# Langue naturelle et symboles dans les expressions algébriques au collège

*Comment favoriser la constitution du sens des expressions algébriques ?*

Philippe Le Borgne, Laboratoire de mathématiques de Besançon & IREM de Besançon
Jérôme Michaud-Bonnet, Collège de Pouilley-Les-Vignes & IREM de Besançon

Journées bisontines de didactique et d'épistémologie
4 mai 2017 – Besançon

# Notre recherche et quelques conséquences méthodologiques

- Une première étude sur les connaissances mobilisées dans la constitution des expressions algébriques dans les problèmes à double référence.
- Nos objectifs : identifier des fonctionnements chez les élèves qui permettent d'interpréter des erreurs et favoriser la constitution du sens des expressions algébriques.

# Des travaux en toile de fond

- Sur les procédures de contrôle mise en oeuvre dans le traitement arithmétique et algébrique des problèmes (Houdement, 2011, Saboya, Bednarz & Hitt, 2016)
- Sur les types de problèmes permettant de mettre en évidence les calculs relationnels impliqués dans la représentation et la résolution (Vergnaud, 1982). Ils soulignent les ruptures dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre (Bednarz, 1996, 1999, 2006).
- Sur le rôle du langage (Rébière, 2011) et des mécanismes sémiotiques en jeux selon des modes de fonctionnement culturellement constitués (Radford, 2007).

# De quoi parle-t-on ?

- Problèmes avec deux références (quantités perçues comme inconnues)
- Niveau collège (quatrième et troisième)
- Résolution avec une équation (premier degré)

# Exemples

Un bijou est composé d'or et de perles et son poids est de trois grammes et sa valeur est de vingt-quatre euros. La valeur d'un gramme d'or est de cinq euros, celui d'un gramme de perles est de quinze euros. Nous voulons connaître le poids de chacun des deux composants.

Trois amis se partagent 475€ en trois parts : la part de Pablo doit être de 25€ de plus que celle de Léa. Celle d'Anaïs est le double de celle de Léa. Combien chacun va-t-il recevoir ?

# Exemples

Un bijou est composé d'or et de perles et son poids est de trois grammes et sa valeur est de vingt-quatre euros. La valeur d'un gramme d'or est de cinq euros, celui d'un gramme de perles est de quinze euros. Nous voulons connaître le poids de chacun des deux composants.

Trois amis se partagent 475€ en trois parts : la part de Pablo doit être de 25€ de plus que celle de Léa. Celle d'Anaïs est le double de celle de Léa. Combien chacun va-t-il recevoir ?

# Exemples

Un bijou est composé d'or et de perles et son poids est de trois grammes et sa valeur est de vingt-quatre euros. La valeur d'un gramme d'or est de cinq euros, celui d'un gramme de perles est de quinze euros. Nous voulons connaître le poids de chacun des deux composants.

Trois amis se partagent 475€ en trois parts : la part de Pablo doit être de 25€ de plus que celle de Léa. Celle d'Anaïs est le double de celle de Léa. Combien chacun va-t-il recevoir ?

# Le choix de l'inconnue (des inconnues)

- Deux inconnues (une inconnue par référence)
- Une seule inconnue

# Le choix de l'inconnue (des inconnues)

- Deux inconnues (une inconnue par référence)
- Une seule inconnue

| Catégorie | Tarif |
|---|---|
|  | 15,80€ |
|  | 18,50€ |

Pour aller sur l'île de Ré, il faut passer par un pont à péage. Une voiture paye 15,80€ pour passer et un bus paye 18,50€.
En une heure, 80 véhicules sont passés (voiture ou bus), pour une recette de 1309,90€. Combien de voitures et combien de bus sont passés pendant cette heure ?

# Le choix de l'inconnue (des inconnues)

- Deux inconnues (une inconnue par référence)
- Une seule inconnue

| Catégorie | Tarif |
|---|---|
|  | 15,80€ |
|  | 18,50€ |

Pour aller sur l'île de Ré, il faut passer par un pont à péage. Une voiture paye 15,80€ pour passer et un bus paye 18,50€.
En une heure, 80 véhicules sont passés (voiture ou bus), pour une recette de 1309,90€.
Combien de voitures et combien de bus sont passés pendant cette heure ?

# Le choix de l'inconnue (des inconnues)

| Catégorie | Tarif |
|---|---|
|  | 15,80€ |
|  | 18,50€ |

Pour aller sur l'île de Ré, il faut passer par un pont à péage. Une voiture paye 15,80€ pour passer et un bus paye 18,50€.
En une heure, 80 véhicules sont passés (voiture ou bus), pour une recette de 1309,90€.
Combien de voitures et combien de bus sont passés pendant cette heure ?

$15,80 \times x + 18,50 \times y = 1309,90 \qquad x+y=80$

$15,80 \times 63 + 18,50 \times 17 = 1309,90$

$x = 63 \qquad y = 17$

# Le choix de l'inconnue (des inconnues)

| Catégorie | Tarif |
| --- | --- |
|  | 15,80€ |
|  | 18,50€ |

Pour aller sur l'île de Ré, il faut passer par un pont à péage. Une voiture paye 15,80€ pour passer et un bus paye 18,50€.

En une heure, 80 véhicules sont passés (voiture ou bus), pour une recette de 1309,90€. Combien de voitures et combien de bus sont passés pendant cette heure ?

$15,80 \times x + 18,50 \times y = 1309,90$  $x+y=8$

$15,80 \times 63 + 18,50 \times 17 = 1309,90$

$x = 63$  $y = 17$

$x$ : nombre de bus

$18,50x + 15,80 \times (80-x) = 135,30$

# Méthodologie et recueil des données

Questionnaire de 2015 :

- élaboration d'expressions algébriques
- écriture d'énoncés
- résolution de problèmes
- recueil des réponses
- entretiens d'explicitation enregistrés et scriptés

Questionnaire de 2016

- situation de communication entre pairs
- élaboration d'énoncés validés (ou non) par des expressions algébriques
- débats enregistrés

Comparaison 2015/2016 :

- réplique pour 5 élèves d'un problème posé en 2015
- pour un de ces élèves, on a expérimenté un protocole d'enregistrement de réflexion à voix haute

# Analyse de travaux d'élèves

*Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.*

- le questionnaire est individuel
- les élèves produisent des expressions à partir d'énoncés et *vice versa*
- *un entretien d'explicitation est conduit avec les expérimentateurs juste après la passation*

# Analyse de travaux d'élèves

*Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.*

- le questionnaire est individuel
- les élèves produisent des expressions à partir d'énoncés et *vice versa*
- *un entretien d'explicitation est conduit avec les expérimentateurs juste après la passation*

| | |
|---|---|
| Fred et Maxime sont chercheurs de trésor. Ils trouvent chacun deux coffres.<br>Ils ouvrent chacun un premier coffre : le coffre de Fred contient des pièces d'or et celui de Maxime en contient le double.<br>Ils ouvrent chacun leur deuxième coffre. Celui de Fred contient 70 pièces d'or et celui de Maxime 60 pièces d'or.<br>Le nombre de pièces d'or au total pour les quatre coffres est... | $x + \cancel{x^2}\, 2x + 70 + 60$<br>$x + \underset{2x}{\cancel{x^2}} + 130$ |

Lucas

# Analyse de travaux d'élèves

*Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.*

- le questionnaire est individuel
- les élèves produisent des expressions à partir d'énoncés et *vice versa*
- *un entretien d'explicitation est conduit avec les expérimentateurs juste après la passation*

| | |
|---|---|
| Dominique a 10 diamants. Certains sont taillés en forme de cœur, ils valent 1 000€ l'unité. Les autres sont taillés en ovale et valent 800€ l'unité. La valeur totale de ces dix diamants est… | $x \times 1000 + y \times 800$<br>$x + y = 10.$ |

Lucas

# Analyse de travaux d'élèves

*Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.*

- le questionnaire est individuel
- les élèves produisent des expressions à partir d'énoncés et *vice versa*
- *un entretien d'explicitation est conduit avec les expérimentateurs juste après la passation*

> Un bijou est composé d'or et de perles et son poids est de trois grammes et sa valeur est de vingt-quatre euros. La valeur d'un gramme d'or est de cinq euros, celui d'un gramme de perles est de quinze euros. Nous voulons connaître le poids de chacun des deux composants.

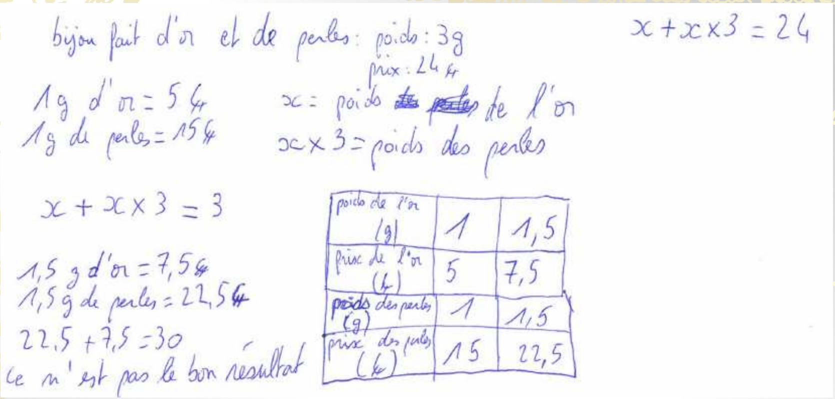
$x \simeq 2,1$ $\quad$ ~~5,5~~

$y \simeq 0,9$

$x \times 5 + y \times 15 = 3\ 24.$ $\quad$ $x.+y = 3$

Lucas

# Analyse de travaux d'élèves



bijou fait d'or et de perles : poids : 3g
prix : 24 €

$x + x \times 3 = 24$

1g d'or = 5 €
1g de perles = 15 €

$x$ = poids ~~de perles~~ de l'or
$x \times 3$ = poids des perles

$x + x \times 3 = 3$

1,5 g d'or = 7,5 €
1,5 g de perles = 22,5 €
22,5 + 7,5 = 30
ce n'est pas le bon résultat

| | | |
|---|---|---|
| poids de l'or (g) | 1 | 1,5 |
| prix de l'or (€) | 5 | 7,5 |
| poids des perles (g) | 1 | 1,5 |
| prix des perles (€) | 15 | 22,5 |

Pablo

# Analyse de travaux d'élèves

| | |
|---|---|
| Dominique a 10 diamants. Certains sont taillés en forme de cœur, ils valent 1 000€ l'unité. Les autres sont taillés en ovale et valent 800€ l'unité. La valeur totale de ces dix diamants est... | $1000 \times x + 800 \times (10-x)$ |

Éléa

# Analyse de travaux d'élèves

$x$ = poids de l'or

1) $5 \times x + 15 \times (3-x) = 24$

Pour trouver le poids des perle il faut faire $3-x$

$5 \times x + 15(3-x) = 24$

$5x + 45 - 15x = 24$

$5x + 45 = 24 + 15x$

$45 = 24 + 10x$

$45 - 24 = 10x$

$21 = 10x$

$2{,}1 = x$

le poids de l'or est 2,1g et le poids des perles est de 0,9g.

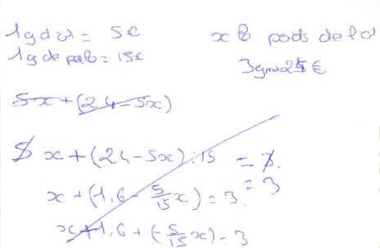
Éléa

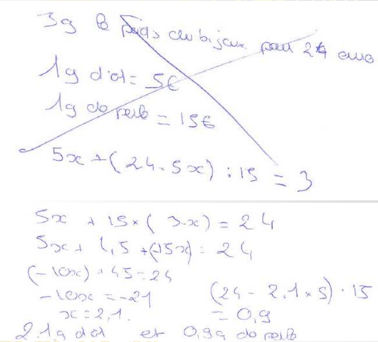
# Analyse de travaux d'élèves

Comparaison des travaux d'élèves (mai 2015/juin 2016).

- on a choisi 5 élèves parmi ceux qui avaient répondu au questionnaire de 2015
- ces 5 élèves ont résolu un des problèmes déjà donné un an auparavant
- pour un de ces élèves, on a expérimenté un protocole d'enregistrement de réflexion à voix haute

# Analyse de travaux d'élèves




Lucas en 3e

# Analyse de travaux d'élèves

poids du bijou = 3 g = 24 €

1 g d'or = 5 € — 1,5 g d'or = 7,5 €

1 g de perles = 15 € — 1,5 g de perles = 22,5 €

1 g de perles = 3 × 1 g d'or

| | |
|---|---|
| 24 € | 3 g |
| 15 € | 1 g de perles |
| 5 € | 1 g d'or |

1 g d'or = $x$

1 g de perles = $y$

$x + y = 25$ €

~~[illegible]~~

$\ldots \times x + \ldots \times y = 24$ €

$x + x + 15 = 24$

$2x = 9$

$x = 4,5$ €

Si le ~~[illegible]~~ collier contient 1,5 g d'or et 1,5 g de perles :

$7,5 + 22,5 = 30$ €

ce n'est pas ça

$L_1 : 1x + 2y = 35$ €

$L_2 : 2x + 1y = 25$ €

$L_3 = 2 \times L_1$

$L_3 = 2x + 4y = 70$ €

$L_3 - L_2 = 3y = 45$

$45 \div 3 = 15$

$y = 15$

Pablo en 3e

# Analyse de travaux d'élèves

OR :

| poids en g | 1 | 1,8 |
|---|---|---|
| prix en euro | 5 | 9 |

$5 \times 1{,}8 = 9$

1,8 g d'or = 9 €

PERLES

| poids en g | 1 | 1,2 |
|---|---|---|
| prix en € | 15 | 18 |

$15 \times 1{,}2 =$ 18 €

1,2 g de perles = 18 €

1,8 g d'or + 1,2 g de perles = 9 + 18 = 27

1,8 g d'or = 9 €

donc ? g d'or = 8 €

et ? g de perles = 16 €

PERLES

| poids en g | 1,2 | $\frac{16}{15}$ |
|---|---|---|
| prix en € | 18 | 16 |

$\frac{16 \times 1{,}2}{18} = \frac{16}{15}$

$\frac{16}{15} + 1{,}6 = \frac{8}{3}$

16 € + 8 € = 24 €

OR

| poids en g | 1,8 | 1,6 |
|---|---|---|
| prix en € | 9 | 8 |

$8 \times 1{,}8 \div 9 = 1{,}6$ g d'or = 8 €

Pablo en 3e

# Analyse de travaux d'élèves

1 bijou p et or = 3g
= 24 €

1g or = 5 euros
1g de perles = 15 €

3g 1g or + 1g de perles + 1g de perle

$x + y = \cancel{\dots}€$

$x$ masse d'or $x + y = 3g$

$x \times 5 + y \times 15 = 24$

$x + y = 3$
$y = 3 - x$

$x \times 5 + (3 - x) \times 15 = 24$

$5x + 45 - 15x = 24$

$45 - 10x = 24$

$-10x = -21$

$10x = 21$

$x = 2{,}1$

masse d'or est de 2,1g et la masse de perle est 0,9g.

Éléa en 3e

# Analyse de travaux d'élèves

*Questionnaire donné à une classe de quatrième en mai 2015.*

- Quels énoncés favorisent l'utilisation d'une lettre unique ?
- Quelles sont les procédures utilisées, les erreurs ?
- Évolution $4^{e}/3^{e}$ : conclusions, quelles explications ?

# Analyse de travaux d'élèves

*Questionnaire donné à une classe de troisième en avril 2016.*

- la situation est une situation de communication de construction d'expressions algébriques entre deux élèves
- à partir d'une expression algébrique, un élève doit produire un texte qui est transmis à son voisin pour qu'il produise à nouveau une expression...
- les élèves discutent de la validité de leur production (*ils sont enregistrés*)
- on examine ici le travail de 5 élèves

Quels types d'écritures algébriques trouve-t-on ?

Quels types d'erreurs trouve-t-on ? Que révèlent ces erreurs ?

# Analyse de travaux d'élèves

Dorian et Hugo

Situation 1 : $(10 - x) \times 2,50 + x \times 5,75$

*(pas de réponse)*

Situation 2 : $x \times 2,50 + (2x \times 3,50)$

Dans un supermarché, une employé du magasin met des produits dans les rayons. Il y a des boîtes de petits pois coûtant 2,50€ et des boîtes de carottes coûtant 3,50€. Son patron lui a ordonné de mettre deux fois plus de boîtes de carottes dans les rayons. Le total des prix des boîtes mis dans le rayons sera de ...

$(2,50 \times x) + (3,50 \times 2x)$.

## Léa

nombre de [illegible] nombre de [illegible]

**Expression 1** (pour la situation 1) : $3 \times x + 7 \times (x + 2)$

prix prix

**Expression 2** (pour la situation 2) : $200 \times x + 250 \times (25 - x)$

[illegible] [illegible] prix [illegible] ? [illegible]

**Situation 1** : 10 gateaux sont achetés pour un mariage, il y en a 3 au chocolat, et 7 aux fruits.
Un gateau au fruit coûte le prix d'un gateau au chocolat plus 2€.
Combien coûte le total ?

$3 \times x + (7 \times x + 2)$

**Situation 2** : Thomas a 450 billes, 200 de ces billes sont petites et rouges, et 250 sont plus grosses et vertes.
Une bille verte coûte 25 centimes de moins qu'une Rouge.
Combien coûte le total ?

$200 \times x + (250 \times x - 25)$

# Analyse de travaux d'élèves

Manon

$(10 - x) \times 2,50 + x \times 5,75$

5 grand cahier a 5,75 €

10 petits cahier à 2,50 → 5 sont offerts

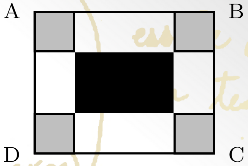
Il achète 5 grands cahiers et 10 petits cahiers.
Combien va-t-il payer ?

Il va payer 8,25

$5x + 10x \cancel{+} 5x =$

# Compétences dans les cadres algébriques et numériques

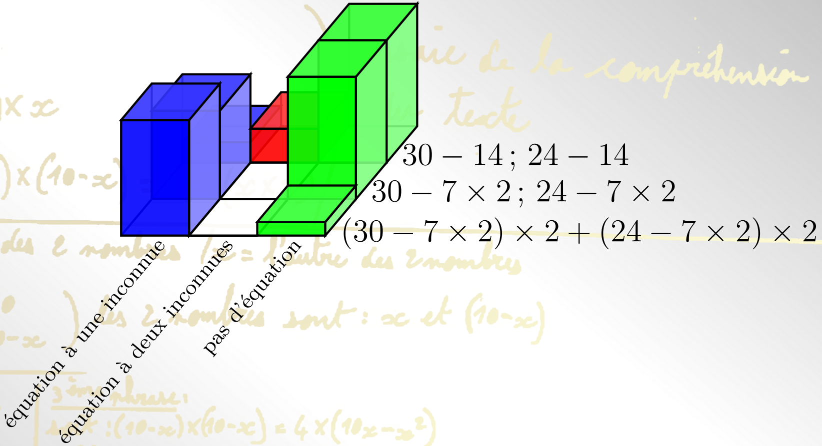
ABCD est un rectangle tel que AB = 30 cm et BC = 24 cm.
On colorie aux quatre coins du rectangle quatre carrés identiques en gris. On délimite ainsi un rectangle central que l'on colorie en noir.




1. Dans cette question, les quatre carrés gris ont tous 7 cm de côté. Dans ce cas :
   a. quel est le périmètre d'un carré gris ?
   b. quel est le périmètre du rectangle noir ?
2. Dans cette question, la longueur du côté des quatre carrés gris peut varier. Par conséquent, les dimensions du rectangle noir varient aussi.
   Est-il possible que le périmètre du rectangle noir soit égal à la somme des périmètres des quatre carrés gris ?

# Compétences dans les cadres algébriques et numériques

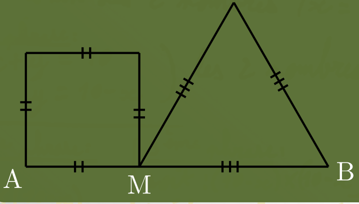
Comparaison des réponses à la première question (cadre numérique) et à la deuxième question (cadre algébrique).



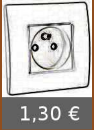
# Du côté des énoncés. . .

Trois amis se partagent 475€ en trois parts : la part de Pablo doit être de 25€ de plus que celle de Léa. Celle d'Anaïs est le double de celle de Léa. Combien chacun va-t-il recevoir ?

Le segment [AB] mesure 10cm. Où placer le point M sur le segment [AB] pour que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.




Dans un magasin d'électricité, on trouve deux types de prises : une prise « premier prix » à 1,30€ et une prise « qualité supérieure » à 2,10€.
Un électricien achète 26 prises en tout et doit payer 49€.
Sur les 26 prises, combien y a-t-il de prises « qualité supérieure » ?


Au cinéma, une place adulte coûte 5€ de plus qu'une place enfant. Une famille de 3 enfants et 2 adultes a payé 29€. Quel est le prix d'une place enfant et le prix d'une place adulte ?

# Typologie des énoncés

La typologie des énoncés est un outil pour penser la mise en fonctionnement des connaissances des élèves.

- problème à référence unique
- problème à référence directe
- problème à référence indirecte
- ...

# Interprétations de nos observations

- les écrits produits par les élèves possèdent un statut ambivalent : ils sont situés « entre » le discours narratif et l'expression symbolique (Léa) (« Narratives symboliques » )
- la qualification des grandeurs semble être un moyen de repérer une articulation entre l'espace de la réalité (soumis aux contraintes exprimées sur les nombres) et l'espace de l'algèbre. Cette qualification pour nous est constitutive du contrôle.
- L'utilisation de problèmes à double référence ajoute une complexité liée à la substitution d'une expression algébrique dans une autre ; elle convoque la mise en oeuvre de la qualification ; l'absence de prise en compte des types de problèmes dans les manuels semble ignorer les effets soulignés par N. Bednarz.

# Interprétations de nos observations

- Le traitement cognitif semble difficile pour certains élèves semble les conduire à se réfugier dans une procédure utilisant les données de l'énoncé sans leur donner de sens (surcharge cognitive ?) ;
- le contrôle syntaxique est plus que jamais imbriqué dans le contrôle sémantique ; il faut rejeter le modèle de résolution « mise en équation / résolution » dans un processus où la résolution serait détachée du contexte ;
- Les entretiens donnent à voir des élèves en plein questionnement dans l'explicitation des écrits qu'ils produisent. Ce sont peut-être des outils pour faire bouger les postures énonciatives ;
- les situations de construction d'expressions algébriques, nous semble intéressantes même si elle n'aboutissent pas nécessairement à la résolution d'équations et autorisant. L'utilisation d'un degré de liberté sur une variable libres, est pertinente eu égard à l'engagement des élèves dans ces tâches collectives qui apparaissent comme des tâches des résolution de problèmes. La constitution du milieu d'apprentissage à partir de telles tâches peut-elle contribuer à faire entrer les élèves dans le mode de fonctionnement culturellement situé de la pensée algébrique ?

FIN