

Langue naturelle et symboles dans les expressions algébriques au collège

Comment favoriser la constitution du sens des expressions algébriques ?

Philippe Le Borgne, Laboratoire de mathématiques de Besançon & IREM de Besançon
Jérôme Michaud-Bonnet, Collège de Pouilley-Les-Vignes & IREM de Besançon

Journées bisontines de didactique et d'épistémologie

4 mai 2017 – Besançon

Notre recherche et quelques conséquences méthodologiques

$A = 2^{\circ}$ partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
en faisant $Y + A$.

elle même est égale au quadruple
du produit de l'une des deux parties
par l'autre: $x \times (10-x) = (x \times (10-x)) \times 4$

10- \bullet Une première étude sur les connaissances mobilisées dans la constitution des expressions algébriques dans les problèmes à double référence.

(10- \bullet Nos objectifs : identifier des fonctionnements chez les élèves qui permettent d'interpréter des erreurs et favoriser la constitution du sens des expressions algébriques.

$y =$ l'un des deux nombres (le 2^{ème} autre des nombres)
2^{ème} phase: $x + y = 10$
 $y = 10 - x$) les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

3^{ème} phase: $x \times (10-x)$
3^{ème} phase: soit: $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$
soit: $x^2 = 4 \times (10-x)$

Des travaux en toile de fond

- Sur les procédures de contrôle mise en oeuvre dans le traitement arithmétique et algébrique des problèmes (Houdement, 2011, Saboya, Bednarz & Hitt, 2016)
- Sur les types de problèmes permettant de mettre en évidence les calculs relationnels impliqués dans la représentation et la résolution (Vergnaud, 1982). Ils soulignent les ruptures dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre (Bednarz, 1996, 1999, 2006).
- Sur le rôle du langage (Rébrière, 2011) et des mécanismes sémiotiques en jeu selon des modes de fonctionnement culturellement constitués (Radford, 2007).

De quoi parle-t-on ?

$y =$ 1^{ère} partie
 $A =$ 2^{ème} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
en faisant $y + A$.

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x \times x = (x \times (10-x)) \times 4$

10-
● Problèmes avec deux références (quantités perçues comme inconnues)

● Niveau collège (quatrième et troisième)

● Résolution avec une équation (premier degré)

problèmes de compréhension du texte

$y =$ l'un des 2 nombres / $x =$ l'autre des 2 nombres

2^{ème} phase:

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

les 2 nombres sont: x et $(10-x)$

3^{ème} phase:

$$x \times (10-x)$$

3^{ème} phase:

$$\text{soit: } (10-x) \times (10-x) = 4 \times (10-x)^2$$

$$\text{soit: } x^2 = 4 \times (10-x)^2$$

Exemples

$y =$ 1^{re} partie
 $A =$ 2^{de} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé en faisant $y + A$.

Un bijou est composé d'or et de perles et son poids est de trois grammes et sa valeur est de vingt-quatre euros. La valeur d'un gramme d'or est de cinq euros, celui d'un gramme de perles est de quinze euros. Nous voulons connaître le poids de chacun des deux composants.

$$(10-x) \times (10-x) = 4 \times (20 \times x)$$

Trois amis se partagent 475€ en trois parts : la part de Pablo doit être de 25€ de plus que celle de Léa. Celle d'Anaïs est le double de celle de Léa. Combien chacun va-t-il recevoir ?

$y =$...
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$

3^{ème} phase:
 $x \times (10-x)$
3^{ème} phase:
soit: $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$
soit: $x^2 = 4 \times (10-x)$

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple de l'autre...
le produit de l'une des deux parties

compréhension
de l'exercice

Exemples

$y =$ 1^{re} partie
 $A =$ 2^{de} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
en fait $y + A$.

Un bijou est composé d'or et de perles et son poids est de trois grammes et sa valeur est de vingt-quatre euros. La valeur d'un gramme d'or est de cinq euros, celui d'un gramme de perles est de quinze euros. Nous voulons connaître le poids de chacun des deux composants.

Trois amis se partagent 475€ en trois parts : la part de Pablo doit être de 25€ de plus que celle de Léa. Celle d'Anaïs est le double de celle de Léa. Combien chacun va-t-il recevoir ?

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple de produit de l'une des deux parties

compréhension
de l'exercice

$$(10-x) \times (10-x) = 4 \times (20 \times x)$$

$y =$ 2^{ème} des 2 nombres $2x =$ l'autre des 2 nombres
2^{ème} plus
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$
les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

2^{ème} plus:
 $x \times (10-x)$

3^{ème} plus:
soit : $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$
soit : $x^2 = 4x(10-x)$

Exemples

$y =$ 1^{re} partie
 $A =$ 2^{de} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
en fait $y + A$.

Un bijou est composé d'or et de perles et son poids est de trois grammes et sa valeur est de vingt-quatre euros. La valeur d'un gramme d'or est de cinq euros, celui d'un gramme de perles est de quinze euros. Nous voulons connaître le poids de chacun des deux composants.

Trois amis se partagent 475€ en trois parts : la part de Pablo doit être de 25€ de plus que celle de Léa. Celle d'Anaïs est le double de celle de Léa. Combien chacun va-t-il recevoir ?

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple de produit de l'une des deux parties

compréhension
de l'exercice

$$(10-x) \times (10-x) = 4 \times (20 \times x)$$

$y =$ 2^{ème} des 2 nombres $2x =$ l'autre des 2 nombres
2^{ème} place:
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$
les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

3^{ème} place:
soit : $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$
soit : $x^2 = 4x - 10$

Le choix de l'inconnue (des inconnues)

$y =$ ● Deux inconnues (une inconnue par référence)

$A =$ ● Une seule inconnue

$Z =$ ce qu'on a trouvé en faisant $y + A$.

l'ai ensuite multiplié une par elle même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x \times x = (x \times (10-x)) \times 4$

$$10-x$$

$$(10-x) \times x$$

$$(10-x) \times (10-x) = 4 \times (x \times x)$$

essai de la compréhension du texte

$y =$ l'un des 2 nombres / $x =$ l'autre des 2 nombres

1ère phase:

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

les 2 nombres sont: x et $(10-x)$

2ème phase:

$$x \times (10-x)$$

3ème phase:

$$\text{soit: } (10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$$

$$\text{soit: } x^2 = 4 \times (10-x)$$

Le choix de l'inconnue (des inconnues)

- Deux inconnues (une inconnue par référence)
- Une seule inconnue

Catégorie	Tarif
	15,80€
	18,50€



Pour aller sur l'île de Ré, il faut passer par un pont à péage. Une voiture paye 15,80€ pour passer et un bus paye 18,50€.

En une heure, 80 véhicules sont passés (voiture ou bus), pour une recette de 1309,90€. Combien de voitures et combien de bus sont passés pendant cette heure?

y = l'un des 2 nombres / x = l'autre des 2 nombres

2ème phase:
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$) les 2 nombres sont : x et $(10 - x)$

3ème phase:

$$x \times (10 - x)$$

3ème phase:

$$\text{soit : } (10 - x) \times (10 - x) = 4 \times (10 - x)^2$$

$$\text{soit : } x^2 = 4 \times (10 - x)^2$$

Le choix de l'inconnue (des inconnues)

- Deux inconnues (une inconnue par référence)
- Une seule inconnue

Catégorie	Tarif
	15,80€
	18,50€



Pour aller sur l'île de Ré, il faut passer par un pont à péage. Une voiture paye 15,80€ pour passer et un bus paye 18,50€.

En une heure, 80 véhicules sont passés (voiture ou bus), pour une recette de 1309,90€.

Combien de **voitures** et combien de **bus** sont passés pendant cette heure?

y = l'un des 2 nombres / x = l'autre des 2 nombres

2ème phase:

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

les 2 nombres sont : x et (10-x)

3ème phase:

$$x \times (10 - x)$$

3ème phase:

$$\text{soit : } (10 - x) \times (10 - x) = 4 \times (10 - x)^2$$

$$\text{soit : } x^2 = 4 \times (10 - x)^2$$

Le choix de l'inconnue (des inconnues)

Catégorie	Tarif
	15,80€
	18,50€



Pour aller sur l'île de Ré, il faut passer par un pont à péage. Une voiture paye 15,80€ pour passer et un bus paye 18,50€.

En une heure, 80 véhicules sont passés (voiture ou bus), pour une recette de 1309,90€.

Combien de voitures et combien de bus sont passés pendant cette heure?

$$\begin{aligned} 15,80x + 18,50y &= 1309,90 & x+y &= 80 \\ 15,80 \times 63 + 18,50 \times 17 &= 1309,90 \end{aligned}$$

$x = 63$ $y = 17$

$$x+y=10$$

$$y=10-x$$

les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

3ème phase:

$$x \times (10-x)$$

3ème phase:

$$\text{soit : } (10-x) \times (10-x) = 4 \times (10-x)^2$$

$$\text{soit : } x^2 = 4 \times (10-x)^2$$

Le choix de l'inconnue (des inconnues)

Catégorie	Tarif
	15,80€
	18,50€



Pour aller sur l'île de Ré, il faut passer par un pont à péage. Une voiture paye 15,80€ pour passer et un bus paye 18,50€.

En une heure, 80 véhicules sont passés (voiture ou bus), pour une recette de 1309,90€.

Combien de voitures et combien de bus sont passés pendant cette heure?

$$\begin{aligned} 15,80x + 18,50y &= 1309,90 & x+y &= 80 \\ 15,80 \times 63 + 18,50 \times 17 &= 1309,90 \\ x &= 63 & y &= 17 \end{aligned}$$

x = nombre de bus

et $(80-x)$

$$18,50x + 15,80 \cdot (80-x) = 1309,90$$

$$\text{soit } (80-x) \times (80-x) = 4 \times (80-x)^2$$

$$\text{soit } x^2 = 4 \times (80-x)^2$$

Méthodologie et recueil des données

Questionnaire de 2015 :

- élaboration d'expressions algébriques
- écriture d'énoncés
- résolution de problèmes
- recueil des réponses
- entretiens d'explicitation enregistrés et scriptés

Questionnaire de 2016

- situation de communication entre pairs
- élaboration d'énoncés validés (ou non) par des expressions algébriques

Comparaison 2015/2016 :

- réplique pour 5 élèves d'un problème posé en 2015
- pour un de ces élèves, on a expérimenté un protocole d'enregistrement de réflexion à voix haute

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même de sorte que cette multipliée par l'autre est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x \times (10-x) = (x \times (10-x)) \times 4$

essai de la compréhension du texte

$y =$ l'un des 2 nombres / $x =$ l'autre des 2 nombres

$x + (10-x) = 10$ les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

$x \times (10-x)$ doit : $x^2 = 4x(10-x)$

Analyse de travaux d'élèves

$y =$ 1^{ère} partie
 $A =$ 2^{ème} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
en faisant $y + A$

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $z \times z = (z \times (10-z)) \times 4$

Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.

- le questionnaire est individuel
- les élèves produisent des expressions à partir d'énoncés et *vice versa*
- un entretien d'explicitation est conduit avec les expérimentateurs juste après la passation

$y =$ l'un des 2 nombres / $x =$ l'autre des 2 nombres

2^{ème} phase:
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$) les 2 nombres sont : x et $(10 - x)$

3^{ème} phase:
 $x \times (10 - x)$
3^{ème} phase:
soit : $(10 - x) \times (10 - x) = 4 \times (10 - x)^2$
soit : $x^2 = 4 \times (10 - x)^2$

Analyse de travaux d'élèves

Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.

- le questionnaire est individuel
- les élèves produisent des expressions à partir d'énoncés et vice versa
- un entretien d'explicitation est conduit avec les expérimentateurs juste après la passation

Fred et Maxime sont chercheurs de trésor. Ils trouvent chacun deux coffres.

Ils ouvrent chacun un premier coffre : le coffre de Fred contient des pièces d'or et celui de Maxime en contient le double.

Ils ouvrent chacun leur deuxième coffre. Celui de Fred contient 70 pièces d'or et celui de Maxime 60 pièces d'or.

Le nombre de pièces d'or au total pour les quatre coffres est...

$$x + 2x + 70 + 60$$
$$x + x^2 + 130$$
$$2x$$

Lucas

Analyse de travaux d'élèves

Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.

- le questionnaire est individuel
- les élèves produisent des expressions à partir d'énoncés et vice versa

un entretien d'explicitation est conduit avec les expérimentateurs juste après la passation

Dominique a 10 diamants. Certains sont taillés en forme de cœur, ils valent 1000€ l'unité. Les autres sont taillés en ovale et valent 800€ l'unité. La valeur totale de ces dix diamants est...

$$x \times 1000 + y \times 800$$

$$x + y = 10$$

Lucas

3ème phase:

$$\text{soit : } (10-x) \times (10-x) = 4 \times (10-x-x^2)$$

Analyse de travaux d'élèves

Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.

- le questionnaire est individuel
- les élèves produisent des expressions à partir d'énoncés

et vice versa

- un entretien d'explicitation est conduit avec les expérimentateurs juste après la passation

Un bijou est composé d'or et de perles et son poids est de trois grammes et sa valeur est de vingt-quatre euros. La valeur d'un gramme d'or est de cinq euros, celui d'un gramme de perles est de quinze euros. Nous voulons connaître le poids de chacun des deux composants.

Lucas

$$\begin{array}{l} x \approx 2,1 \quad \text{gr} \\ y \approx 0,9 \\ x \times 5 + y \times 15 = 3 \quad 24 \quad \text{€} \\ x \times 15 = 3 \end{array}$$

Analyse de travaux d'élèves

$y =$ 1^{re} partie
 $A =$ 2^e partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
 en :

J'ai ensuite multiplié l'une par elle même, de sorte que cette multipliée par elle même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties

bijou fait d'or et de perles: poids: 3g

$$x + x \times 3 = 24$$

prix: 24 fr

1g d'or = 5 fr

$x =$ poids ~~de~~ de l'or

1g de perles = 15 fr

$x \times 3 =$ poids des perles

$$x + x \times 3 = 3$$

poids de l'or (g)	1	1,5
prix de l'or (fr)	5	7,5
poids des perles (g)	1	1,5
prix des perles (fr)	15	22,5

1,5 g d'or = 7,5 fr

1,5 g de perles = 22,5 fr

$$22,5 + 7,5 = 30$$

ce n'est pas le bon résultat

Pablo

3^{ème} phase:

3^{ème} phase:

$$\text{soit: } (10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$$

$$\text{soit: } x^2 = 4 \times (10 - x)$$

Analyse de travaux d'élèves

$y =$ 1^{ère} partie
 $A =$ 2^{ème} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé en faisant $y + A$.

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x \times x = (x \times (10-x)) \times 4$

$10-x$

essai de la compréhension

(1) Dominique a 10 diamants. Certains sont taillés en forme de cœur, ils valent 1000€ l'unité. Les autres sont taillés en ovale et valent 800€ l'unité. La valeur totale de ces dix diamants est...

$1000 \times x + 800 \times (10-x)$

$(10-x) \times (10-x) = 4 \times (x \times x)$
 Éléa

$y =$ l'un des 2 nombres / $x =$ l'autre des 2 nombres

2^{ème} phase:

$x + y = 10$
 $y = 10 - x$

les 2 nombres sont: x et $(10-x)$

3^{ème} phase:

$x \times (10-x)$

3^{ème} phase:

soit: $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$

soit: $x^2 = 4(10-x)$

Analyse de travaux d'élèves

$y =$ 1^{re} partie

$A =$ $x =$ poids de l'or

$$Z = 1) 5 \times x + 15 \times (3-x) = 24$$

en fait Pour trouver le poids des perles il faut faire $3-x$

J'ai ensuite multiplié l'une par elle même, de sorte que elle multipliée par

10-

$$5x + 15(3-x) = 24$$

(10-

$$5x + 45 - 15x = 24$$

(10-

$$5x + 45 = 24 + 15x$$

$$45 = 24 + 10x$$

$$45 - 24 = 10x$$

$$21 = 10x$$

$$2,1 = x$$

le poids de l'or est 2,1g
et le poids des perles est
de 0,9g.

$y =$ l'u
de plus
 $x + y =$
 $y =$

3^{ème} phase:

$$x \times (10-x)$$

3^{ème} phase:

$$\text{soit } (10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$$

$$\text{soit } x^2 = 4x + 40$$

Éléa

Analyse de travaux d'élèves

$y =$ 1^{ère} partie
 $A =$ 2^{ème} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
en faisant $y + A$.

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x \times (10-x) = (x \times (10-x)) \times 4$

Comparaison des travaux d'élèves (mai 2015/juin 2016).

- on a choisi 5 élèves parmi ceux qui avaient répondu au questionnaire de 2015
- ces 5 élèves ont résolu un des problèmes déjà donné un an auparavant
- pour un de ces élèves, on a expérimenté un protocole d'enregistrement de réflexion à voix haute

$10-x$
 $(10-x) \times x$
 $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (x \times x)$

compréhension du texte

$y =$ l'un des 2 nombres $x =$ l'autre
2^{ème} phase: $x + y = 10$
 $y = 10 - x$) les 2 nombres sont: x et $(10-x)$

1^{ère} phase:
 $x \times (10-x)$

3^{ème} phase:
soit: $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$
soit: $x^2 = 4 \times (10-x)$

Analyse de travaux d'élèves

$y =$ 1^o partie
 $A =$ 2^o partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé en faisant $y + A$.

$10 - x$

(1) 1g d'at = 5€ x B poids de 10g
 1g de reb = 15€ 3g de 25€

(2) ~~$5x + (24 - 5x)$~~

~~$5x + (24 - 5x) : 15 = 3$~~

~~$x + (1,6 - \frac{5}{15}x) = 3$~~

~~$3x + 1,6 + (-\frac{5}{15}x) = 3$~~

J'ai ensuite multiplié l'une par elle même, de sorte que cette multipliée par elle même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x^2 = (x \times (10 - x)) \times 4$

~~3g B poids de 10g pour 24 euros
 1g d'at = 5€
 1g de reb = 15€
 $5x + (24 - 5x) : 15 = 3$~~

$5x + 15 \times (3 - x) = 24$

$5x + 45 + (15 \times -x) = 24$

$(-10x) + 45 = 24$

$-10x = -21$

$x = 2,1$

2,1g d'at

$(24 - 2,1 \times 5) \cdot 15$

$= 0,9$

0,9g de reb

Lucas en 3^e

3^ome phase:

$x \times (10 - x)$

3^ome phase:

soit: $(10 - x) \times (10 - x) = 4 \times (10x - x^2)$

soit: $x^2 = 4 \times (10 - x)$

Analyse de travaux d'élèves

Y = 1^o partie
 A = 2^o partie
 Z = ce qu'on a en faisant Y+A.

$$10-x$$

$$(10-x) \times x$$

$$(10-x) \times (10-x)$$

Y = l'un des 2 non
 ou plus:
 $x+y=10$
 $y=10-x$

3^ome phase:
 $x \times (10-x)$

3^ome phase:
 soit: $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10-x-x^2)$
 soit: $x^2 = 4(10-x)$

Pablo en 3^o

poids du bijou = 3 g = 24 f
 1g d'or = 5 f 1,5 g d'or = 7,5 f
 1g de plat = 15 f 1,5 g de plat = 22,5 f
 1g de plat = 3 x 1 g d'or 24 f 3 g
 1g d'or = x 15 f 1g de plat
 1g de plat = y 5 f 1g d'or
 $x + y = 25 f$

$$x^2 + \dots \times y = 24 f$$

$$x + x + 15 = 24$$

$$2x = 9$$

$$x = 4,5 f$$

Si le bijou contient 1,5 g d'or et 1,5 g de plat:

$$7,5 + 22,5 = 30 f$$

ce n'est pas ça

$$L1: 10x + 2y = 35 \text{ €}$$

$$L2: 2x + 4y = 20 \text{ €}$$

$$L3: 2 \times L1$$

$$L3: 2x + 4y = 70 \text{ €}$$

$$L3 - L2: 2y = 50 \text{ €}$$

$$45 - 3 = 42$$

$$y = 15$$

la multipliée par
 ou qu'on multiplie
 les deux parties
 $(x \times (10-x)) \times 4$

compréhension

Analyse de travaux d'élèves

$y = 1^{\circ}$ partie
 $A = 2^{\circ}$ partie
 $Z =$ ce qu'on en fait $y + A$.

$10 - x$
 $(10 - x) \times x$
 $(10 - x) \times (10 - x)$

$y =$ l'un des 2 non
 une phrase:
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$

une phrase:
 $x \times (10 - x)$

soit: $(10 - x) \times (10 - x)$
 soit: $x^2 - 10x + 100$

OR:

perles	1	1,8
perles	5	9

$5 \times 1,8 = 9$
 $1,8 \text{ g d'a} = 9 \text{ f}$

PERLES

perles	1	1,2
perles	15	18

$15 \times 1,2 = 18 \text{ f}$
 $1,2 \text{ g de perles} = 18 \text{ f}$
 $1,8 \text{ g d'a} + 1,2 \text{ g de perles} = 9 + 18 = 27$
 $1,8 \text{ g d'a} = 9 \text{ f}$
 donc $1 \text{ g d'a} = 8 \text{ f}$
 et $1 \text{ g de perles} = 16 \text{ f}$

OR:

perles	1,8	16
perles	9	8

$8 \times 1,8 = 16 \text{ g d'a} = 8 \text{ f}$
 $16 \text{ f} + 8 \text{ f} = 24 \text{ f}$

PERLES

perles	1,2	$\frac{16}{15}$
perles	16	16

$\frac{16}{15} + 16 = \frac{8}{15}$

l'a multiplié par elle
 la multiplié par
 au quadruple
 des deux parties
 $(x \times (10 - x)) \times 4$

compréhension

Pablo en 3^e

Analyse de travaux d'élèves

$y = 10 - x$ 1° partie

$A = 2$ 2° partie

$Z = 24$ ce qui en fait Z

$$10 - x$$

$$(10 - x) \times x$$

$$(10 - x) \times ($$

$y =$ l'un des

de l'autre:

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

de l'autre:

$$x \times (10 - x)$$

1 bijou \uparrow et or = 3g = 24€

3g 1g or + 1g de perles + 1g de perle

$$x + y = 3$$

$$x \times 5 + y \times 15 = 24$$

$$x \times 5 + (3 - x) \times 15 = 24$$

$$5x + 45 - 15x = 24$$

$$45 - 10x = 24$$

$$-10x = -21$$

$$10x = 21$$

$$x = 2,1$$

1g or = 5 euros

1g de perles = 15€

$$x + y = 3$$

$$y = 3 - x$$

J'ai ensuite multiplié l'une par elle multipliée par l'autre pour les perles

compréhension

masse d'or est de 2,1g et la masse de perles est 0,9g.

Éléa en 3^e

Analyse de travaux d'élèves

Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.

$y = 1^{\text{e}}$ partie
 $A = 2^{\text{e}}$ partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
en faisant $y + A$.

elle-même multipliée par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x \times (10-x) = (x \times (10-x)) \times 4$

- essai de compréhension du texte*
- Quels énoncés favorisent l'utilisation d'une lettre unique ?
 - Quelles sont les procédures utilisées, les erreurs ?
 - Évolution 4^e/3^e : conclusions, quelles explications ?

$y =$ l'un des 2 nombres / $x =$ l'autre des 2 nombres

2^{ème} phase:
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$) les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

3^{ème} phase:
soit : $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10-x)^2$
soit : $x^2 = 6 \times (10-x)$

Analyse de travaux d'élèves

$y =$ Questionnaire donné à une classe de troisième en avril 2016.

$A = 2^{\circ}$ partie
 $Z =$ en fait $y + 1$

- la situation est une situation de communication de construction d'expressions algébriques entre deux élèves

$10-x$
 $(10-x) \times x$

- à partir d'une expression algébrique, un élève doit produire un texte qui est transmis à son voisin pour qu'il produise à nouveau une expression...

$(10-x) \times (10-x) = 4 \times (x \times x)$

- les élèves discutent de la validité de leur production (ils sont enregistrés)

$y =$ l'un des 2 nombres ($x =$ l'autre des 2 nombres)
ou plus
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$
les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

- on examine ici le travail de 5 élèves

Quels types d'écritures algébriques trouve-t-on ?

Quels types d'erreurs trouve-t-on ? Que révèlent ces erreurs ?

Analyse de travaux d'élèves

Dorian et Hugo

Situation 1 : $(10 - x) \times 2,50 + x \times 5,75$

(pas de réponse)

Situation 2 : $x \times 2,50 + (2x \times 3,50)$

Dans un supermarché, un employé du magasin met des produits dans les rayons. Il y a des boîtes de petits pots contenant 2,50€ et des boîtes de carottes contenant 3,50€. Son patron lui a demandé de mettre deux fois plus de boîtes de carottes dans les rayons. Le total des prix des boîtes mis dans le rayon sera de ...

$$(2,50 \times x) + (3,50 \times 2x)$$

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple de son premier terme. L'une des deux parties par exemple : $x \times x = (x \times (10-x)) \times 4$

Analyse de travaux d'élèves

Y = Léa

1. *Contre*

A =

Z =

en

Expression 1 (pour la situation 1) : $3 \times x + 7 \times (x + 2)$

$$\begin{array}{c} \text{nombre de gâteaux} \quad \text{nombre de } x \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ 3 \times x + 7 \times (x + 2) \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \text{prix} \quad \quad \text{prix} \end{array}$$

Expression 2 (pour la situation 2) : $200 \times x + 250 \times (25 - x)$

$$\begin{array}{c} \text{prix} \quad \quad \text{prix} \quad \quad \text{prix} \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ 200 \times x + 250 \times (25 - x) \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \text{prix} \quad \quad \text{prix} \quad \quad \text{prix} \end{array}$$

Situation 1 : 10 gâteaux sont achetés pour un mariage, il y

en a 3 au chocolat, et 7 aux fruits.

Un gâteau au fruit coûte le prix d'un gâteau au chocolat plus 2€.

Combien coûte le total ?

$$3 \times x + (7 \times (x + 2))$$

Situation 2 : Thomas a 450 billes, 200 de ces billes sont petites et rouges, et 250 sont plus grosses et vertes.

Une bille verte coûte 25 centimes de moins qu'une rouge.

Combien coûte le total ?

$$200 \times x + (250 \times (x - 25))$$

J'ai ensuite multiplié l'une par elle même, de sorte que cette multipliée par même est égale au quadruple produit de l'une des deux parties l'autre : $x \times x = (x \times (10 - x)) \times 4$

soit la compréhension

Analyse de travaux d'élèves

$y =$ 1^{ère} partie
 $A =$ 2^{ème} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé
en faisant $y + A$.

Manon

$$(10 - x) \times 2,50 + x \times 5,75$$

5 grand cahier a 5,75€

10 petits cahier a 2,50 € \rightarrow 5 sont offerts

Il achète 5 grands cahiers et 10 petits cahiers.
Combien va-t-il payer ?

il va payer 8,25

$$5x + 10(10-x) = 5x + 100 - 10x = 100 - 5x$$

3^{ème} phase:

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

3^{ème} phase:

$$x \times (10-x)$$

3^{ème} phase:

$$\text{soit : } (10-x) \times (10-x) = 4 \times (10-x)^2$$

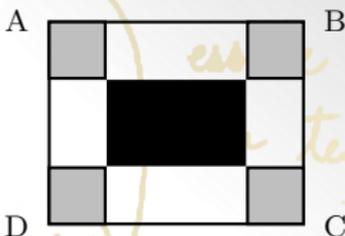
$$\text{soit : } x^2 = 4 \times (10-x)^2$$

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x \times x = (x \times (10-x)) \times 4$

compréhension

Compétences dans les cadres algébriques et numériques

ABCD est un rectangle tel que $AB = 30$ cm et $BC = 24$ cm.
On colore aux quatre coins du rectangle quatre carrés identiques en gris. On délimite ainsi un rectangle central que l'on colore en noir.



1 Dans cette question, les quatre carrés gris ont tous 7 cm de côté. Dans ce

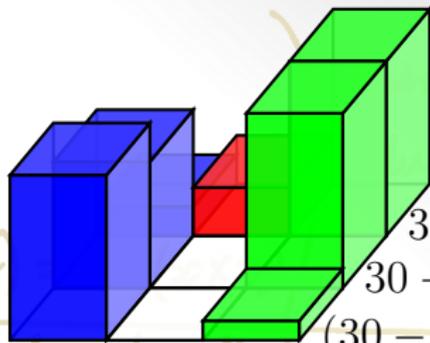
cas :

- quel est le périmètre d'un carré gris ?
- quel est le périmètre du rectangle noir ?

2 Dans cette question, la longueur du côté des quatre carrés gris peut varier. Par conséquent, les dimensions du rectangle noir varient aussi. Est-il possible que le périmètre du rectangle noir soit égal à la somme des périmètres des quatre carrés gris ?

Compétences dans les cadres algébriques et numériques

Comparaison des réponses à la première question (cadre numérique) et à la deuxième question (cadre algébrique).



$$30 - 14; 24 - 14$$

$$30 - 7 \times 2; 24 - 7 \times 2$$

$$(30 - 7 \times 2) \times 2 + (24 - 7 \times 2) \times 2$$

équation à une inconnue

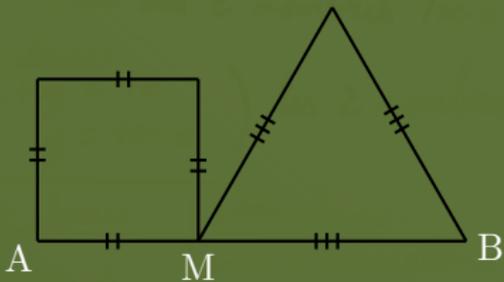
équation à deux inconnues

pas d'équation

Du côté des énoncés...

Trois amis se partagent 475€ en trois parts : la part de Pablo doit être de 25€ de plus que celle de Léa. Celle d'Anaïs est le double de celle de Léa. Combien chacun va-t-il recevoir ?

Le segment $[AB]$ mesure 10cm. Où placer le point M sur le segment $[AB]$ pour que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.



Dans un magasin d'électricité, on trouve deux types de prises : une prise « premier prix » à 1,30€ et une prise « qualité supérieure » à 2,10€.

Un électricien achète 26 prises en tout et doit payer 49€.

Sur les 26 prises, combien y a-t-il de prises « qualité supérieure » ?



2,10€



1,30 €

Au cinéma, une place adulte coûte 5€ de plus qu'une place enfant. Une famille de 3 enfants et 2 adultes a payé 29€. Quel est le prix d'une place enfant et le prix d'une place adulte ?

Typologie des énoncés

$y =$ 1^{ère} partie
 $A =$ 2^{ème} partie
 $Z =$ ce qu'on a trouvé en faisant $y + A$.

J'ai ensuite multiplié l'une par elle-même, de sorte que cette multipliée par elle-même est égale au quadruple du produit de l'une des deux parties par l'autre: $x \times x = (x \times (10-x)) \times 4$

La typologie des énoncés est un outil pour penser la mise en fonctionnement des connaissances des élèves.

- problème à référence unique
- problème à référence directe
- problème à référence indirecte

10-x
du texte
de la compréhension

$y =$ l'un des 2 nombres / $x =$ l'autre des 2 nombres
ou plus:
 $x + y = 10$
 $y = 10 - x$) les 2 nombres sont : x et $(10-x)$

ou plus:
 $x \times (10-x)$
ou plus:
soit : $(10-x) \times (10-x) = 4 \times (10-x)^2$
soit : $x^2 = 4 \times (10-x)^2$

Interprétations de nos observations

- les écrits produits par les élèves possèdent un statut ambivalent : ils sont situés « entre » le discours narratif et l'expression symbolique (Léa) (« Narratives symboliques »)
- la qualification des grandeurs semble être un moyen de repérer une articulation entre l'espace de la réalité (soumis aux contraintes exprimées sur les nombres) et l'espace de l'algèbre. Cette qualification pour nous est constitutive du contrôle.
- L'utilisation de problèmes à double référence ajoute une complexité liée à la substitution d'une expression algébrique dans une autre ; elle convoque la mise en oeuvre de la qualification ; l'absence de prise en compte des types de problèmes dans les manuels semble ignorer les effets soulignés par N. Bednarz.

Interprétations de nos observations

- Le traitement cognitif semble difficile pour certains élèves semble les conduire à se réfugier dans une procédure utilisant les données de l'énoncé sans leur donner de sens (surcharge cognitive ?) ;
- le contrôle syntaxique est plus que jamais imbriqué dans le contrôle sémantique ; il faut rejeter le modèle de résolution « mise en équation / résolution » dans un processus où la résolution serait détachée du contexte ;
- Les entretiens donnent à voir des élèves en plein questionnement dans l'explicitation des écrits qu'ils produisent. Ce sont peut-être des outils pour faire bouger les postures énonciatives ;
- les situations de construction d'expressions algébriques, nous semble intéressantes même si elle n'aboutissent pas nécessairement à la résolution d'équations et autorisant. L'utilisation d'un degré de liberté sur une variable libres, est pertinente eu égard à l'engagement des élèves dans ces tâches collectives qui apparaissent comme des tâches des résolution de problèmes. La constitution du milieu d'apprentissage à partir de telles tâches peut-elle contribuer à faire entrer les élèves dans le mode de fonctionnement culturellement situé de la pensée algébrique ?

x = ce qui a divisé
en deux parties 10.

y = 1^{re} partie

A = 2^{de} partie

Z = ce qu'on a trouvé
en faisant $y + A$.

J'ai divisé 10 en deux parties: x et $10-x$
J'ai multiplié l'une des deux parties par
l'autre: $x \times (10-x)$
J'ai ensuite multiplié l'une par elle
même de sorte que celle multipliée par
elle-même est égale au quadruple
du produit de l'une des deux parties
par l'autre: $x \times x = (x \times (10-x)) \times 4$

FIN

essai de la compréhension
du texte

$$10-x$$

$$(10-x) \times x$$

$$(10-x) \times (10-x) = 4 \times (x \times x)$$

y = l'un des 2 nombres / x = l'autre des 2 nombres

2^{ème} phase:

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

les 2 nombres sont: x et $(10-x)$

3^{ème} phase:

$$x \times (10-x)$$

3^{ème} phase:

$$\text{soit: } (10-x) \times (10-x) = 4 \times (10x - x^2)$$

$$\text{soit: } x^2 = 4 \times (10 - x)$$