Quelques obstacles à la pensée fonctionnelle dans le contexte du théorème fondamental de l'analyse

Balhan Kevin

Université de Liège

19 novembre 2018

Laboratoire de mathématique de Besançon

Plan de l’exposé:

1. Le théorème fondamental, mon hypothèse de recherche, cadres théoriques et modèle épistémologique de référence.

2. Quelques résultats d’une enquête épistémologique : la pensée fonctionnelle à l’oeuvre dans le théorème fondamental

3. Des obstacles d’apprentissages épistémologiques ...

4. ... En résonance avec des obstacles didactiques.

5. Conclusion

Dans l'enseignement francophone belge, nous appellons théorème fondamental de l'analyse...

- Théorème d'existence d'une primitive :

  Si une fonction f est continue sur un intervalle I qui contient le réel a, on peut définir sur cet intervalle la fonction

$$p(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

  si f est continu sur l'intervalle [a,b], alors cette fonction p est une primitive de f sur [a,b].

- Sa conséquence :

  Si F est une primitive de f sur [a,b],

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

- Hypothèse de recherche :

  Il se cristallise dans ce théorème toute une série d'obstacles à sa compréhension, que ce soit des difficultés d'apprentissages ou des déficits au niveau de l'enseignement.

- Deux cadres théoriques :

  La Théorie des Situations Didactiques de Brousseau

  La Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard

Le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique

Praxéologie

praxis *logos*

Tâches Techniques Discours

Dialectique entre ostensifs et non-ostensifs

Concepts mathématiques

Le regard praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique

Praxéologie

praxis *logos*

Tâches Techniques Discours

Dialectique entre ostensifs et non-ostensifs

Valence instrumentale

Valence sémiotique

Un feuilletage en deux niveaux praxéologiques (Schneider):

- praxéologie de type « modélisation »

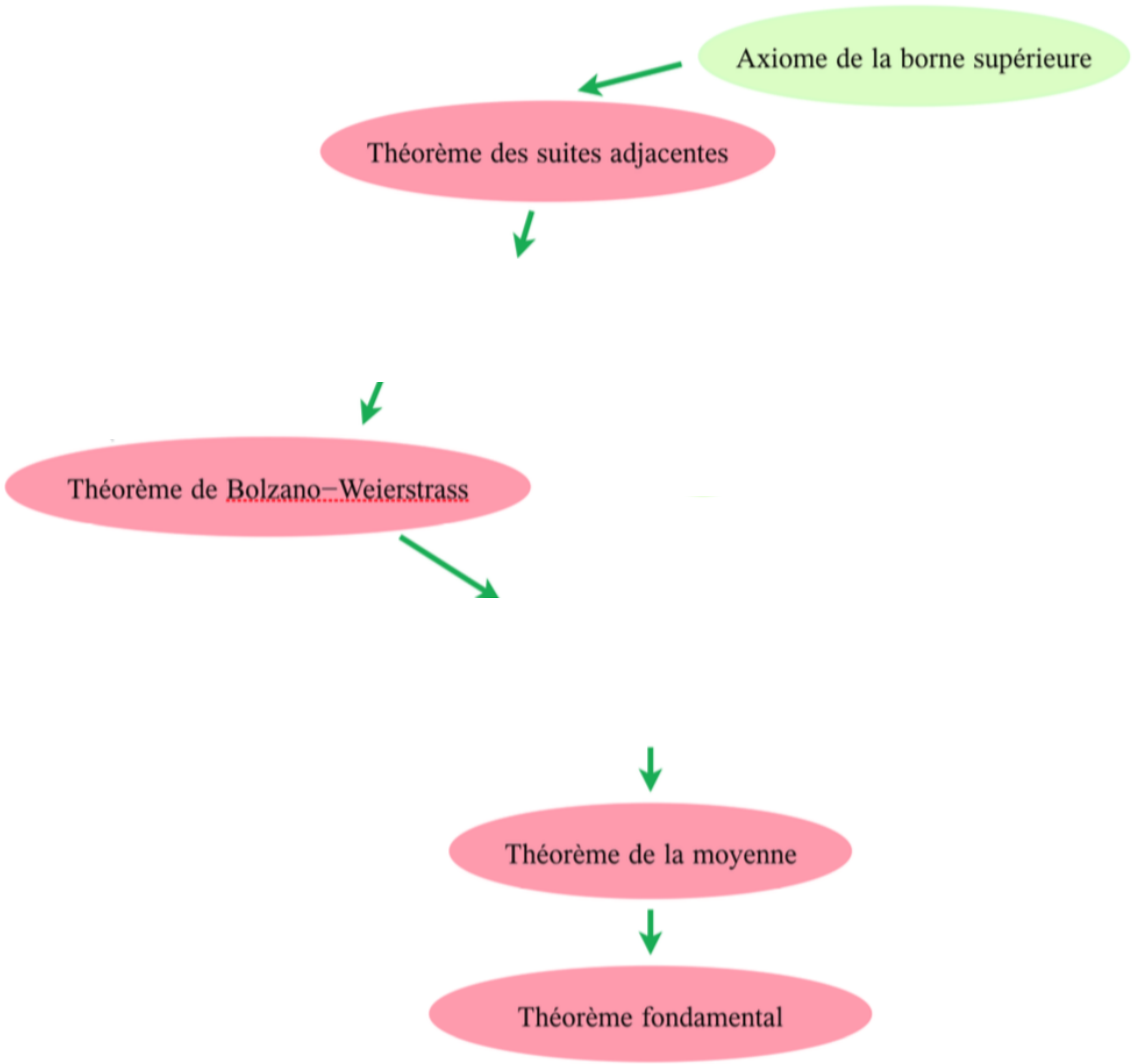
  Une construction à terme des « préconstruits » ou des objets mentaux par des concepts mathématiques…

  … qui suppose des discours technologiques et des définitions intermédiaires non standards

- praxéologie de type « déduction »

  Les préconstruits sont alors constitués en concepts proprement mathématiques qui donnent prise au raisonnement déductif.

Des praxéologies à « trous » (Rouy)



Un feuilletage en deux niveaux praxéologiques (Schneider):

- praxéologie de type « modélisation »

  Une construction à terme des « préconstruits » ou des objets mentaux par des concepts mathématiques…

  … qui suppose des discours technologiques et des définitions intermédiaires non standards

- praxéologie de type « déduction »

  Les préconstruits sont alors constitués en concepts proprement mathématiques qui donnent prises au raisonnement déductif.

2. Quelques résultats d’une enquête épistémologique

Problèmes d’optimisation

Problèmes géométriques de
recherche de tangentes à des courbes

Problèmes de vitesses variables

Problèmes de quadratures, cubatures…

Fermat

Newton

Leibniz

Méthode d’adégalité

Réciprocité

Nouvelle méthode

Newton…

- Une pensée covariationnelle d’emblée omniprésente dans le contexte cinématique de ses travaux

  Fluentes: grandeurs qui varient dans le temps, notées x, y, z

  Fluxions: taux d'écoulement des grandeurs dans le temps, notées $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

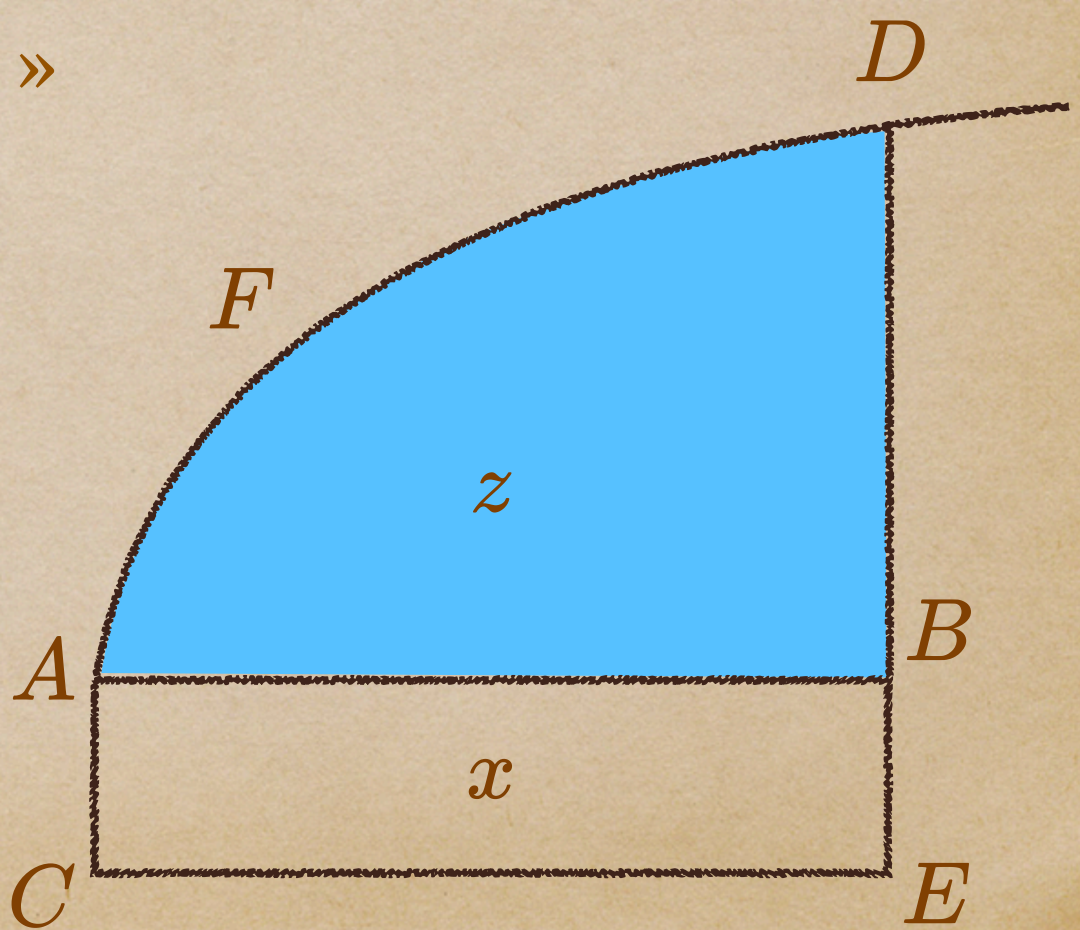
- … déclare que tous les problèmes se ramènent aux problèmes des fluentes et des fluxions en deux sens opposés :

  « *Connaissant la relation des fluentes, déterminer la relation des fluxions* »

  « *Connaissant la relation des fluxions, déterminer la relation des fluentes* »

- Les aires sous les courbes n'échappent pas à ce regard covariationnel posé par Newton :

  « Je vais considérer dans cet ouvrage les grandeurs mathématiques non pas comme étant formées de parties constantes même infiniment petites mais comme étant engendrées par un mouvement continu. Les lignes seront décrites et par là générées non par addition de parties mais par un mouvement continu de points, les surfaces par un mouvement de lignes, les solides par un mouvement de surfaces. […] »

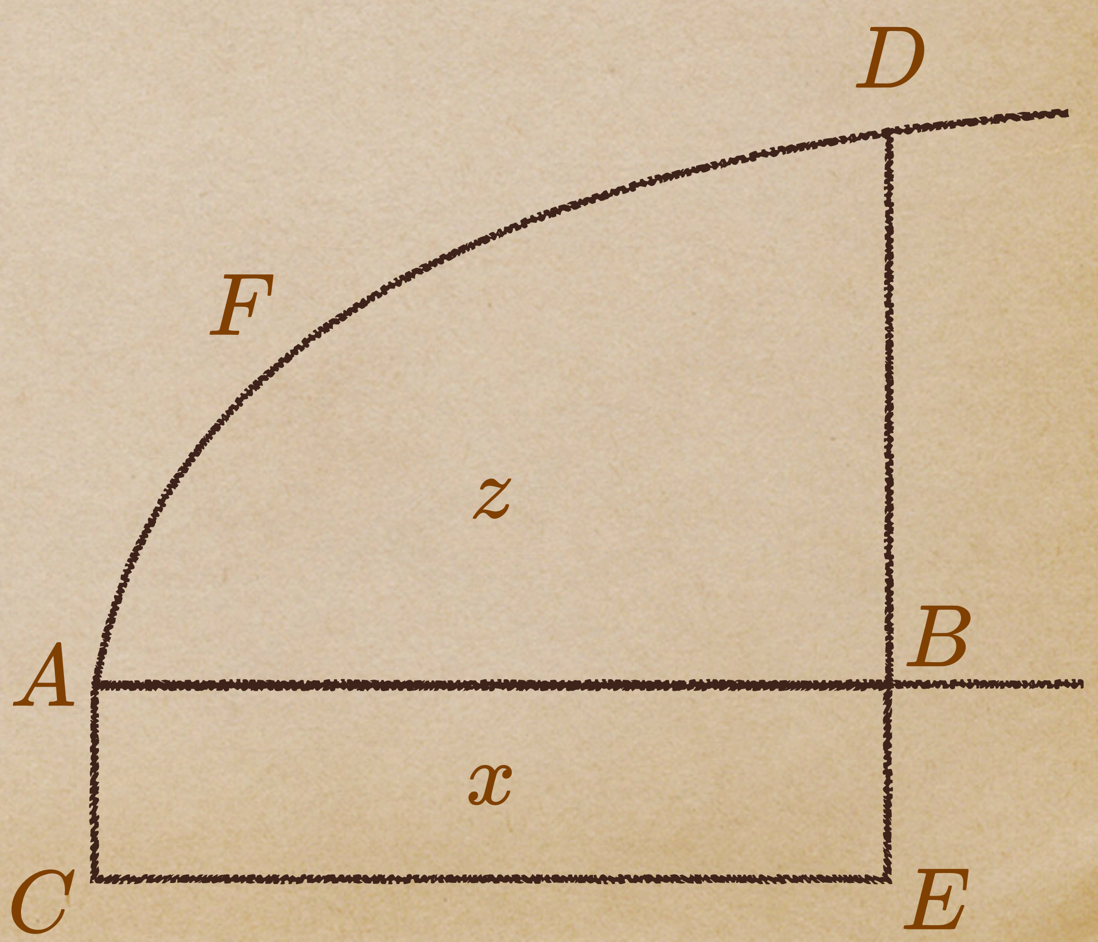


- Cette pensée covariationnelle est rendue explicite par Newton lorsqu'il élimine le temps en tant que tel au profit d'une fluente dont la fluxion est uniforme et à laquelle il fait jouer le rôle du temps…

Choix d'une grandeur de référence : x
telle que $\dot{x} = 1$

Ultima ratio : $\dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}$ (notre « dérivée » actuelle)

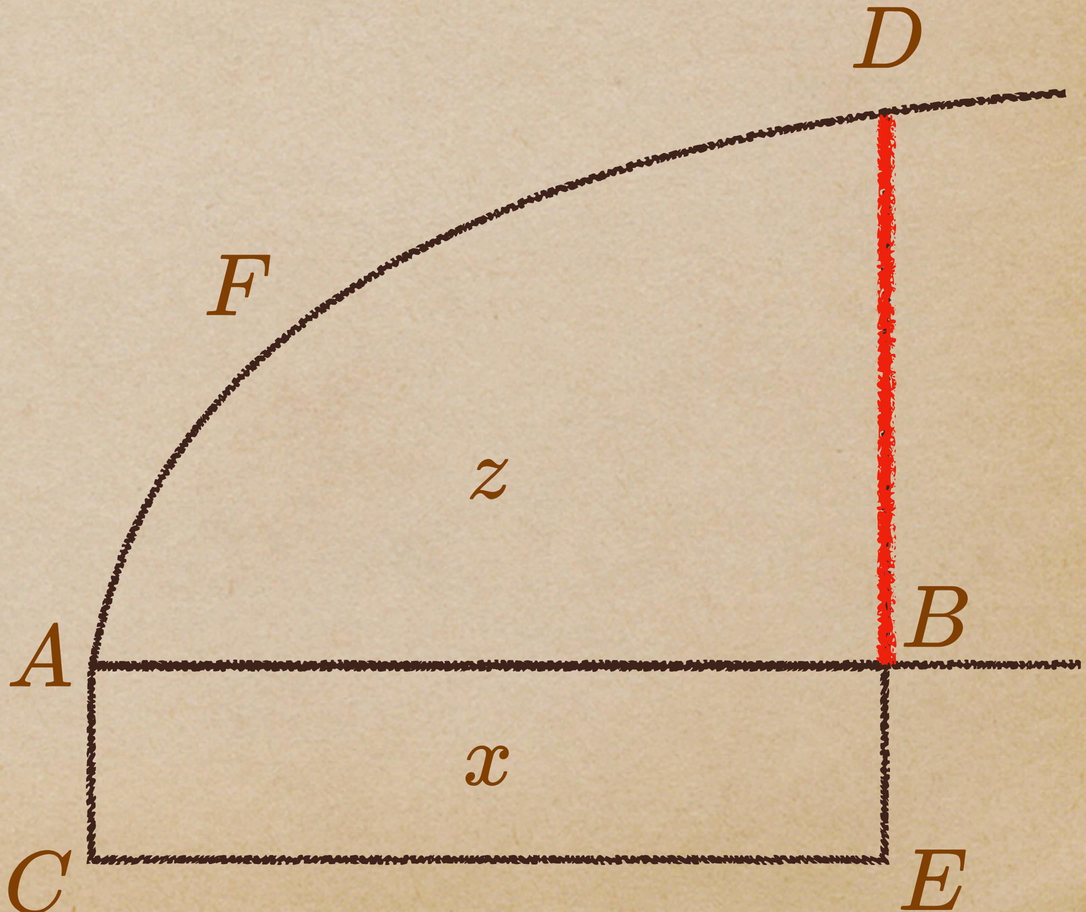
- Par cet acte, Newton explicite qu'il ne tient plus compte que de la variation concomitante de l'aire et de la grandeur de référence à laquelle il rapporte toutes les autres.



- Choix d'une grandeur de référence : x
  telle que $\dot{x} = 1$

  Ultima ratio : $\dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}$ (notre « dérivée » actuelle)

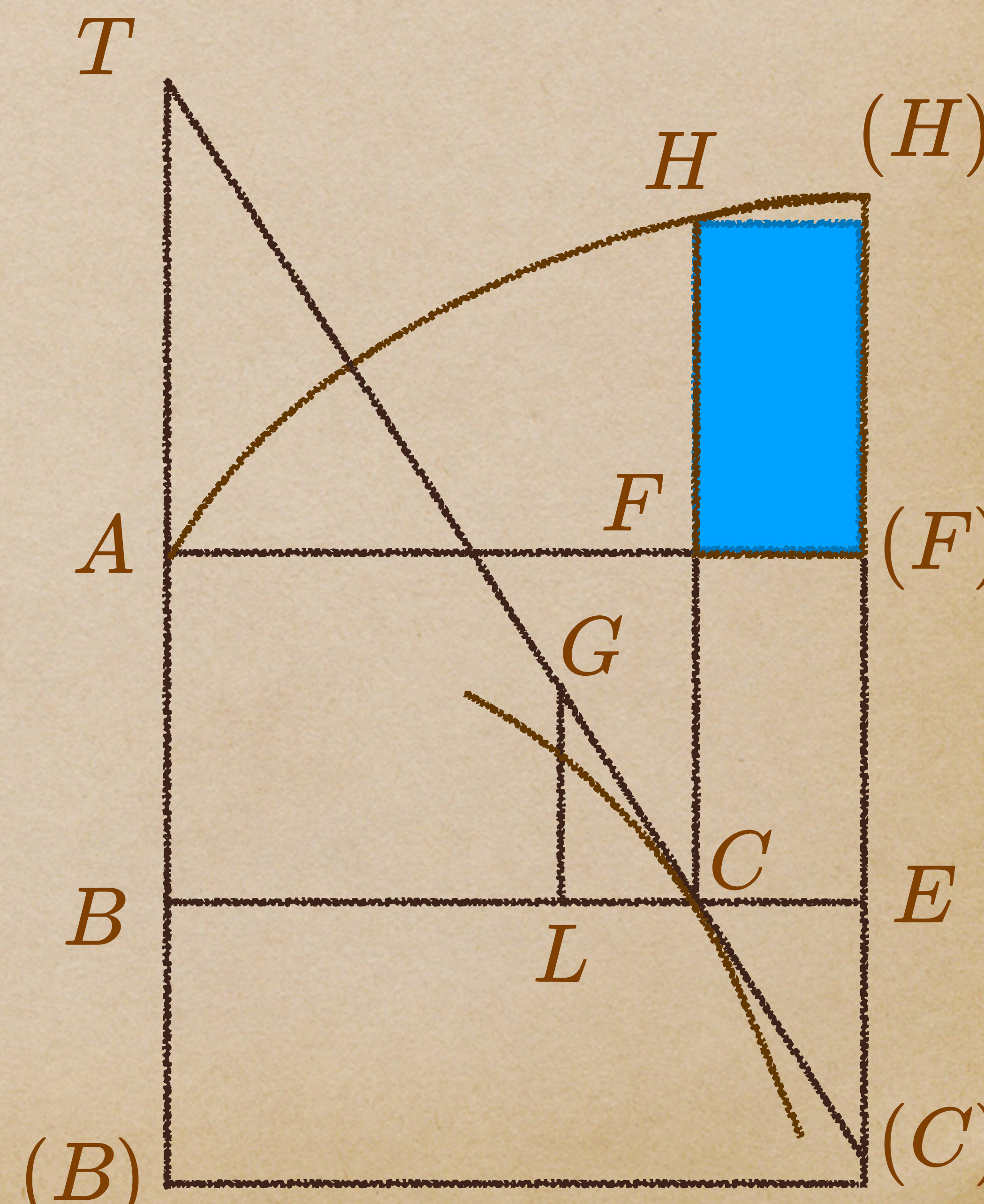
$$z \xrightarrow{\dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}} \boxed{BD}$$



Leibniz…

- Dans un univers géométrique d’étude des courbes, Leibniz établit une méthode de construction de quadratrices à partir de ses tangentes, ramenant ainsi le problème des quadratures au problème inverse de celui des tangentes.

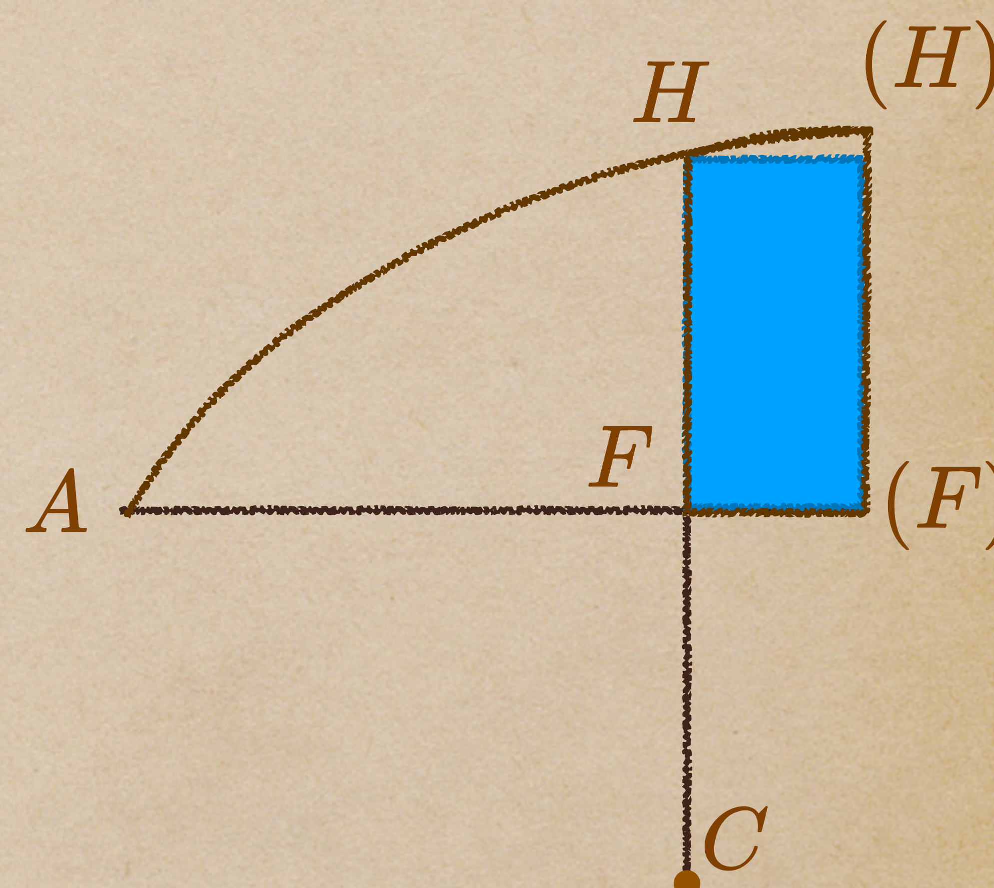
- *« Je voudrais montrer à présent que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée; c’est-à-dire sur laquelle les côtés du triangle caractéristique assignable aient entre eux telle relation donnée ; après quoi je montrerai qu’on peut construire cette courbe par le mouvement que j’ai imaginé. »*



Leibniz…

- Dans un univers géométrique d'étude des courbes, Leibniz établit une méthode de construction de quadratrices à partir de ses tangentes, ramenant ainsi le problème des quadratures au problème inverse de celui des tangentes.

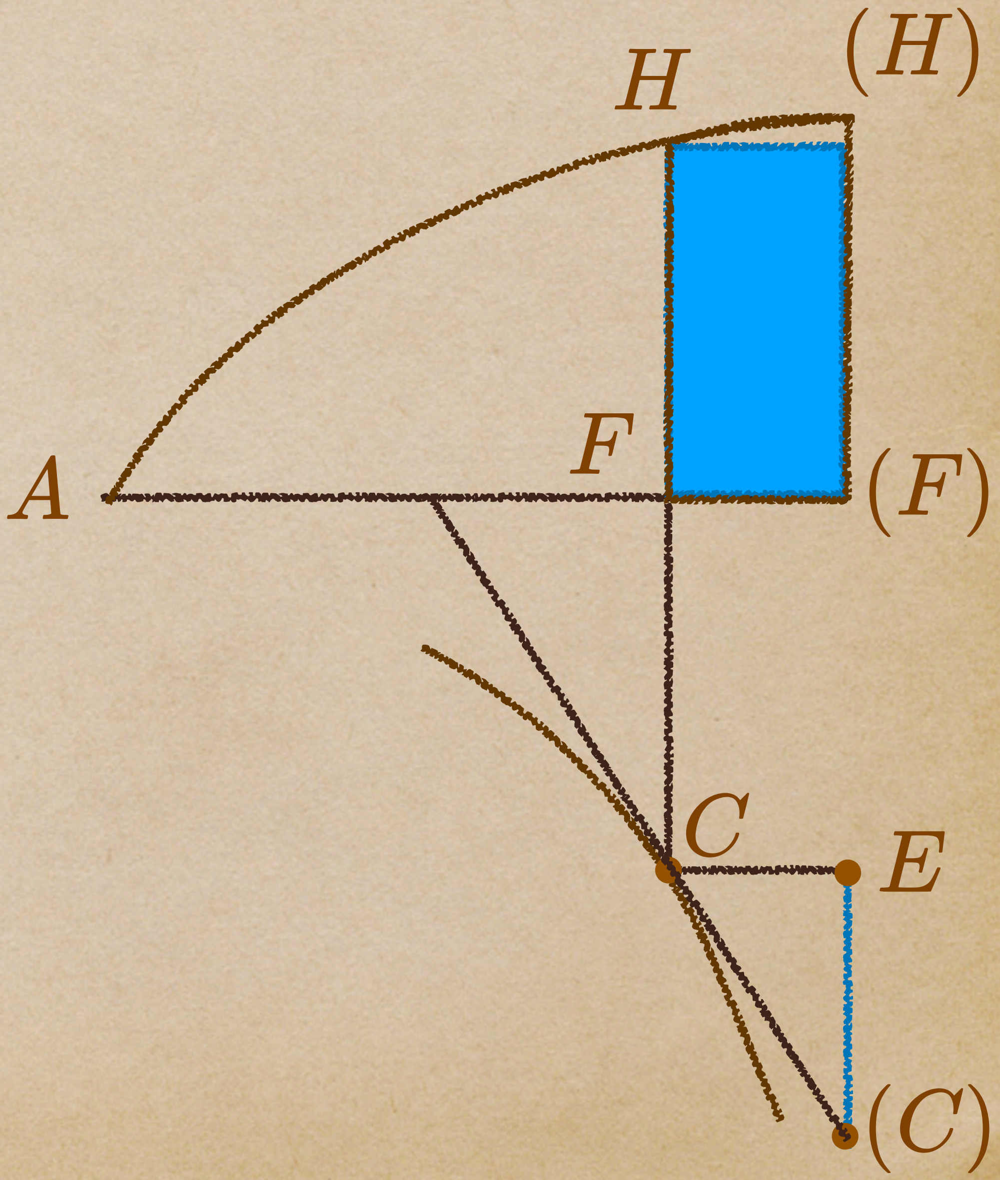
- *« Je voudrais montrer à présent que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée; c'est-à-dire sur laquelle les côtés du triangle caractéristique assignable aient entre eux telle relation donnée ; après quoi je montrerai qu'on peut construire cette courbe par le mouvement que j'ai imaginé. »*



Leibniz...

- Dans un univers géométrique d'étude des courbes, Leibniz établit une méthode de construction de quadratrices à partir de ses tangentes, ramenant ainsi le problème des quadratures au problème inverse de celui des tangentes.

- *« Je voudrais montrer à présent que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée; c'est-à-dire sur laquelle les côtés du triangle caractéristique assignable aient entre eux telle relation donnée ; après quoi je montrerai qu'on peut construire cette courbe par le mouvement que j'ai imaginé. »*



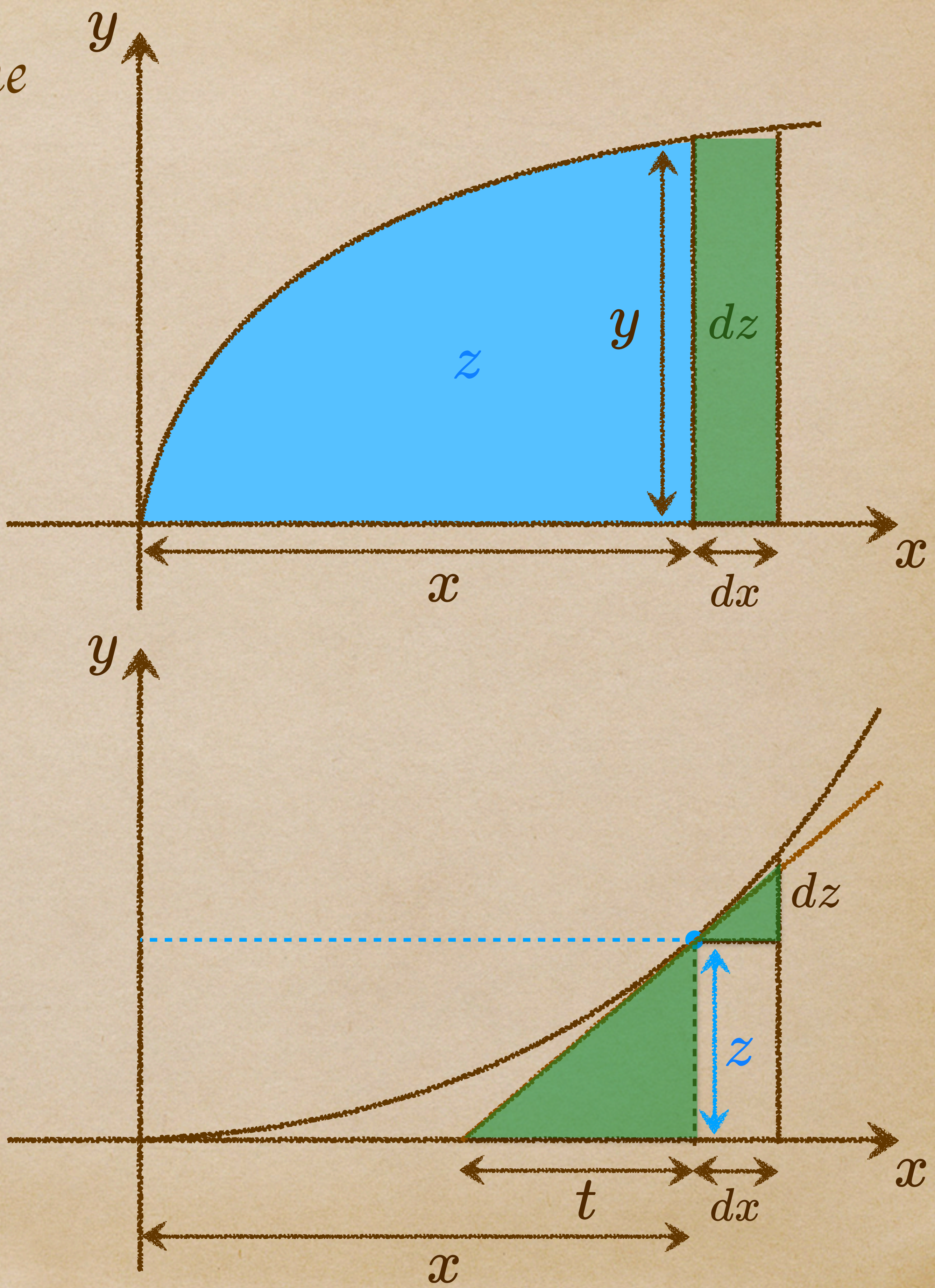
Leibniz...

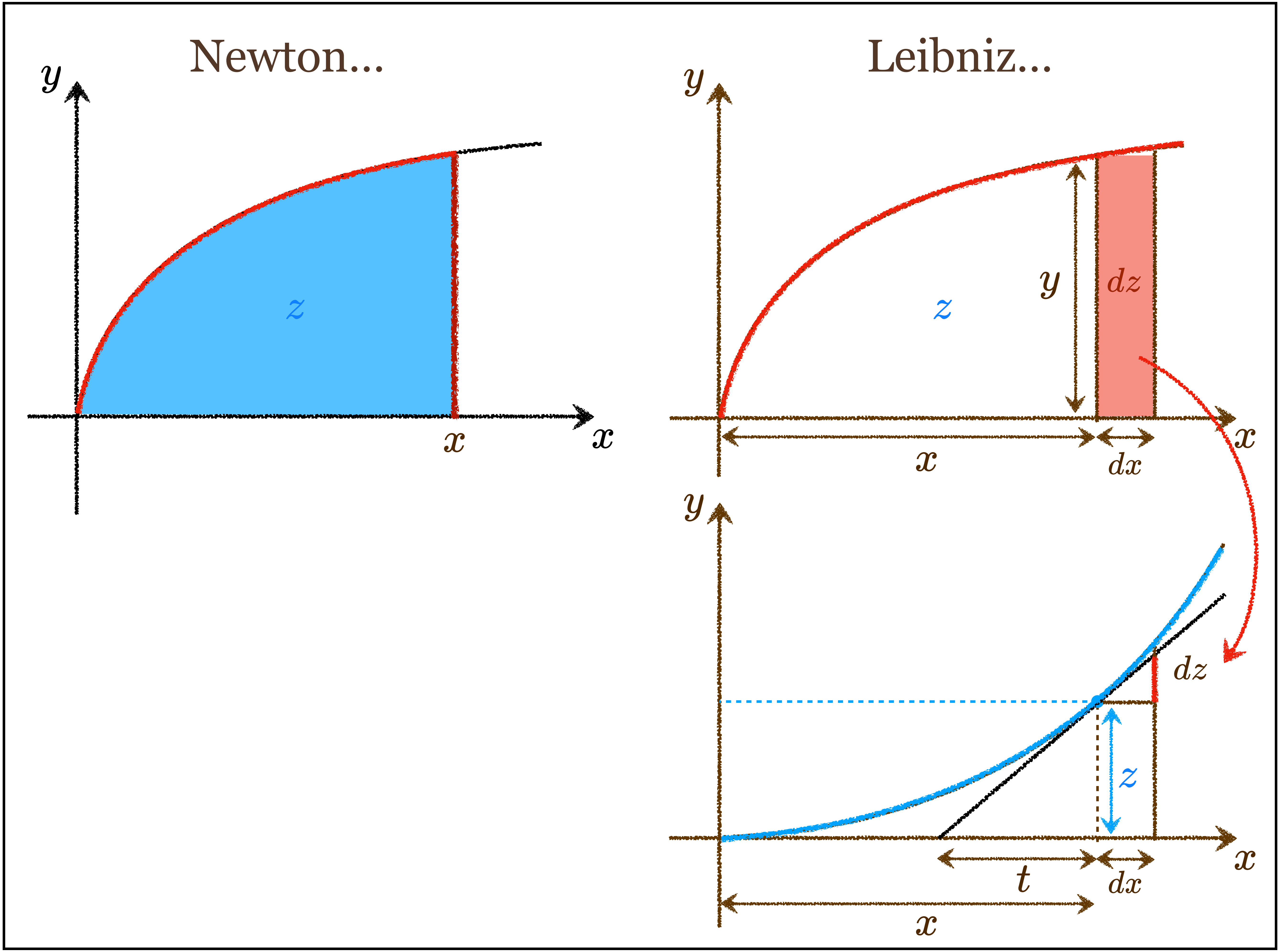
relation homogène

dx *et en* dz

$$\boxed{dz = y\,dx}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = y}$$




Newton...
y
z
x
x
Leibniz...
y
y
z
dz
x
x
dx
y
dz
z
t
dx
x
x

Le théorème fondamental…

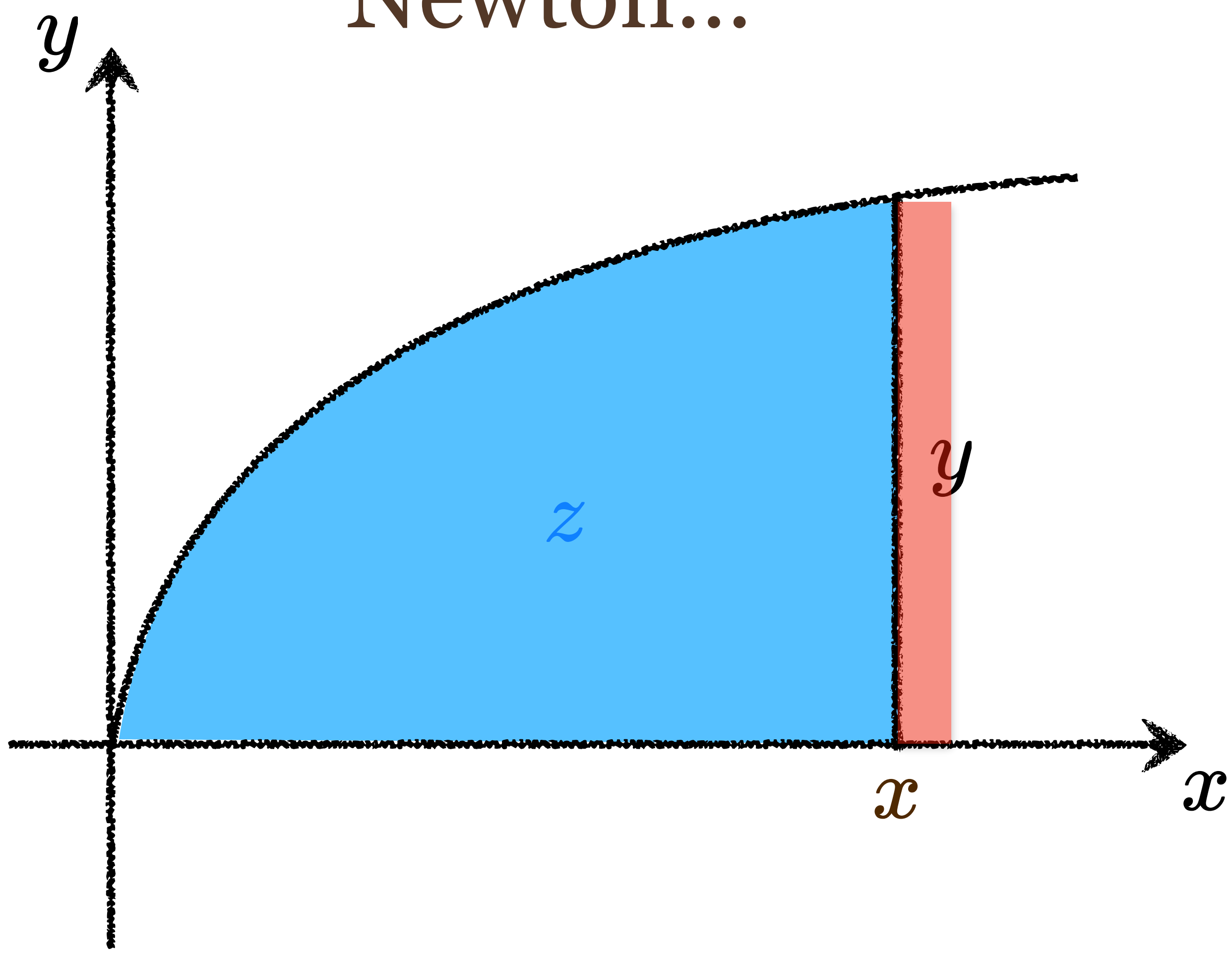
- fédère des problèmes variés en une praxéologie globale ;
- fournit une technique de calcul d'aires, de volumes…

Grandeurs
aires,
volumes,
vitesses,
…

Modèles
des
grandeurs
dans une
dialectique
ostensifs/non
ostensifs.

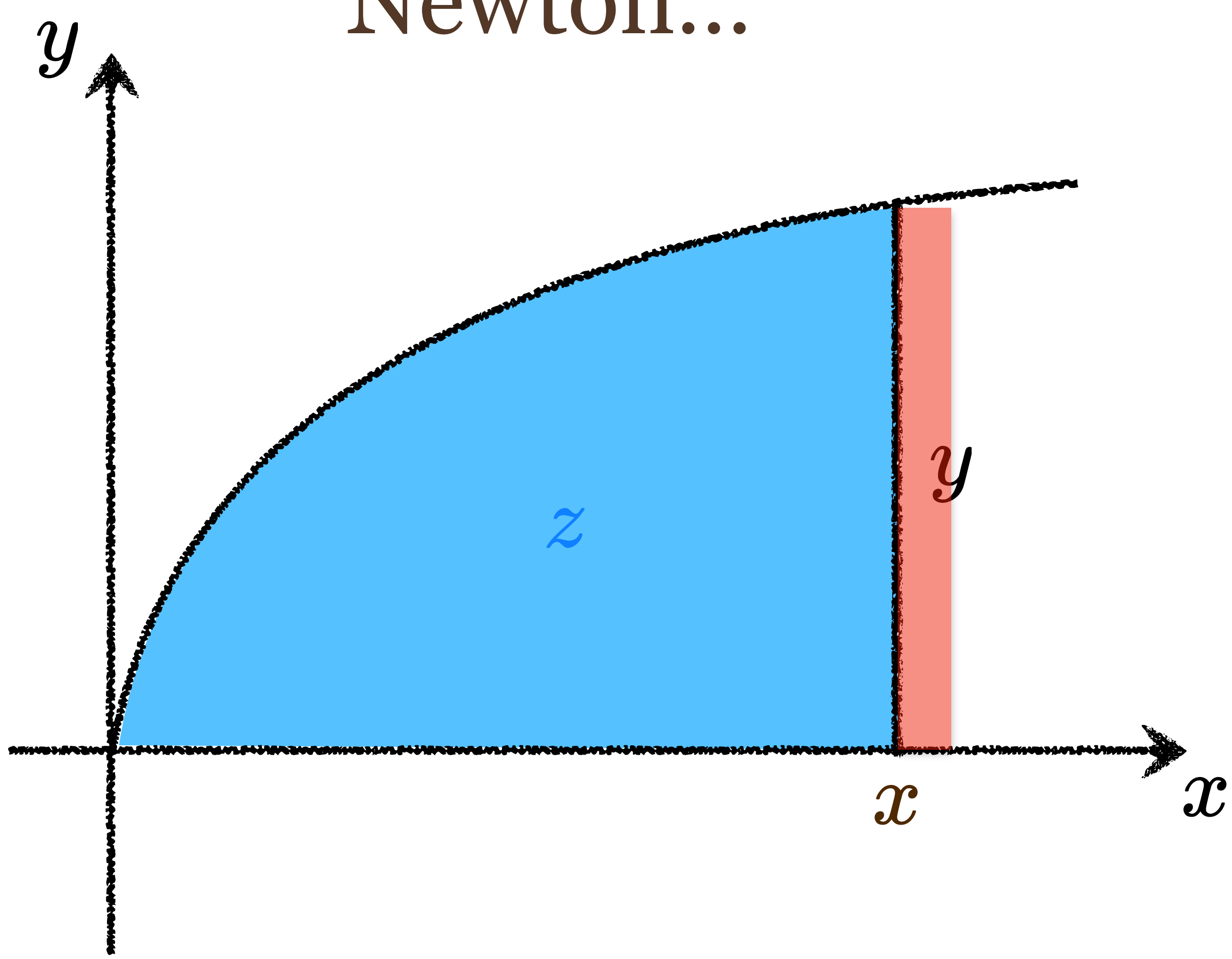
- met en correspondance deux signifiés covariationnels
  mobilisant un double regard fonctionnel
  qui articule le local et le global

Newton...



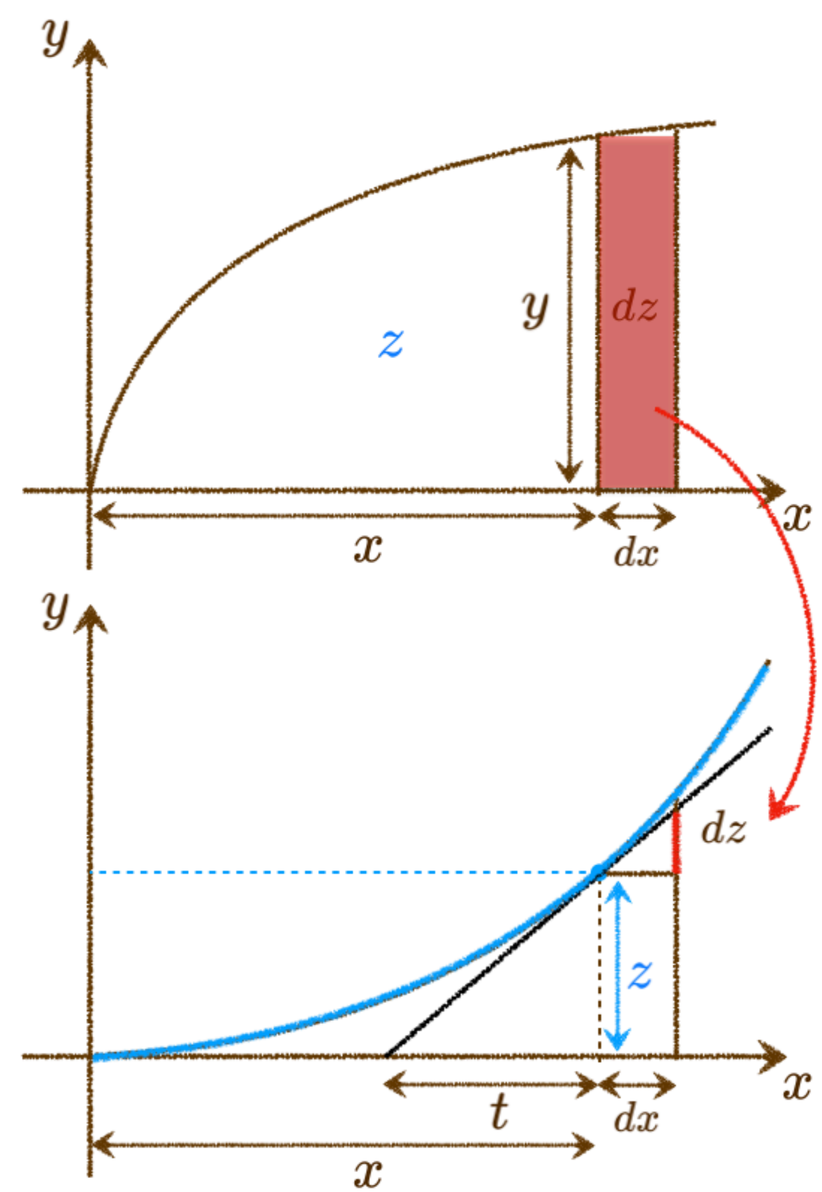
$$z \quad \overset{\frac{\dot{z}}{\dot{x}}}{\rightleftarrows} \quad y$$

Newton...



$$z \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\ \frac{\dot z}{\dot x}\ }} y$$

Leibniz...

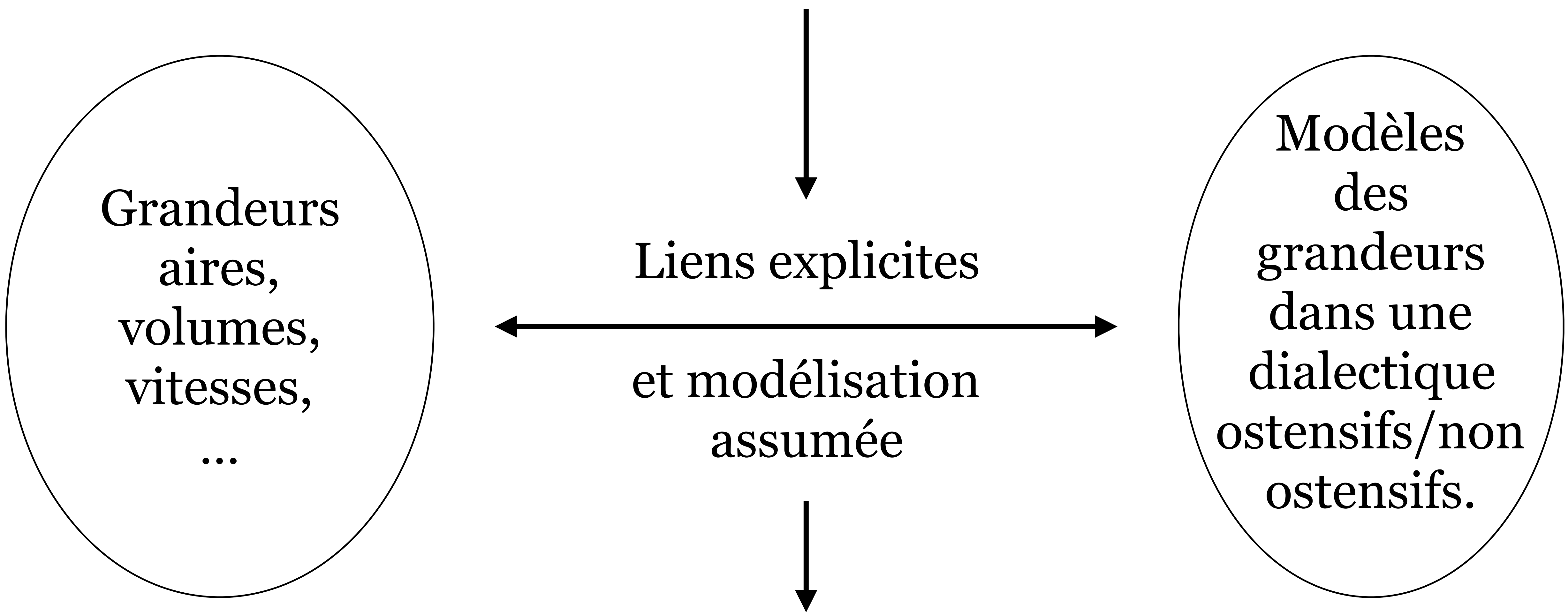


$$dz = y\,dx \quad \rightleftarrows \quad \frac{dz}{dx} = y$$

$$z = \int dz = \int y\,dx$$

Le théorème fondamental…

- fédère des problèmes variés en une praxéologie globale ;
- fournit une technique de calcul d’aires, de volumes…



- met en correspondance deux signifiés covariationnels mobilisant un double regard fonctionnel

  qui articule le local et le global

  qui rassemble et standardise des grandeurs de différentes natures.

Une modélisation explicite et prudente...

Newton...

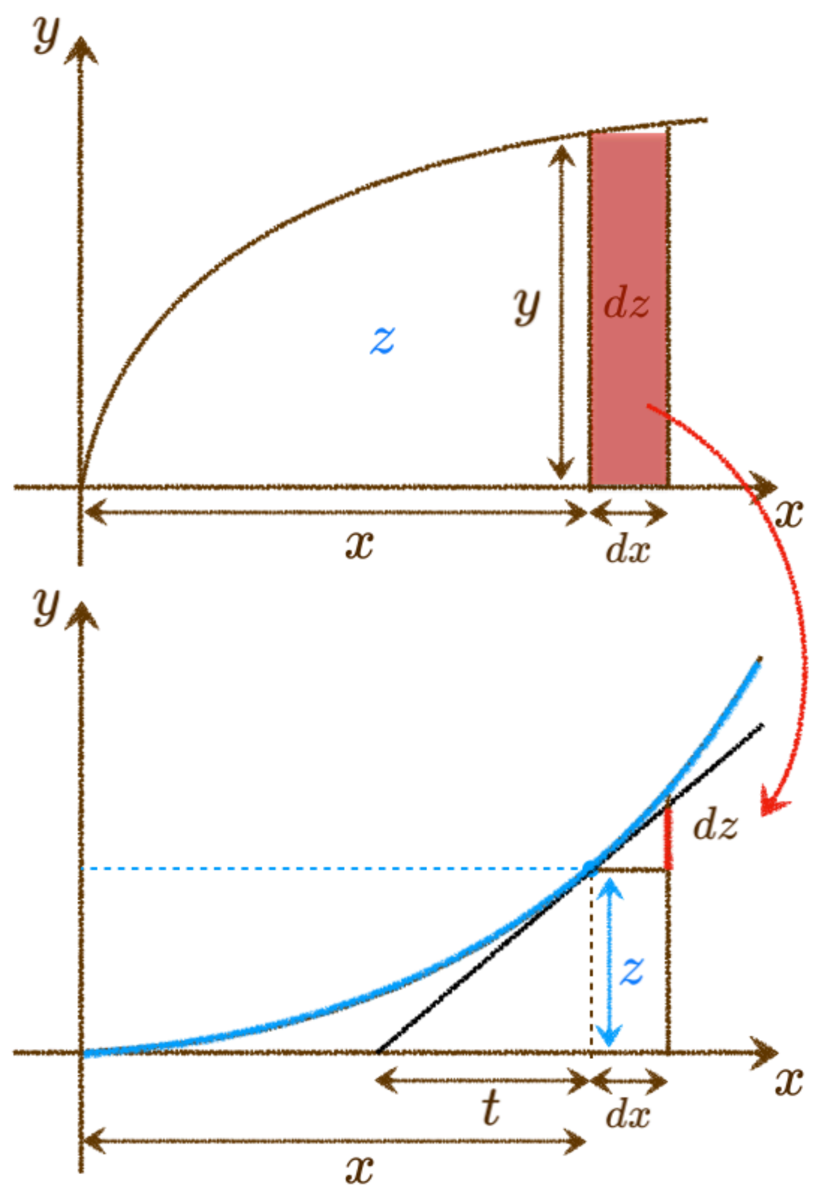
Fluentes: x, y, z

Fluxions: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

Ultima ratio: $\dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}$

$$\boxed{\dot{x} = 1}$$

Leibniz...



$$\boxed{adx = zdy}$$

3. Des obstacles d’apprentissages épistémologiques…

Théorème fondamental

Grandeurs

Deux univers aux contours indistincts en raison de…

Modèles des grandeurs

✦… l'obstacle empiriste

obstacle géométrique de la limite

obstacle de l'hétérogénéité des dimensions

réserve sur les modèles de grandeurs physiques qui relèvent de l'instantané.

L'obstacle géométrique de la limite

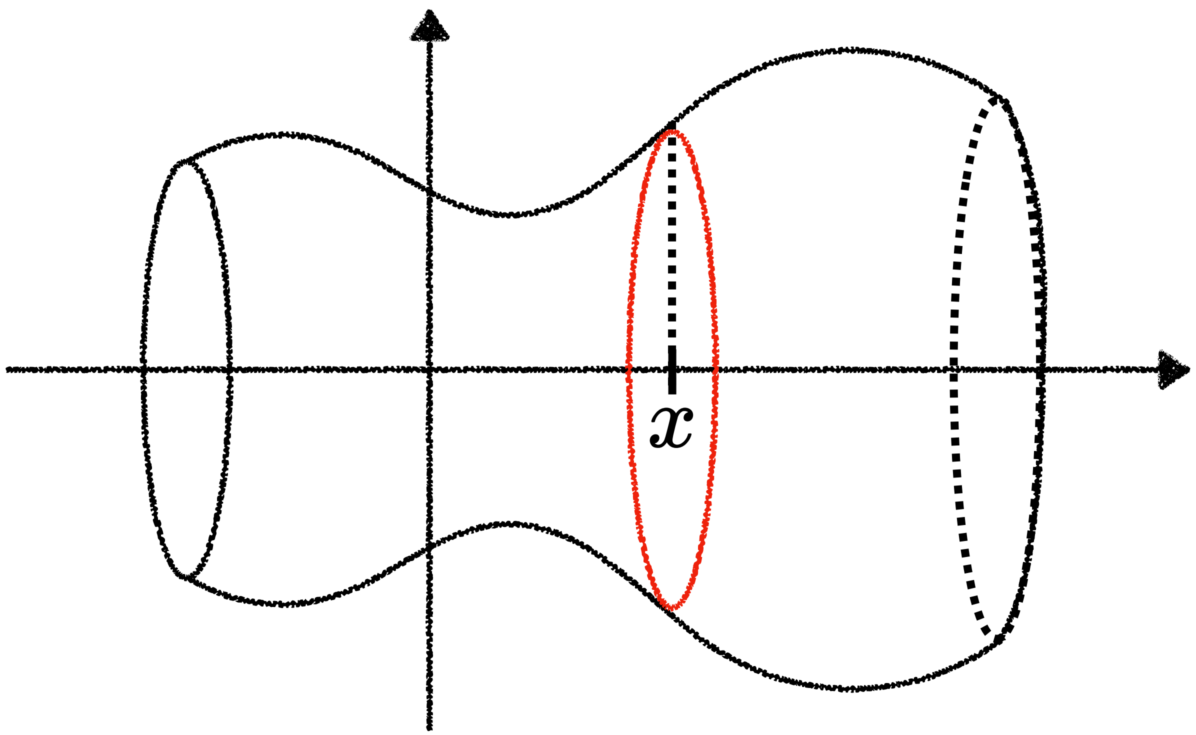
Dans la théorie… mais dans la tête des élèves…

Domaine des grandeurs	Domaine des mesures
Découpages en rectangles	Suite de sommes d'aires de rectangles
« Limite à vue… »	Limite
Surface curviligne composée de segments	Nombre

« Lorsque les rectangles se réduisent à des segments, ils ont une aire nulle et on voit mal comment obtenir une aire non nulle en sommant des zéros. »

L'obstacle de l'hétérogénéité des grandeurs

Domaine des grandeurs



Domaine des mesures

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\, dx$$

car la surface latérale de solides de révolution est « composée » de cercles de périmètre $2\pi f(x)$.

Théorème fondamental

Grandeurs ⟷ Modèles des grandeurs

Deux univers aux contours indistincts en raison de…

✦… l'obstacle empiriste

obstacle géométrique de la limite

obstacle de l'hétérogénéité des dimensions

réserve sur les modèles de grandeurs physiques qui relèvent de l'instantané.

✦… des obstacles au regard fonctionnel sur les aires et volumes dont :

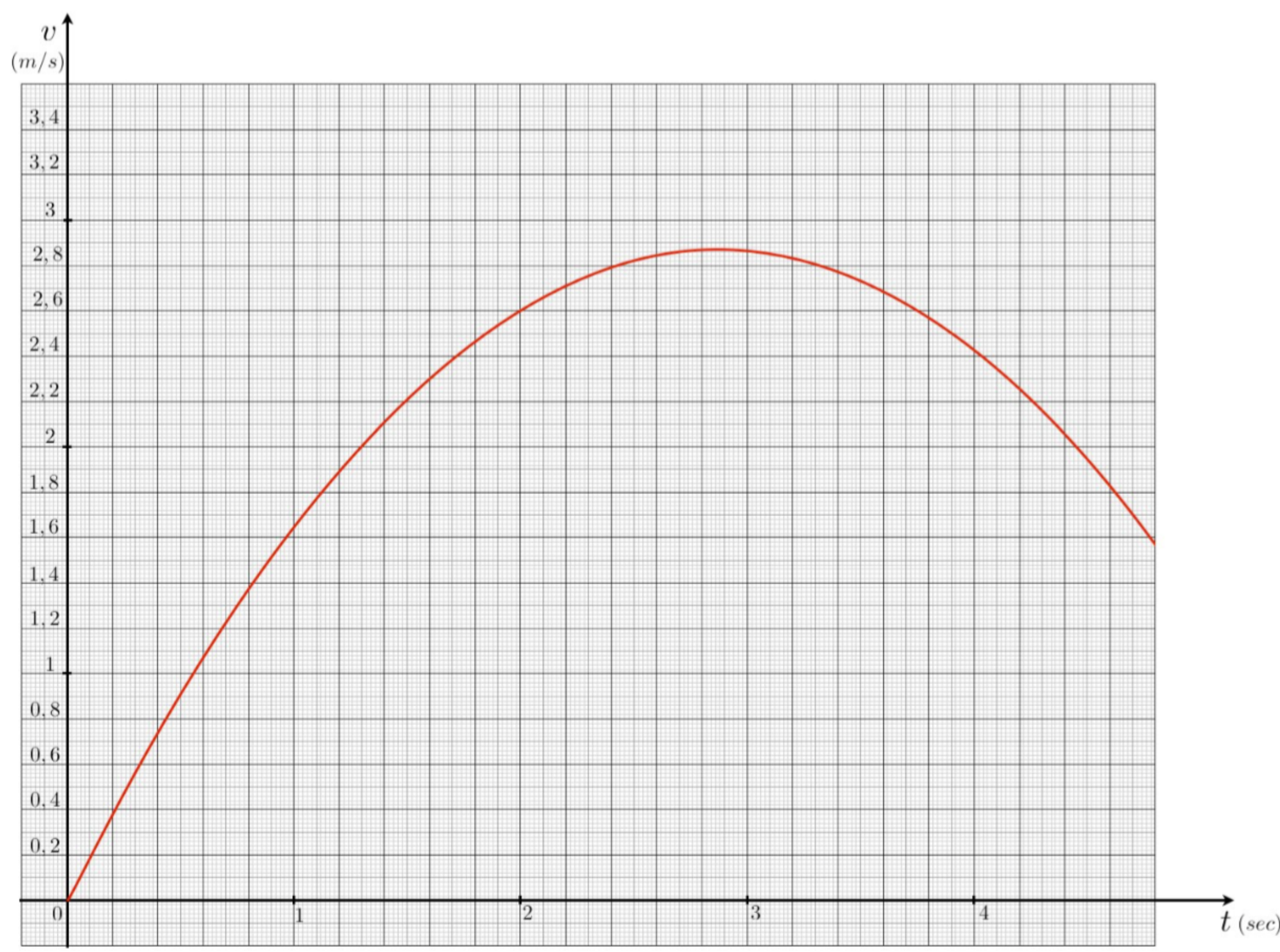
des grandeurs et leur mode de détermination *a priori* étrangers à l'idée de variation.

- une idée de variation faisant écran à celle de covariation, eu égard à la prégnance des « variables temporelles »
- une conception réductrice des fonctions et de leurs graphiques et une difficulté à articuler leurs aspects local et global au-delà de la prégnance des grandeurs.

Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

- Une première expérience « pour voir » à partir de questions sur l'espace parcouru par un mobile en mouvement rectiligne à partir de sa vitesse, questions dont nous testions les retombées sur le calcul d'une aire curviligne:

Le graphique ci-dessous exprime, à chaque instant, la vitesse d'un mobile qui se meut sur un axe horizontal. Quel est l'espace parcouru par ce mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 4$?



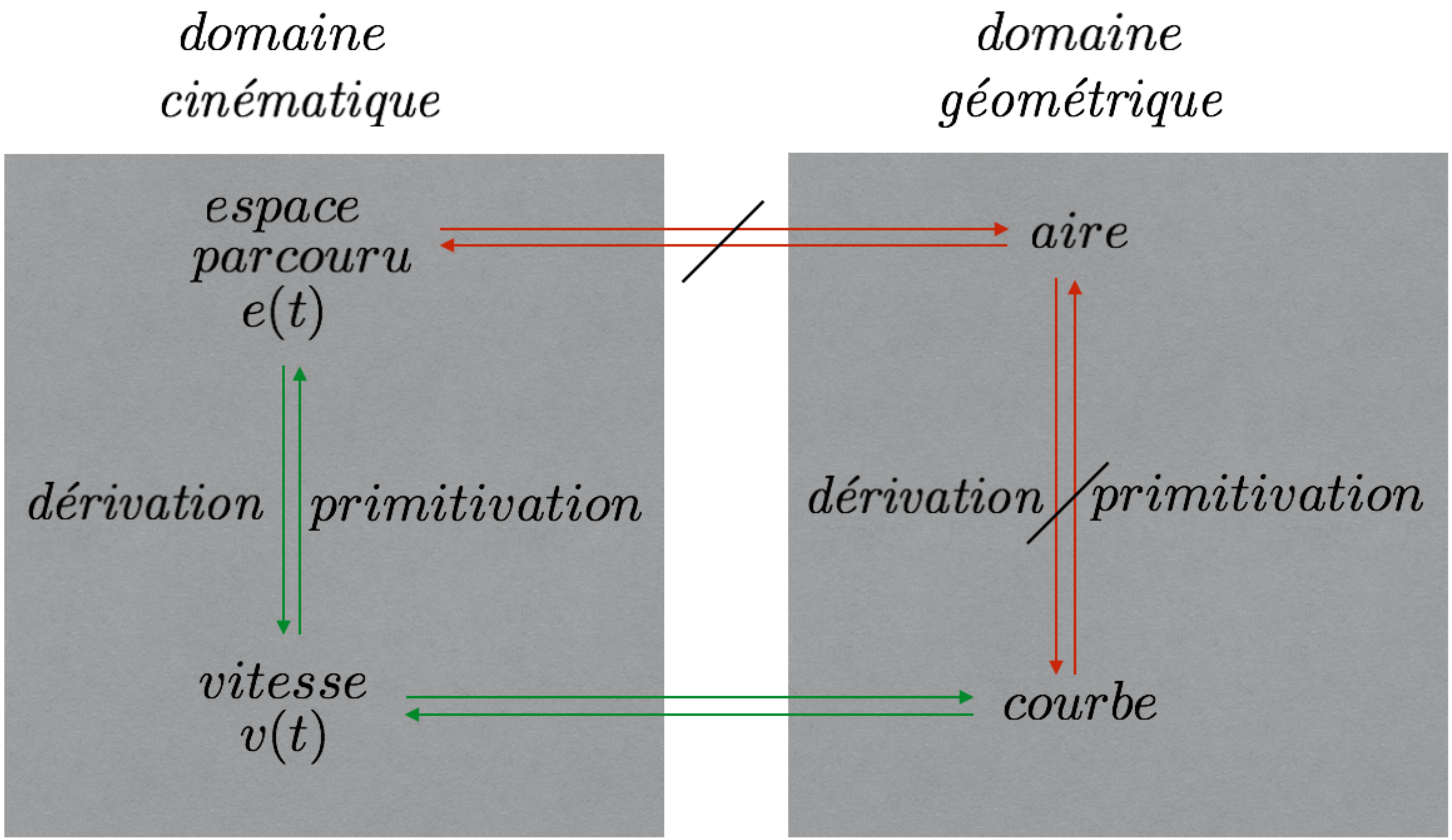
$$v(t) = -\frac{t^2}{3} + 2t$$

$$e(0) = 9$$

$$e(t) = ?$$

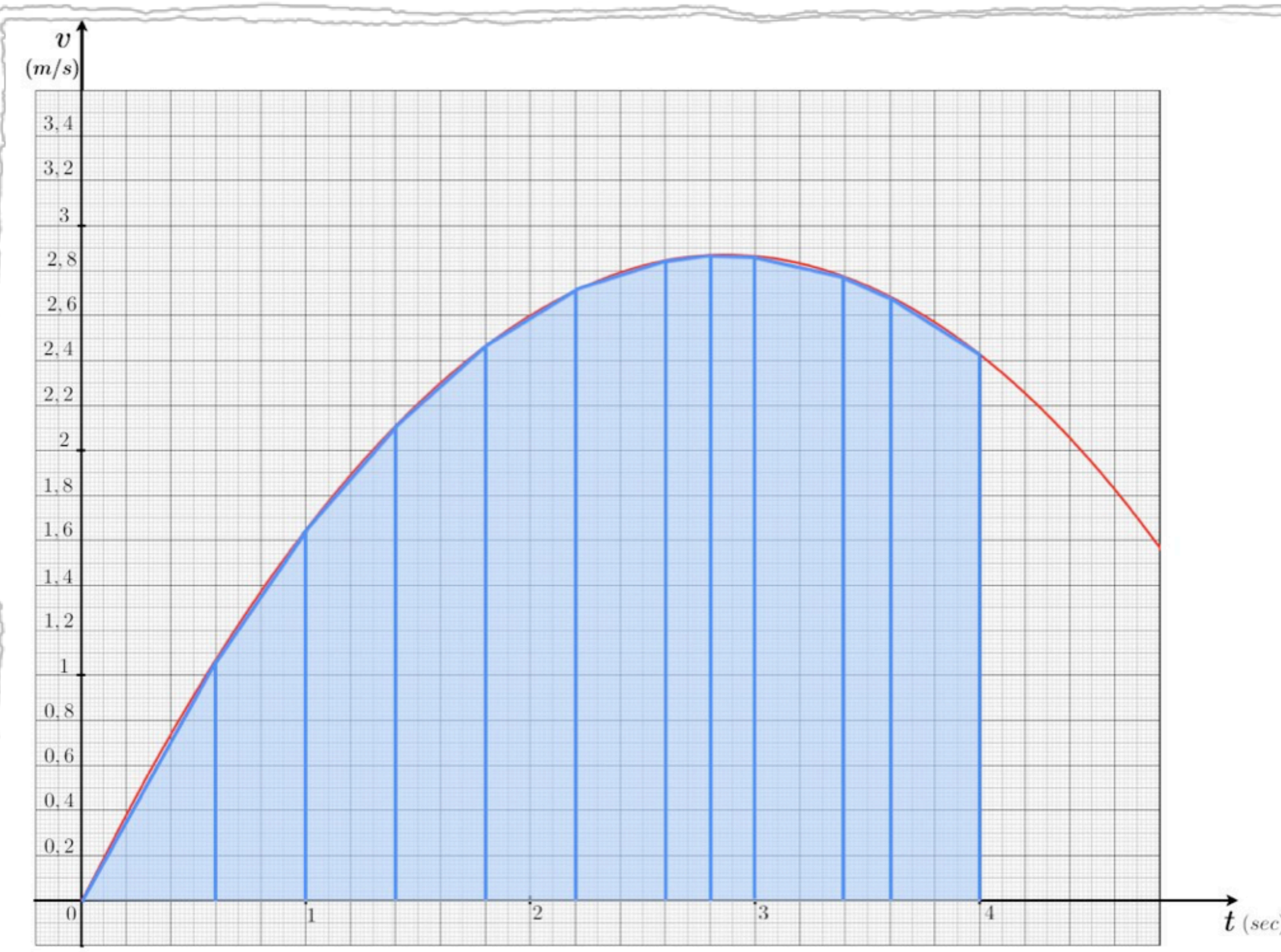
Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche...

- Une première expérience « pour voir » à partir de questions sur l'espace parcouru par un mobile en mouvement rectiligne à partir de sa vitesse, questions dont nous testions les retombées sur le calcul d'une aire curviligne:



Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

- Une première expérience « pour voir » à partir de questions sur l'espace parcouru par un mobile en mouvement rectiligne à partir de sa vitesse, questions dont nous testions les retombées sur le calcul d'une aire curviligne:

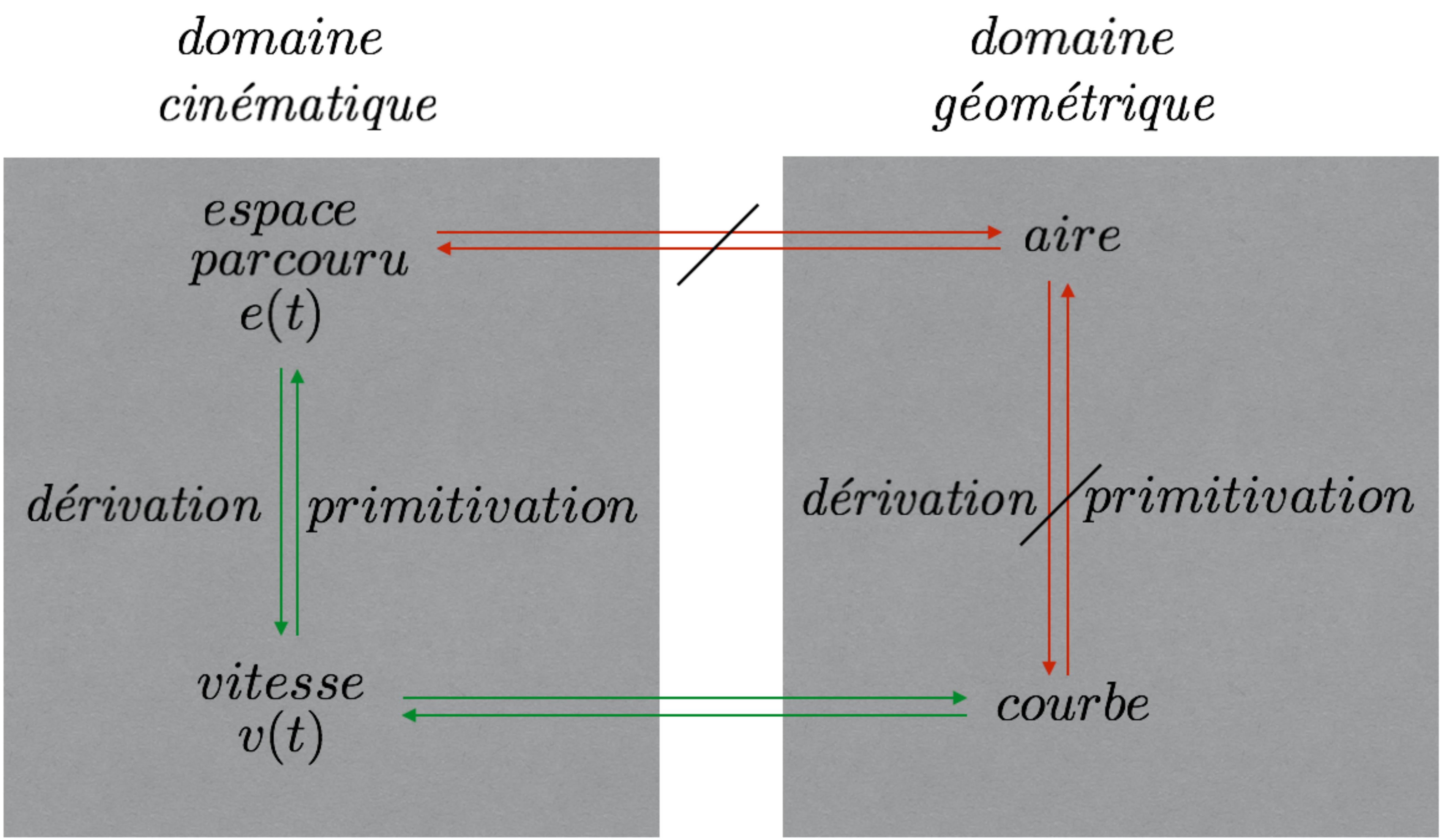


$$1,1.0,3+\frac{2}{10}.(1,1+1,65)+(1,65+2,1)\frac{2}{10}+(2,1+2,5).\frac{2}{10}+(2,7+2,5).\frac{2}{10}+(2,7+2,85).\frac{2}{10}$$

$$+2,85.2.\frac{1}{10}+2,85.2.\frac{1}{10}+(2,85+2,8).\frac{2}{10}+(2,8+2,7).\frac{1}{10}+(2,7+2,4).\frac{2}{10}=9,41\ m$$

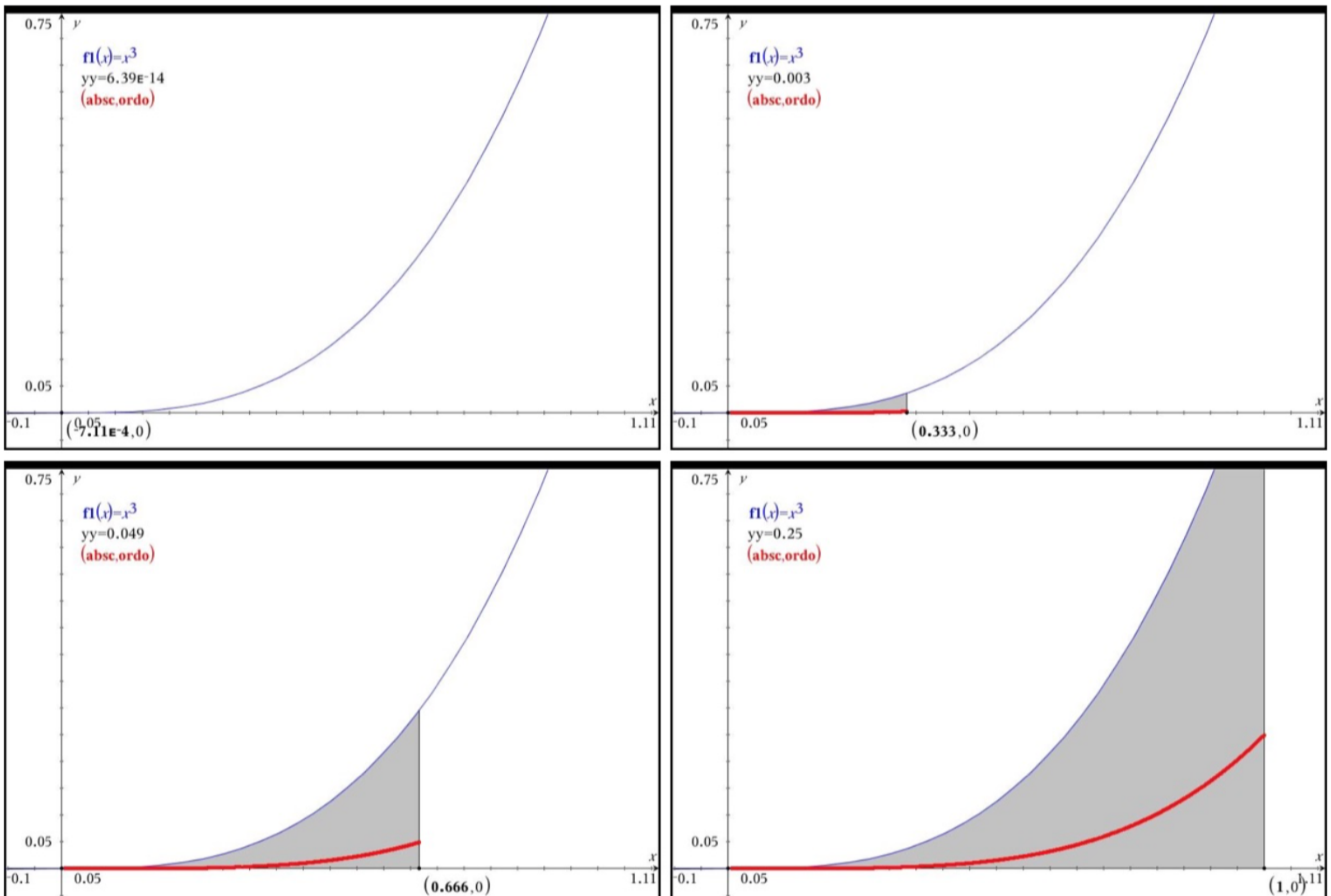
Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche...

- Une première expérience « pour voir » à partir de questions sur l'espace parcouru par un mobile en mouvement rectiligne à partir de sa vitesse, questions dont nous testions les retombées sur le calcul d'une aire curviligne:



Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche...

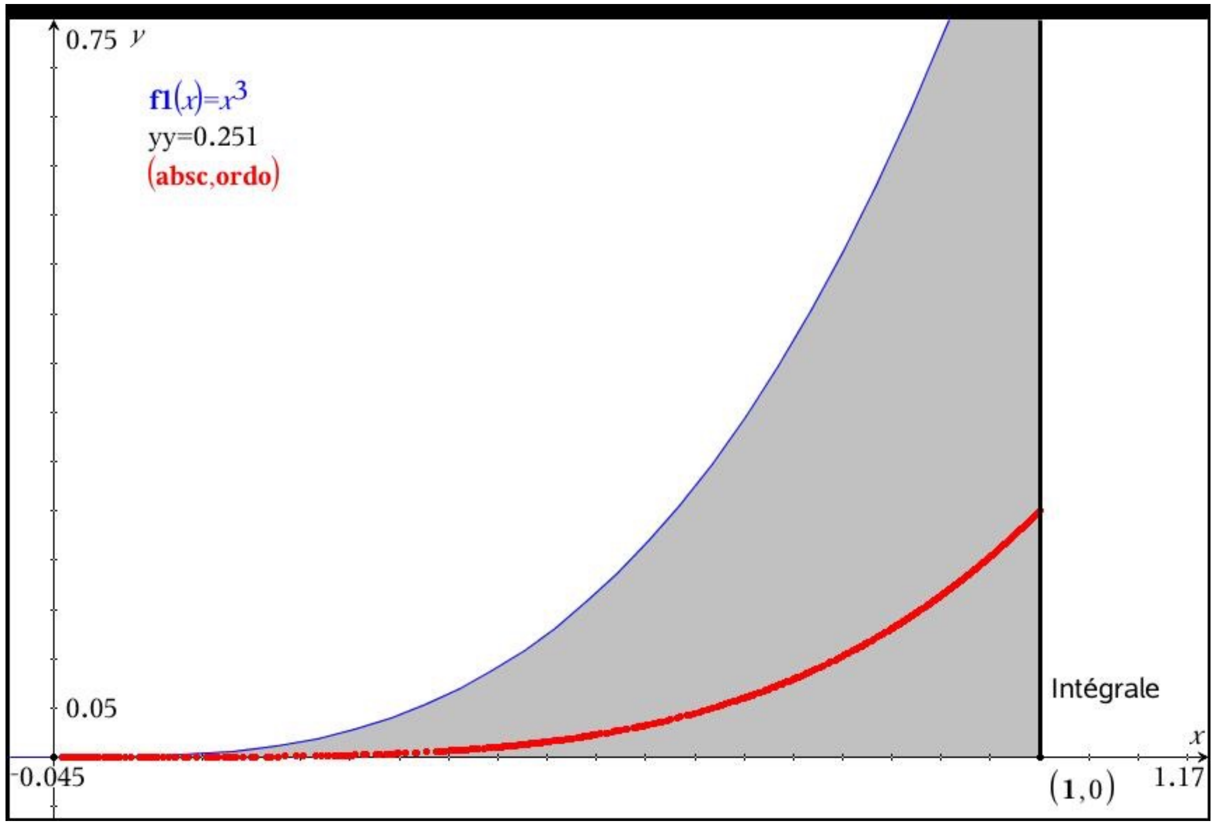
- Une deuxième expérience pour explorer les potentialités d'un dispositif «dynamique» d'illustration du théorème fondamental exploitant les NTICE



Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

- Une deuxième expérience pour explorer les potentialités d'un dispositif «dynamique» d'illustration du théorème fondamental exploitant les NTICE

« A vue d'oeil, la courbe rouge possède une aire à peu près égale au tiers de celle sous la courbe bleue. »

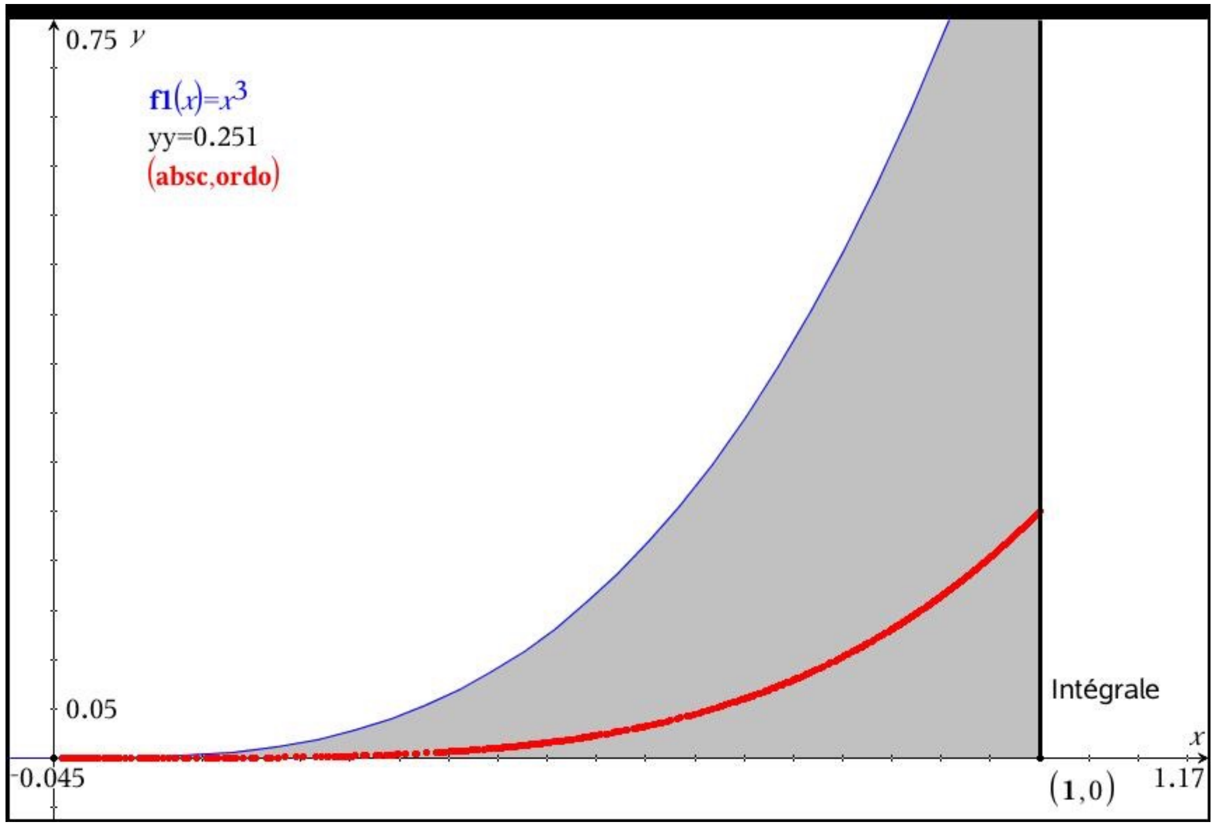


Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

- Une deuxième expérience pour explorer les potentialités d'un dispositif «dynamique» d'illustration du théorème fondamental exploitant les NTICE

« Pour une même valeur de l’abscisse, le y de la courbe rouge est 4 fois plus petite que l’ordonnée de la courbe bleue. »

« L’aire du triangle curviligne sous la courbe rouge vaut elle aussi 1/4 de l’aire du triangle curviligne sous la courbe bleue. »



Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

- Une deuxième expérience pour explorer les potentialités d'un dispositif «dynamique» d'illustration du théorème fondamental exploitant les NTICE

« Lorsque la courbe rouge avance, […] »

« Une courbe rouge qui monte moins vite que la courbe bleue. »

« Plus on tire la courbe rouge, plus elle monte sans jamais atteindre la courbe bleue. »

« Apparition progressive d'une courbe rouge sous la courbe bleue. On peut observer un lien entre les deux courbes : elles grimpent toutes les deux mais pas de la même façon. »

Des expérimentations qui étayent nos hypothèses de recherche…

- Troisième expérimentation:
  Une ingénierie didactique inspirée de l'imagerie cinématique de Newton.

Ce qui distingue les ingénieries didactiques des autres méthodologies de recherches…

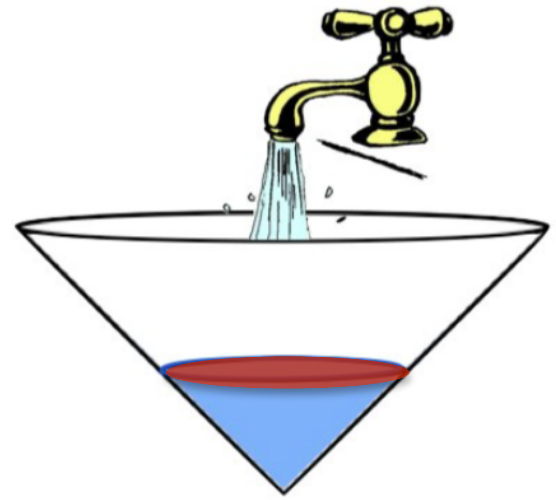
Méthode de validation interne

Analyse *a priori* VS Analyse *a posteriori*

- Mise en évidence de variables didactiques
- Hypothèses sur leurs impacts

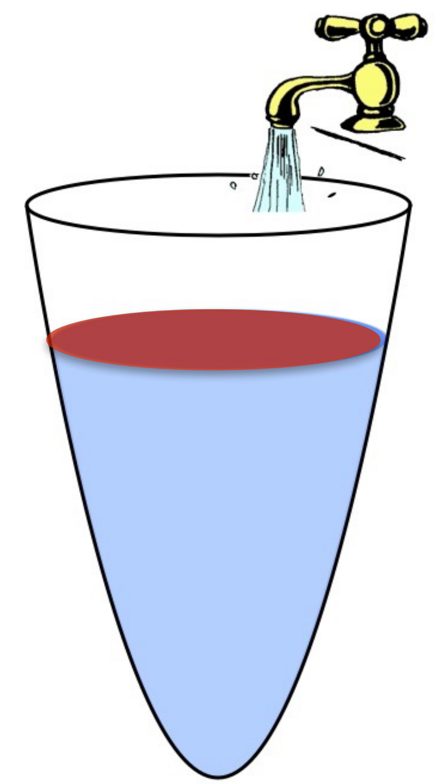
- Validation ou invalidation de ces hypothèses

Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de $1\,\mathrm{cm/min}$. L'angle au sommet du cône vaut $90°$. Jusqu'à quand le débit $\delta(t)$ de la pompe sera-t-il inférieur à $100\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$? [3]

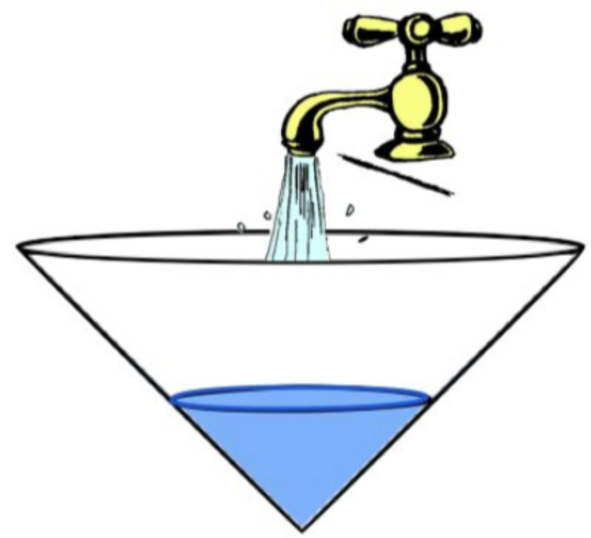


$\boxed{1\,\mathrm{cm/min}}$

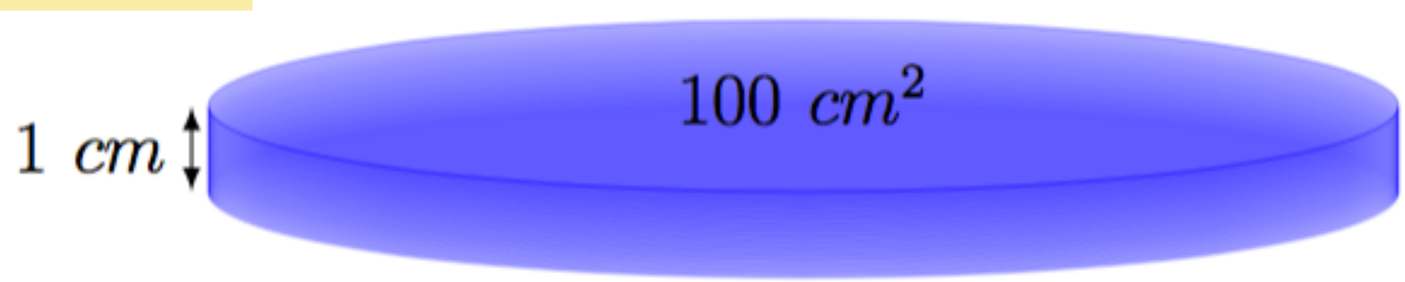
Considérons une cuve initialement vide dont la surface est celle d'un paraboloïde de révolution, alimentée par une pompe réglée de telle sorte que le niveau de l'eau dans la cuve monte régulièrement à la vitesse de $1\,\mathrm{cm/min}$. Lorsque le débit de la pompe vaut $100\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$, quel est le volume d'eau à l'intérieur du paraboloïde ?



Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de $1\,\mathrm{cm/min}$. L'angle au sommet du cône vaut $90°$. Jusqu'à quand le débit $\delta(t)$ de la pompe sera-t-il inférieur à $100\,\mathrm{cm^3/min}$? [3]



[...] le débit sera supérieur à $100\,\mathrm{cm^3/min}$ *lorsque l'aire de la base [du cône d'eau] dépassera* $100\,\mathrm{cm^2}$



il faut trouver la hauteur de sorte que la base ait une aire de $100\,\mathrm{cm^2}$.

$$\pi r^2 = 100\ cm^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{100}{\pi}}$$

Obstacles:

- celui de se détacher de la prégnance des grandeurs et de leur dimensions, lié à l'obstacle empiriste ;

$$\pi t^2 = \pi r^2$$

débit surface

$[cm^2/min]$?

- réserves sur le modèle de débit instantané ;
- un débit exprimé comme une variation de volume, le temps n'étant pas pris en considération dans les calculs de certains élèves ;
- la difficulté à articuler le local/global.

4. … En résonance avec des obstacles didactiques.

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

$$\int_a^b f(x)\,\boxed{dx} \qquad \int f(x)\,\boxed{dx}$$

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *signifie que l'on fait une somme infinie de rectangles de hauteur* $f(x)$ *et de largeur infiniment petite* dx *entre* a *et* b.

- *[…] le* dx *est une quantité infinitésimale représentant la base des rectangles.*

- dx *est la notation infinitésimale de* Δx.

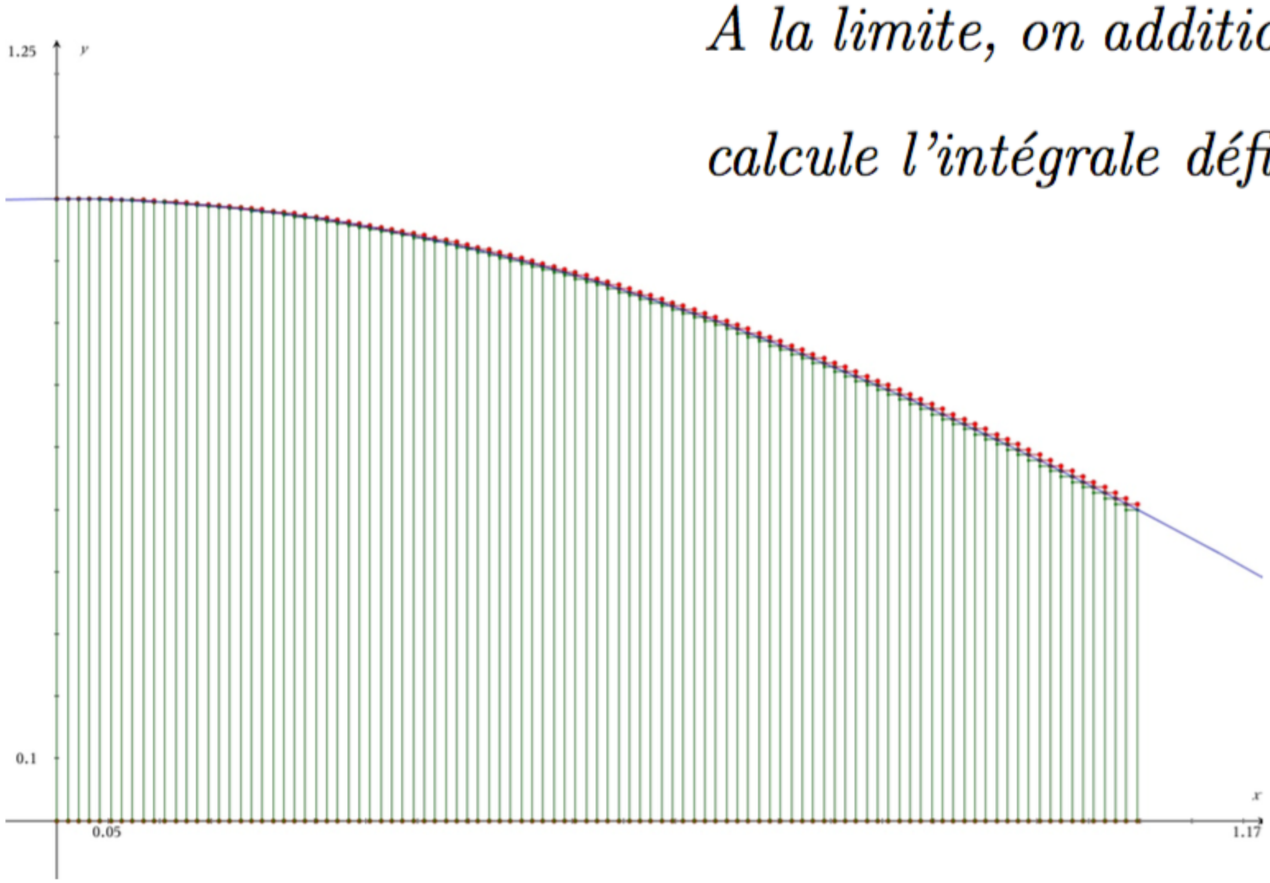
- $dx \approx \Delta x \to 0.$

- $dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x.$

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

$$dx \textit{ désigne } \Delta x \textit{ infiniment petit : } dx = \lim_{x_i \to x_{i+1}} \Delta x \text{ (Actimath 6 2009, p. 134)}$$

où x_i et x_{i+1} sont les bornes d'un sous-intervalle de la subdivision de l'intervalle $[a, b]$.



A la limite, on additionne une infinité de bâtonnets d'aire nulle, on calcule l'intégrale définie de 0 à $\pi/3$ *de* $\cos x \, dx$ $\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx\right)$

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

Intégrale

COMPÉTENCES À DÉVELOPPER

CONCEVOIR L'INTÉGRALE COMME UNE SOMME INFINIE D'ÉLÉMENTS DE MESURE NULLE.

RÉSOUDRE DES PROBLÈMES À L'AIDE DU CALCUL INTÉGRAL.

6SUAA3 - Intégrale

Compétences à développer

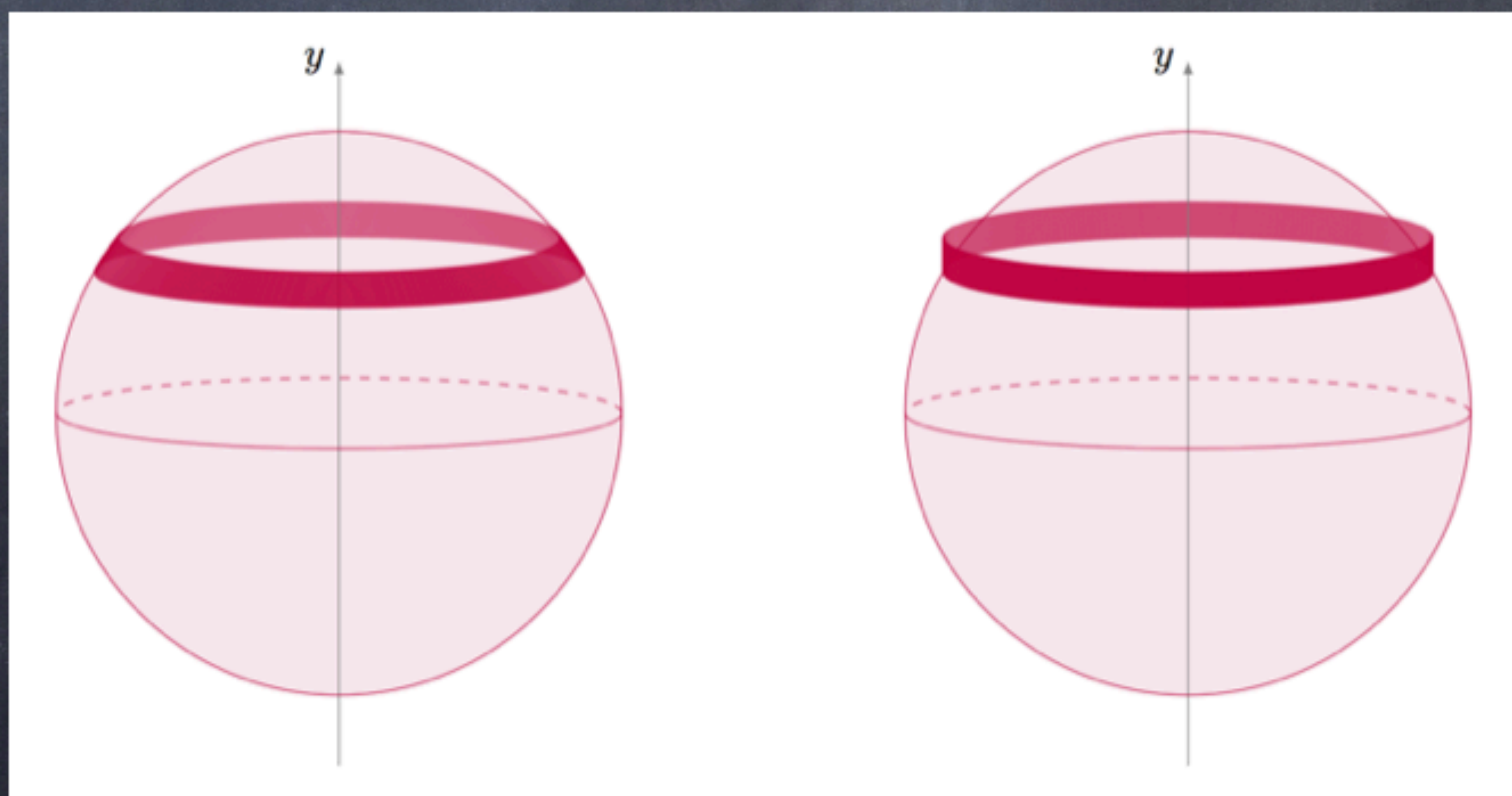
CONCEVOIR L'INTÉGRALE COMME UNE SOMME INFINIE D'ÉLÉMENTS DE MESURE NULLE

RÉSOUDRE UN PROBLÈME À L'AIDE DU CALCUL INTÉGRAL

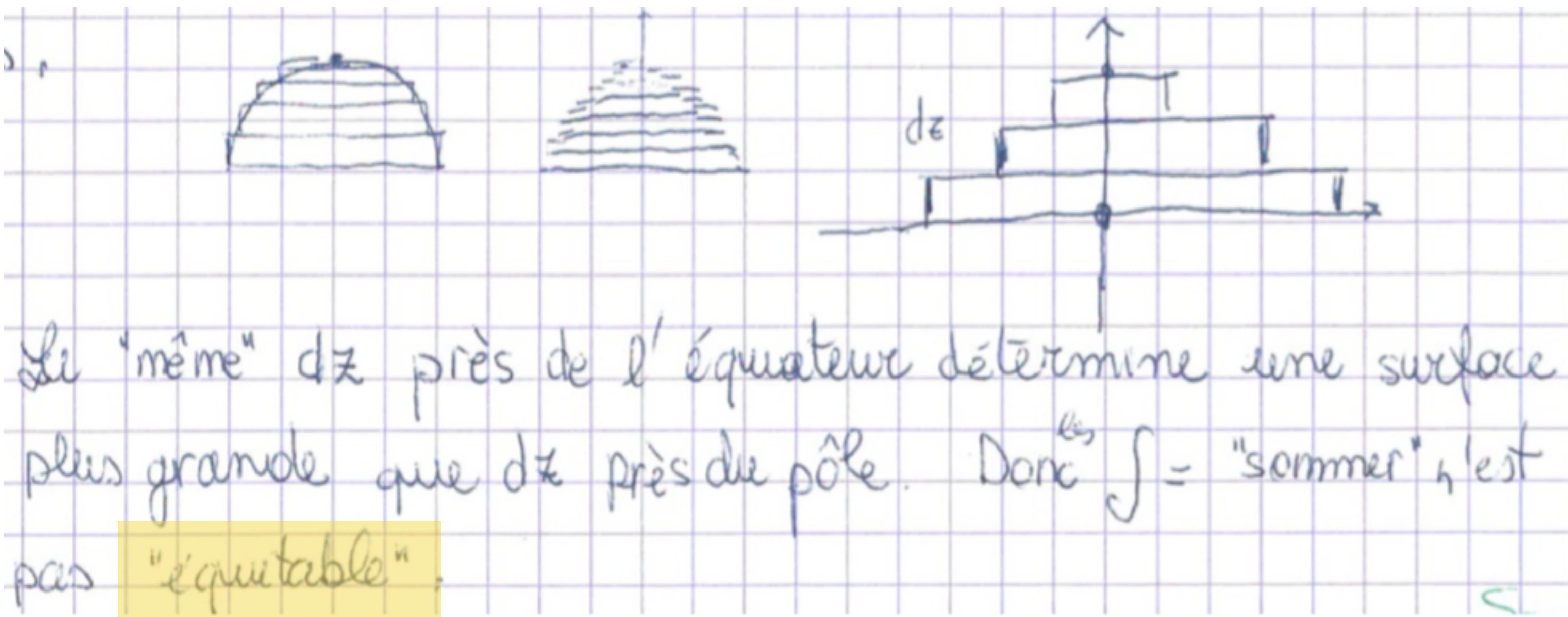
Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

$$\int_{-R}^{R} \pi[r(y)]^2 \, dy = \frac{4\pi R^3}{3} \qquad dV = \pi[r(y)]^2 dy$$

$$\int_{-R}^{R} 2\pi r(y) \, dy = \cancel{\pi^2 R^2} \qquad dS = 2\pi r(y) \, dy$$

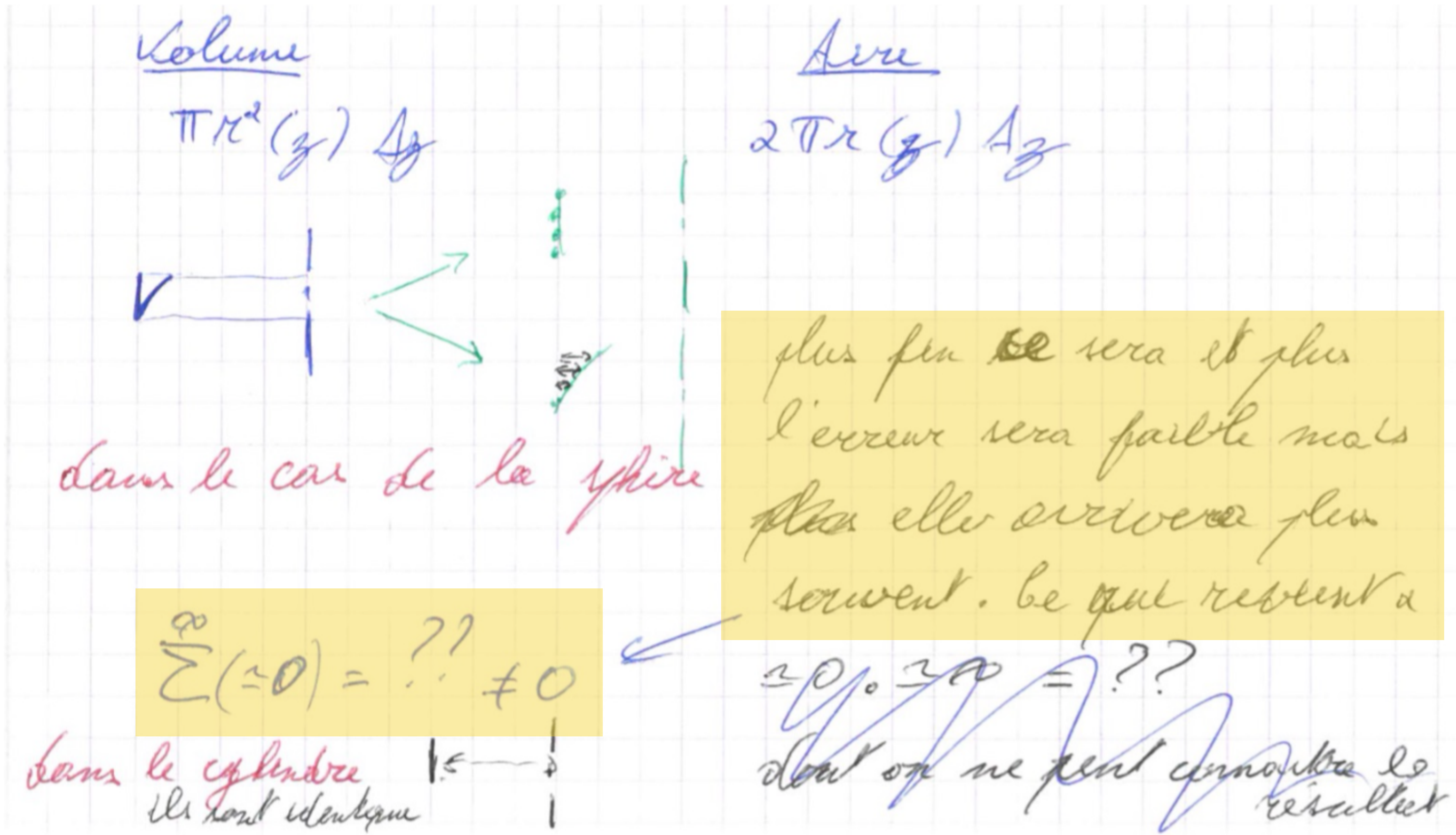


Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…


dz

Le "même" dz près de l'équateur détermine une surface plus grande que dz près du pôle. Donc les $\int$ = "sommer" n'est pas "équitable".

Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…



Des obstacles épistémologiques en résonance avec des obstacles didactiques…

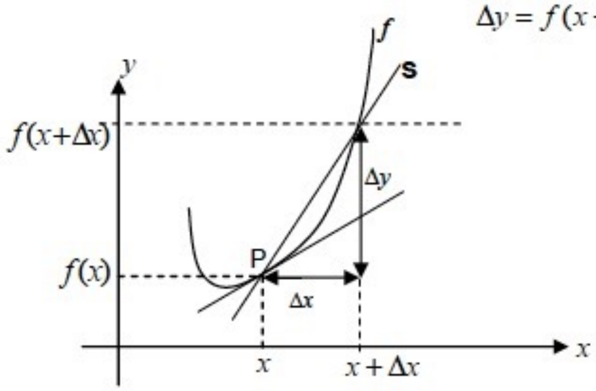
Chapitre 3. Les primitives

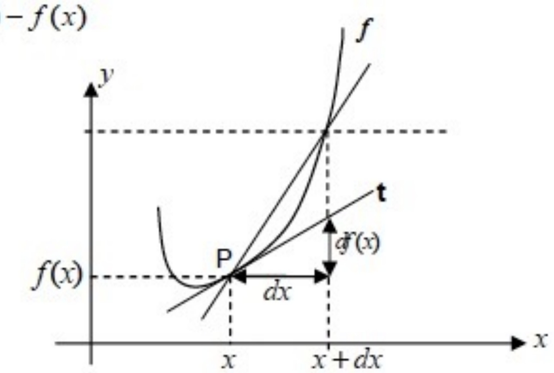
A. Notion de différentielle

1. Définition

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et son graphique.
A un accroissement arbitrairement choisi Δx, correspond un accroissement Δy

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$





$\Delta y \cong df(x)$ pour Δx suffisamment petit $(\Delta x \to 0)$

La droite t tangente au graphique de la fonction f au point P a pour coefficient de direction

$$m_t = \frac{df(x)}{dx}$$

La droite s sécante au graphique de la fonction f a pour coefficient de direction :

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Par définition, on a

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Prenons un même accroissement de x : $\Delta x = dx$

$$dx = \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ d'où } df(x) = f'(x).dx}$$

où $df(x)$ est appelée la **différentielle** de la fonction f

$$\boxed{dx = \Delta x}$$

$$\begin{array}{rcl} df : U \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & df_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & df_x(h) = f'(x).h \end{array} \end{array}$$

• *La notation Δx désigne un réel fixé, il n'y a pas la notion de limite derrière. Alors que derrière dx se cache une limite : dx n'étant pas un nombre à proprement parler.*

• *Pour passer d'un accroissement fini Δx à une différentielle dx, il faut faire tendre le Δx vers 0. Il y a une notion de limite pour permettre le passage de Δx à dx.*

• *dx comprend une définition de limite : $\Delta x \to 0$. Donc l'écriture,*

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y}{dx} \quad \textit{est redondante !}$$

$$\boxed{dx = \Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Etudiant *Je n'oserais pas... Je n'oserais pas... Je n'oserais pas écrire deux fois limite. Mais c'est l'idée qui est derrière.*

Etudiant *Ben pour moi, le dx n'est utilisé que dans un contexte qui sont les primitives ou bien les dérivées où il est infiniment petit, j'ai jamais croisé un dx qui n'était pas infiniment petit.*

Je n'ai jamais croisé une notation où on utilisait dx, et où, ce qu'on écrivait était vrai pour un dx qui vaudrait 3 par exemple.

Dans les manuels scolaires…

- Le théorème fondamental est démontré -quand il l'est- sur base de théorèmes qui, eux ne le sont pas et les commentaires liés à ce théorème n'en donne pas de réelle intelligibilité, tout au plus ils constituent des constats sur des cas particuliers.
- Le focus global mis sur l'étude des variations de fonctions particulières ne permet pas de mettre en évidence les problèmes majeurs à l'origine du calcul infinitésimal.
- Le peu de place laissé à la modélisation fonctionnelle (hormis dans les exercices) ne fait pas des fonctions des modèles standardisés de covariations de grandeurs.
- Les approches des dérivées sont polarisées sur la tangente et assez peu sur d'autres applications, comme les vitesses liées par exemple, ce qui ne fait pas apparaître les dérivées comme modèles standardisant des contextes variés.
- Il en va de même pour les approches des intégrales où les « aires sous une courbe » ne sont pas présentées comme standardisant toutes les applications des intégrales définies.
- Les exercices privilégient l'aspect global au détriment du local et *a fortiori* ne supposent leur articulation.

5. Conclusion

- De notre analyse épistémologique, il ressort la nécessité :

  - d'une mise en correspondance de deux signifiés covariationnels

  - d'une articulation entre un regard local et un regard global

  - d'une perception de ces signifiés covariationnels comme modèles de standardisation de grandeurs.

- De notre analyse de la transposition, il ressort :

  - un focus global mis sur l'étude des variations de fonctions particulières…

  - … privilégient l'aspect global au détriment du local et *a fortiori* ne supposent leur articulation.

  - … qui laisse peu de place à la modélisation fonctionnelle et ne fait pas des fonctions des modèles standardisés de covariations de grandeurs.

- De notre analyse de la transposition, il ressort :

  - un focus global mis sur l'étude des variations de fonctions particulières…

  - … privilégient l'aspect global au détriment du local et *a fortiori* ne supposent leur articulation.

  - … qui laisse peu de place à la modélisation fonctionnelle et ne fait pas des fonctions des modèles standardisés de covariations de grandeurs.

  + une posture empiriste des enseignants, eux-victimes de l’obstacle, et qui aggrave l’obstacle d’apprentissage des élèves.

- Tout cela se conjugue pour rendre assez peu crédible l’apprentissage du théorème fondamental par les élèves, à moins d’un travail sur des praxéologies « modélisations » conçues pour cela, mais…