Révolution symbolique, révolution scientifique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique

Michel Serfati.
IREM de Paris-Université Paris-Diderot

.

Journées bisontines de didactique et d'épistémologie.

Le symbolisme en mathématiques
4 mai 2017

operationis. Probatio est, vt in exemplo, cubus & quadrata 3. æquentur 21. æstimatio ex his regulis est, ℞. v. cubica $9\frac{1}{2}$ p̄. ℞. $89\frac{1}{4}$ p̄. ℞. v. cubica $9\frac{1}{2}$ m̄. ℞. $89\frac{1}{4}$ m̄. 1. cubus igitur est hic constans ex septem partibus,

12. m̄. ℞. cubica, $4846\frac{1}{2}$ p̄. ℞. $23487833\frac{1}{4}$ m̄. ℞. v. cubica $4846\frac{1}{2}$ m̄. ℞. $23487833\frac{1}{4}$ p̄. ℞. v. cub. $46041\frac{3}{4}$ p̄. ℞. $2119776950\frac{7}{8}$ m̄. ℞. $2096286117\frac{9}{16}$ p̄. ℞. v. cub. $46041\frac{3}{4}$ p̄. ℞. $2096354180\frac{13}{16}$ p̄. ℞. v. cub. $46041\frac{3}{4}$ p̄. ℞. $2096354180\frac{13}{16}$ m̄. ℞. $2096289117\frac{9}{16}$ m̄. ℞. $2119776950\frac{7}{8}$ p̄. ℞. v. cub. $226\frac{1}{2}$ p̄. ℞. $65063\frac{1}{4}$ p̄. ℞. v. cub. $256\frac{1}{2}$ m̄. ℞. $65063\frac{1}{4}$

Tria autem quadrata sunt ex septem partibus hoc modo,

9. p̄. ℞. v. cub. $4846\frac{1}{2}$, p̄. ℞. $23487833\frac{1}{4}$,
p̄. ℞. v. cub. $4846\frac{1}{2}$ m̄. ℞. $23487833\frac{1}{4}$
m̄. ℞. v. cub. $256\frac{1}{2}$ p̄. ℞. $65063\frac{1}{4}$
m̄. ℞. v. $256\frac{1}{2}$ m̄. ℞. $65063\frac{1}{4}$
m̄. ℞. v. cub. $256\frac{1}{2}$ p̄. ℞. $65063\frac{1}{4}$
m̄. ℞. v. cub. $256\frac{1}{2}$ m̄. ℞. $65063\frac{1}{4}$

Inde iunctis tribus quadratis cum cubo sex partes, quæ sunt ℞. v. cubicæ æquales p̄. cum m̄. cadunt & relinquitur 21. ad amussim aggregatum.

Figure 1

"Ars Magna" de Cardan (1545)
ici édition de 1663

Géométrie de Descartes (1637) ([A.T VI], 473) :

Or ſi on a $z^3 \infty * - pz + q$, la reigle dont Cardan attribue l'inuention a vn nommé Scipio Ferreus, nous apprent que la racine eſt,

$$\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

Comme auſſy lorſqu'on a $z^3 \infty * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme eſt plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultieſme, vne pareille reigle nous apprent que la racine eſt,

$$\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

Les figures de la représentation symbolique.

1°) **La représentation du « requis »**

2°) **La** ***dialectique de l'indéterminé*** (l**a représentation du «donné»**).

3°) **La structuration par assembleurs (représentation des instructions opératoires élémentaires)**

4°) ***L'ambiguïté de l'ordre*** **(représentation de la succession et l'*****enchevêtrement*** **des instructions**).

5°) **La représentation de la mise en relation,** au moyen par exemple des signes = (Recorde), $>$ (Harriot), $\propto$ (Descartes).

6°) **La représentation des concepts composés**, à partir de l'exemple fondateur de la « lignée » des puissances (carrés, cubes, bicarrés, etc.)..

V.- La dialectique de l'indéterminé

(l'«arbitraire, mais fixé»)

(deuxième figure)

Viète :

« Or afin que ceci soit aidé par l'art, les grandeurs données seront distinguées des requises par un symbole constant perpétuel et apparent, en signifiant les grandeurs requises par l'élément Alphabétique A, ou quelques autres voyelles, E, I, O, U, Y, et les données par les éléments B, C, D, ou quelque autre des consonnes ».

«If a theorem is proved concerning n, it must not be supposed that n is a kind of arithmetical Proteus, which is 1 on Sundays and 2 on Mondays, and so on. Nor must it be supposed that n simultaneously assumes all its values».

The principles of mathematics =
[Russell 1903], Chapitre VIII, *The variable*,p. 90.

«Dans son papier de 1926 des *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert dit que les objets de la pensée mathématiques sont les symboles eux-mêmes. Les symboles sont l'essence ; ils ne valent plus désormais pour des objets physiques idéalisés. Les formules peuvent impliquer des énoncés intuitivement signifiants, mais ces implications ne font pas partie des mathématiques» (M. Kline, *Mathematical Thought* (...), p. 1204)

V.- L‘exponentielle cartésienne et

la représentation des concepts composés.

(Sixième figure)

Dans le système cossique, l'inconnue (dénommée la « Chose ») avait pour symbole , le « Carré », ou *Census* était usuellement représenté, chez Stiefel ou Rudolff par exemple par , et le « Cube » par . De même, le « bicarré » avait pour signe , etc.

La *Coss* (1525), de Rudolff, expose ainsi un des premiers inventaires de tels signes, avec dix niveaux :

ϕ	dragma oder numerus
ꝛe	radix
ʒ	zenſus
ce	cubus
ʒʒ	zenſdezens
ß	ſurſolidum
ʒce	zenſicubus
bß	biſſurſolidum
ʒʒʒ	zenſzenſdezens
cce	cubus de cubo

¶ Dragma oder numerus würt hie genomē gleich ſam 1. iſt kein zal ſunder gibt andern zalen ir weſen

Descartes dans les *Cogitationes Privatae* de 1619-1621 :

Fit præterea æquatio inter talia, ℭ, ʒ, ℜ, dummodo quot ſint ʒ tot ℜ, & hoc modo :

1 ℭ æqu. 6 ʒ − 6 ℜ + 56

Reduco ad numerum radicum ternarium, habeboque

$\frac{1}{2}$ ℭ æqu. 3 ʒ − 3 ℜ + 28.

Deinde ex N tollo vnitatem, ex reſiduo cubum formo, cujus radici vnitatem addo, & quod cubice producitur ex illâ radice eſt $\frac{1}{2}$ ℭ ; quod ſi multiplicetur per 2, producet cubum quæſitum [a].

Sed ſi non ſunt tot ʒ quot ℜ, reducemus ad fractiones, ita vt horum numeri ſuperiores ſint æquales hoc pacto : vt 36 + 3 ʒ − 6 ℜ æqu. 1 ℭ reducam ad

Dans l'*Arithmetica Integra*, paru à Nuremberg en 1544, Stiefel se propose en effet de résoudre :

$$1\ \mathfrak{z}\,\mathfrak{z} + 2\ \mathfrak{c} + 6\ \mathfrak{z} + 5\ \mathfrak{x} + 6\ \text{ aequ. } 5550$$

Pour ce faire, Stiefel introduisit, sans explications, l'expression nouvelle :

$$1\ \mathfrak{z} + 1\ \mathfrak{x} + 2$$

et constate — sans aucun calcul explicite ! — que si on ajoute à cette dernière son propre carré, on obtient le premier membre de l'équation initiale. Ceci demande commentaire : il s'agit d'abord de calculer le carré de

$$1\ \mathfrak{z} + 1\ \mathfrak{x} + 2.$$

Or ce carré *ne peut pas s'écrire symboliquement* dans le système cossique, la représentation au moyen du signe $\mathfrak{z}$ ne permettant en effet que l'écriture du carré $\mathfrak{z}$ de la seule « Chose » initiale $\mathfrak{x}$

En termes modernes :

$$(x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) = x^4 + 2\ x^3 + 6\ x^2 + 5\ x + 6.$$

Stiefel ne commente pas ce fait véritablement très spécifique, qui permet la résolution. Il me paraît vraisemblable, compte tenu du contexte, que pour contruire son exemple, il soit parti en sens inverse à partir de la solution (x=8), en construisant pas à pas directement les équations successives.

Pour évoquer le carré de l'expression nouvelle, Stiefel aura donc été contraint d'abandonner la représentation symbolique directe des puissances et de multiplier l'expression par elle-même :

(1 ʒ + 1 ꝛ + 2) . (1 ʒ + 1 ꝛ + 2)

Dans ces conditions donc, et pour continuer le calcul, il aura alors impérativement dû savoir faire son affaire d'expressions comme

1 ꝛ . 1 ʒ

par exemple. À cet effet, il aura aussi été dans l'obligation, dans un premier temps, de faire intervenir quatre des règles multiplicatives élémentaires régissant les signes cossiques, dont voici deux instances:

1 ꝛ . 1 ꝛ égal à 1 ʒ

(de la « Chose » par de la « Chose » fait du « Carré »)

1 ꝛ . 1 ʒ égal à 1 ꝯ

(de la « Chose » par du « Carré » fait du « Cube »).

Moyennant quoi, on pourra effectivement constater que :

(1 ʒ + 1 ꝛ + 2) . (1 ʒ + 1 ꝛ + 2) est égal à

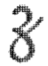
1 ʒʒ + 2 ꝯ + 5 ʒ + 4 ꝛ + 4.

À ce dernier résultat, Stiefel aura ajouté enfin l'expression nouvelle elle-même, soit 1 ʒ + 1 ꝛ + 2 ; il vient alors :

1 ʒʒ + 2 ꝯ + 6 ʒ + 5 ꝛ + 6,

c'est-à-dire le premier membre de l'équation initiale.

Une obscurité et une complexité qui ne sont cependant pas conjoncturelles, mais résultent d’impossibilités structurelles. Répétons le : Stiefel savait bien écrire  comme le carré de la chose . Il ne pouvait par contre pas écrire le carré de

1.  + 1.  + 2

d'une façon structurellement analogue, comme nous le faisons aujourd’hui dans le système cartésien, en remplaçant très simplement A par A^2. En d'autres termes encore, les « formes » cossiques 1.  et 1.  + 1.  + 2 ne pouvaient être librement substituées l'une à l'autre dans l'expression symbolique d'un « Carré ». Naturellement, ceci était tout aussi impossible pour une «forme symbolique quelconque, telle 3  + 5.

La question de plusieurs inconnues.

Ce fut par exemple le cas chez Clavius qui, utilisant d'une part le système cossique de Rudolff pour une première inconnue, représenta dans l'*Algebra* diverses autres inconnues selon 1_q, 2_q, 3q (*Algebra*, p. 72)

1_q représentait donc la « Chose » inconnue nouvelle.

Ce système cossique élargi, lui aussi naturel, n'était malheureusement pas en vérité davantage satisfaisant ! En présence de deux inconnues représentées par 1. 2e et 1_q, le système de Clavius ne permettait toujours pas de représenter le cube d'une quantité aussi aisée à écrire que 1. 2e + 1_q. Pour prendre en compte un tel « Cube », Clavius ne pouvait donc davantage employer son système symbolique neuf, et devait donc, comme tout à l'heure Stiefel, impérativement revenir à la multiplication

(1. 2e + 1_q.) . (1. 2e + 1_q.) (1. 2e + 1_q.)

Mais pour opérer cette multiplication à deux variables, les géométres du temps auraient eu besoin de nouveaux ensembles plus complexes de règles (des **super-tables**) fournissant cette fois, la valeur par exemple de

1. 2e 1q. 1. 2e 1q. 1. 2e

Diophante.

ζ	l'arithme,
Δ^{γ}	le Carré (δὺναμιζ)
K^{γ}	le Cube (Kὺβοζ)
$\Delta^{\gamma}\Delta$	le Bicarré (δυναμοδὺναμιζ)
ΔK^{γ}	le Carré-Cube (δυναμὸKὺβοζ.)
$K^{\gamma}K.$	le Cubo-Cube (KὺβὸKὺβοζ .)
S^{χ}	l'inverse de l'inconnue.
$\Delta^{Y\chi}$	le carré de l'inverse de l'inconnue.

« Après t'avoir exposé la dénomination de chacun de ces nombres, je passe à leur multiplications, lesquelles te paraîtront claires, en raison même de ce que nous avons déjà dit de la dénomination. Ainsi, l'arithme multiplié par l'arithme donne son carré ; l'arithme multiplié par son carré donne son cube ; l'arithme multiplié par son cube donne son bicarré ; l'arithme multiplié par son bicarré donne son carré-cube ; et l'arithme multiplié par son carré-cube donne son cubocube. D'autre part, le carré de l'arithme multiplié par son carré donne son bicarré ; le carré de l'arithme multiplié par son cube donne son carré-cube ; le carré de l'arithme multiplié par son bicarré donne son cubocube ; enfin le cube de l'arithme multiplié par son cube donne son cubocube. »

Res in Rem fit Census

La table des puissances chez Viète.

Table des produicts des grandeurs scalaires.

côté	q	c	qq	qc	cc	qqc
q	qq	qc	cc	qqc	qcc	ccc
c	qc	cc	qqc	qcc	ccc	qqcc
qq	cc	qqc	qcc	ccc	qqcc	qccc
qc	qqc	qcc	ccc	qqcc	qccc	cccc
cc	qcc	ccc	qqcc	qccc	cccc	qqccc
qqc	ccc	qqcc	qccc	cccc	qqccc	qcccc
qcc	qqcc	qccc	cc cc	qqccc	qcccc	ccccc
ccc	qccc	cc cc	qqccc	qcccc	cc ccc	qqcccc

Géométrie de Descartes (1637). Livre II.

Tout de mefme, la feconde equation trouuée cy deffus, a fçauoir :

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{array}{l} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +4bcd \\ -2ddv \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{array}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd,$$

doit auoir mefme forme que la fomme qui fe produift, lorfqu'on multiplie

$$yy - 2ey + ee$$

$$\text{par } y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4,$$

qui eft

$$y^6 \left.\begin{array}{l} +f \\ -2e \end{array}\right\} y^5 \left.\begin{array}{l} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{array}\right\} y + eek^4;$$

de façon que, de ces deux equations, j'en tire fix

Le système de l’homogénéité chez Viète.

Compte tenu de la représentation spécifique choisie par Viète par sufffixes, la pratique n'est pas aussi simple que celle d'additionner des degrés. Voici un exemple

Exemple : $A_q\ B + D_c + E_p O$

qui s'interprète selon

A inconnue, de dimension 1 , au carré

B constante, de dimension, 1

D constante, de dimension 3

E inconnue, de dimension 2

O inconnue, de dimension 1

VII- L'avènement de la substitution.

L'étude de la sixième figure (concepts composés) à montré à partir d'un exemple chez Stiefel de 1544, comment une substitution aussi simple pour nous à écrire et à opérer que celle de

$$A = x^2 + x + 2 \text{ dans } A^2 + 5A$$

demeura une opération inconcevable —elle ne pouvait se *penser*— dans le cadre de l'écriture médiévale des mathématiques. Avec Leibniz, la substitution devint par contre un élément quotidien essentiel.

Rien dans l'expérience préalable de Leibniz à cette époque, ni dans la définition cartésienne des exponentielles — la seule évidemment qu'il connût — ne pouvait lui laisser pressentir dès l’abord quelle signification Newton pouvait bien apporter à des formes symboliques comme $3^{\frac{1}{2}}$ ou $(x+3)^{\frac{1}{2}}$ ou bien $5^{\frac{2}{3}}$, ou bien encore $(\sqrt{2})^{-\frac{6}{7}}$, dont le caractère interprétable aurait pourtant dû découler de la formule donnée par Newton.

$$\frac{\qquad}{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}} \sqrt{(3\ )\,\frac{2}{3}}$$

Leibniz s'employa dès ce moment à construire — par une forme de mimétisme — une exponentielle complètement neuve, de signes a^z ou x^z, dont l'importance dépasserait ainsi, espérait-il naïvement, celles de Descartes et Newton à la fois (!). La question était alors cependant : quelle pouvait bien être *à ce moment* la signification d'une forme symbolique où, à la place de l'exposant, venait le signe d'un nombre *quelconque*, *indéterminé* ? Une exponentielle que je dirai « leibnizienne », qui constitua pour lui le premier et le plus important des trois volets de ce qu'il dénomma ensuite la **transcendance**, au sens mathématique.

Comme on sait, on a aujourd'hui davantage encore exploré cette voie des substitutions en exposant, en y faisant par exemple venir une matrice carrée, selon

$$a^{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 14 \\ 4 & 3 & 38 \end{bmatrix}}$$

Une exponentielle certes bien éloignée des conceptions cartésiennes initiales ! De même, dans la construction des "cartesian closed categories", l'*exponentielle* A^B de deux objets *quelconques* A et B d'une catégorie (presque quelconque) est, si elle est possible, un concept central ; La définition se fait, comme on sait, usuellement par foncteurs adjoints, en "décontextualisant" le cas de la catégorie **Sets** des ensembles.

Ainsi, dans sa démonstration de ce qu'il appela la Quadrature Arithmétique du Cercle, le jeune Leibniz utilisa, en la modifiant, la démonstration que Mercator avait donnée pour la quadrature de l'hyperbole ([Mercator 1668]). En termes modernes, pour «quarrer l'hyperbole», Mercator avait développé en série

$$\frac{1}{1+x}$$

et intégré terme à terme. Pour «quarrer le cercle», Leibniz substitua x^2 à x et intégra terme à terme le développement de

$$\frac{1}{1+x^2}$$

Une substitution qui va certes pour nous complètement de soi (!) mais était à l'époque profondément nouvelle.

Ce sera ici ce que j'appellerai la « formule multiplicative»

$$(a^r)^s = a^{r.s}$$

Valide si r et s sont les signes d'entiers naturels et a le signe d'un nombre positif quelconque.

Une formule qui sera dite *élective* dans la suite

(*c'est le géomètre qui la choisit*).

Si cependant r est interprété comme un nombre rationnel quelconque, soit r = $\frac{p}{q}$, alors « $a^{\frac{p}{q}}$ » est sans signification (c'est l'assembleur (*i.e*, la *copule*) qui en est dépourvu). La méthode consiste alors à *définir*, si c'est possible, la substance de $a^r = a^{\frac{p}{q}}$ comme un nombre *tel* que la *même formule* reste vraie pour toute valeur du couple de rationnels, de signes r et s.