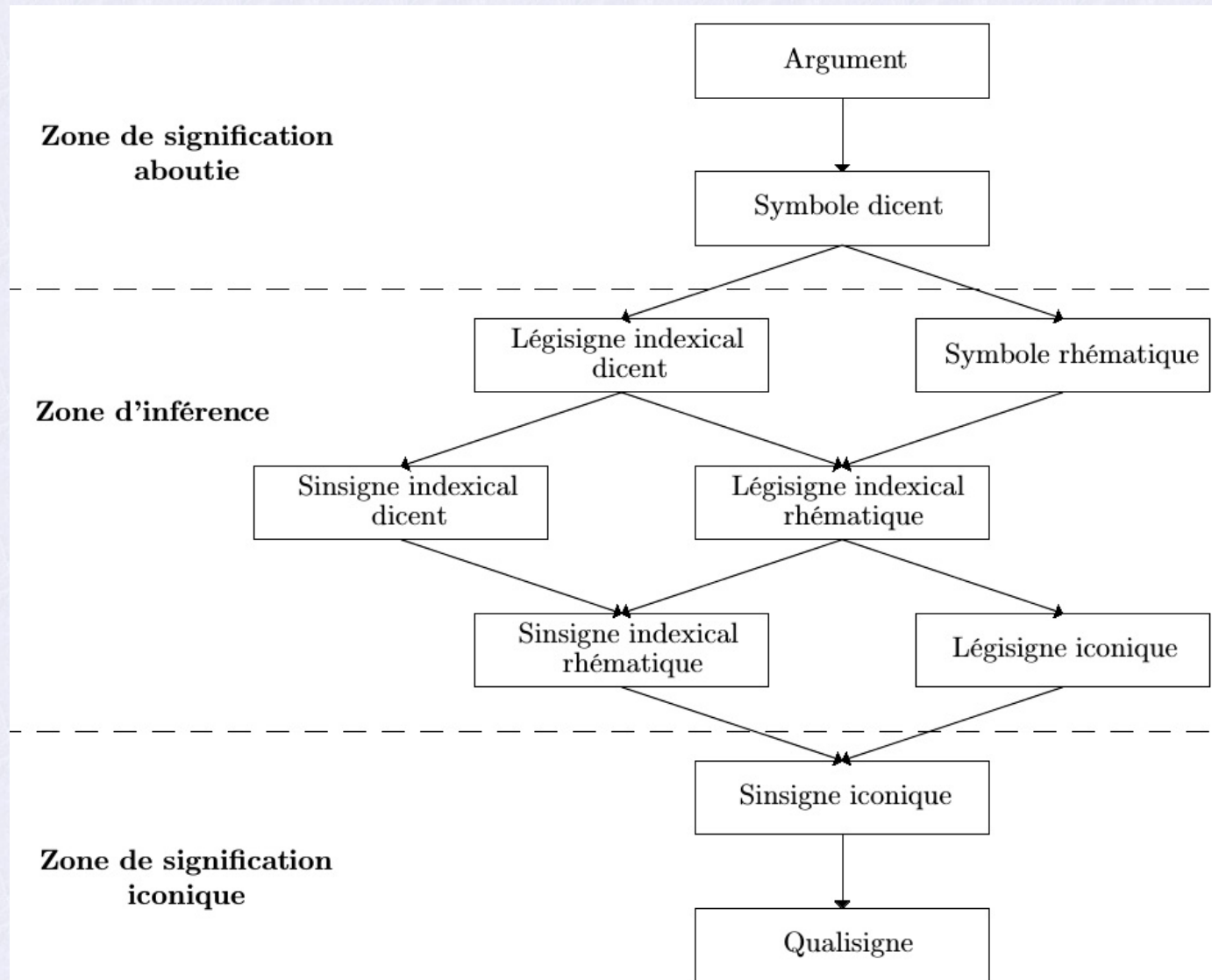
- le representamen (priméité) peut être
  - un **qualisigne** (qualité, apparence) : un sentiment de souffrance devant une équation
  - un **sinsigne** (spatio-temporellement déterminé) :  $\varphi(u) = 2u$
  - un **légisigne** (conventionnel) :  $\Rightarrow$  dans l'expression  $x=1$ , un mot de passe sont des légisignes
- l'interprétant  $I$  du lien entre  $R$  et  $O$  peut être
  - un **rhème** lorsque la relation du representamen à l'objet est interprétée par les seules qualités du representamen :  $n$  dans une propriété  $\mathcal{P}(n)$  à montrer (par récurrence par exemple)
  - un **dicisigne** lorsque la relation du representamen à l'objet est interprétée comme un existant factuel jouant le rôle d'une proposition :  $\mathcal{P}(3)$  (vraie ou fausse)
  - un **argument** lorsque la relation du representamen à l'objet est formulée en tant que règle : preuve de la véracité ou non de  $\mathcal{P}(3)$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

La sémiologie est ordonnée par le principe de hiérarchie des classes : la relation d'un representamen à l'objet ne peut être de catégorie supérieure à celle du representamen et, de même, l'interprétation de cette relation du representamen à l'objet ne peut être de catégorie supérieure à celle de cette relation.

|  |   |   |   |
|--|---|---|---|
|  | 1. Qualité de sentiment, possibilité. En référence au ground.                       | 2. Réaction, résistance, fait réel. En référence à une corrélation. | 3. Représentation, habitude, loi. En référence à un interprétant. |
| I. le signe lui-même   | Qualisigne  | Sinsigne (token)  | Légisigne (type)  |
|  |   |   |   |
| II. la façon dont le signe dénote son objet  | Icône   | Indice  | Symbole   |
|  |  |   |   |
| III. la façon dont le rapport du signe à l'objet est représenté via l'interprétant | Rhème   | Dicisigne   | Argument  |

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

Abduction

$$\frac{B \quad A \longrightarrow B}{A}$$

Déduction

$$\frac{A \quad A \longrightarrow B}{B}$$

Induction

$$\frac{A \quad B}{A \longrightarrow B}$$

Abduction

⊢ Tous les haricots de ce sac sont blancs

⊢ Ceci est un haricot blanc

Donc :

Ce haricot provient du sac (probablement)

Déduction

⊢ Tous les haricots de ce sac sont blancs

⊢ Ceci est un haricot tiré de ce sac

Donc :

Ce haricot est blanc

Induction

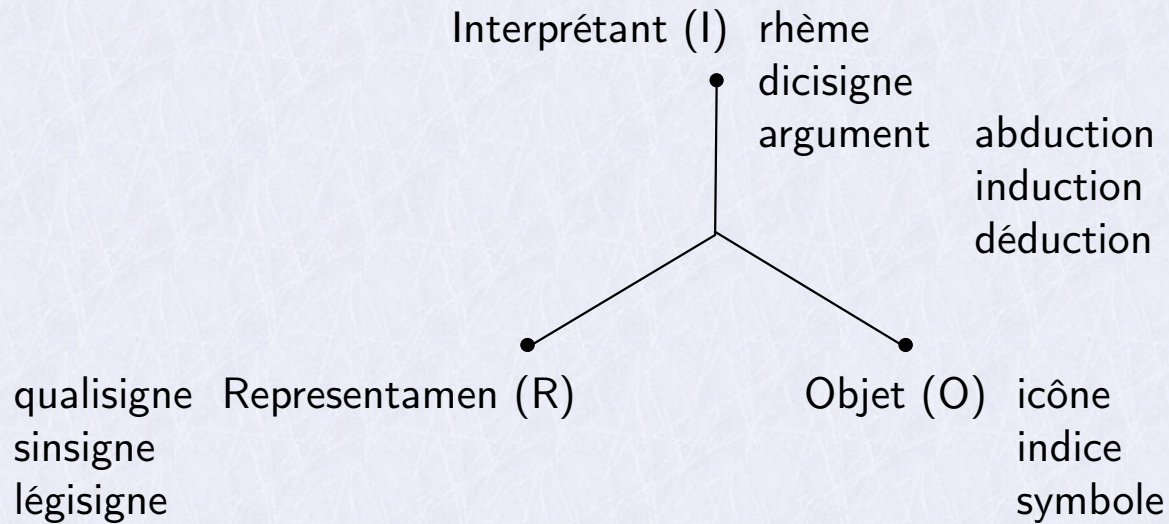
⊢ Tous les haricots sont tirés de ce sac

⊢ Tous ces haricots sont blancs

Donc :

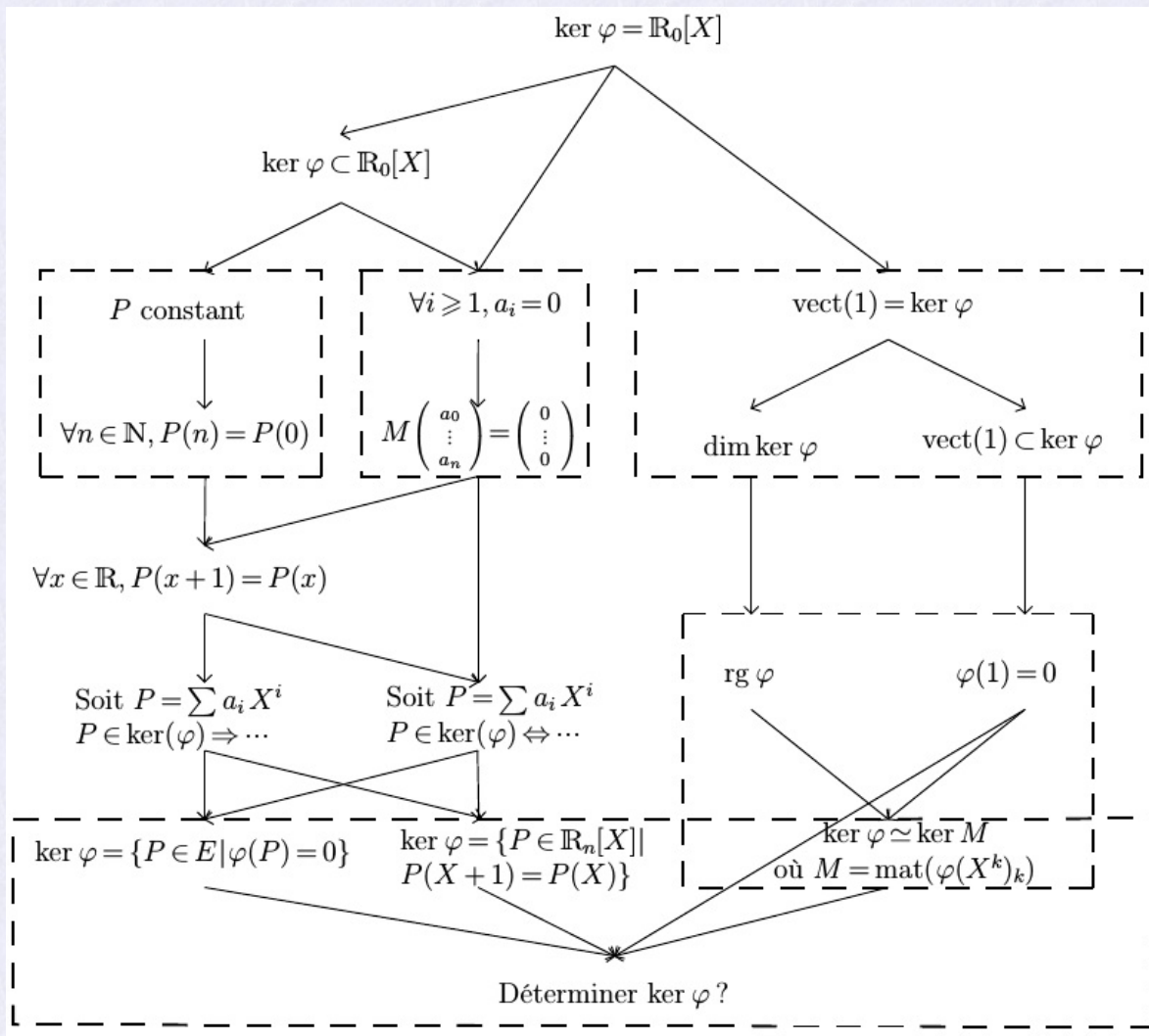
Tous les haricots de ce sac sont blancs

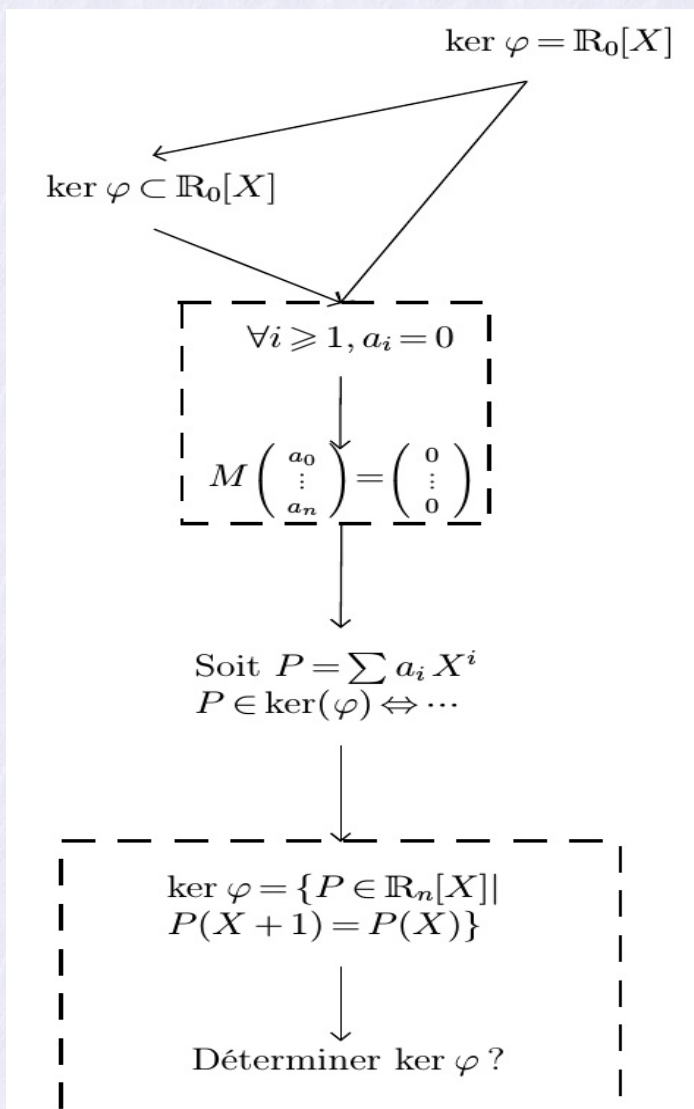
## La triade sémiotique complète (enfin !)



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

$\varphi(P) = P(X + 1) - P(X)$  où  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Ker  $\varphi$  ?





Construction de la règle

Émergence du problème

Construction de la tâche

**Merci de votre attention**