Journées bisontines de didactique et d'épistémologie

Visibilité de l'unité de longueur

André PRESSIAT

Ex-membre du LDAR – Université Diderot Paris 7

Ex-MCF de mathématiques – Université d'Orléans

Cours Complémentaires — Écoles Primaires Supérieures
Écoles Normales

ARITHMÉTIQUE

du Brevet élémentaire

avec compléments pour le Brevet supérieur

PAR

A. MARIJON
Inspecteur général
de l'Instruction Publique.

A. PEQUIGNOT
Directeur de l'École
primaire supérieure de Toulouse.

OUVRAGE CONFORME AUX PROGRAMMES DE 1920

6e ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE A. HATIER
8, rue d'Assas (VIe)

1934
Tous droits réservés

CHAPITRE III

SYSTÈME DES MESURES LÉGALES A BASE DIX

21. Notions sur la mesure des grandeurs. — La notion de nombre peut être précisée et complétée par des considérations sur la **mesure des grandeurs.**

Le mot ***grandeur*** est de ceux dont il est difficile de donner une définition générale. On l'applique, en mathématiques, à *tout ce qui est susceptible d'évaluation.*

La *longueur* d'une route, le *poids* d'un corps, la *contenance* d'une barrique, le *prix* d'une marchandise, sont des *grandeurs.*

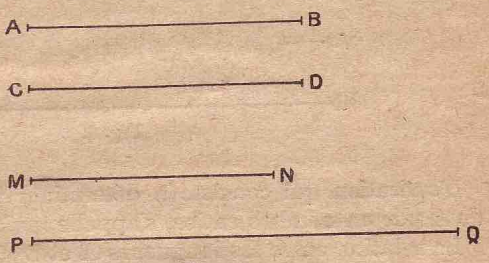


Fig. 1.

Les ***grandeurs mesurables*** sont celles pour *lesquelles on peut définir l'**égalité** et la **somme.***

Expliquons le principe de la mesure des grandeurs en prenant pour exemple des *longueurs.*

Égalité de deux longueurs. — *Deux longueurs sont* **égales** *quand on peut les superposer exactement.*

Exemple : AB et CD (fig. 1).

Dans le cas contraire, elles sont ***inégales.***

Exemple : MN et PQ.

Somme de plusieurs longueurs. — *La somme de plusieurs longueurs est la longueur obtenue en les juxtaposant bout à bout sur la même droite.*

Fig. 2.

Jusqu'ici, longueurs sans unités ni mesures.

Exemple : La longueur AD est la somme des longueurs AB, BC et CD (fig. 2).

Une longueur est dite **plus grande** *qu'une autre si elle est égale à la somme de cette autre et d'une troisième longueur.*

Fig. 3.

Par exemple, la longueur AD est **plus grande** que la longueur AC, car AD est la somme de AC et CD (fig. 3).

On dit, dans les mêmes conditions, que AC est **plus petit** que AD.

Multiples et sous-multiples d'une longueur. — Juxtaposons bout à bout, sur une même droite, dix longueurs égales à A. Nous obtenons ainsi une longueur B que l'on appelle **produit** de la longueur A par 10.

On exprime que B est le produit de A par 10 en écrivant :

$$B = A \times 10.$$

On dit que B est un **multiple de A** pour indiquer que B est la somme de plusieurs longueurs égales à A.

Fig. 4.

L'opération qui consiste à déterminer la longueur B, produit de A par un nombre entier, s'appelle *multiplication.*

La relation entre les longueurs A et B (fig. 4) se traduit encore dans le langage arithmétique par les phrases suivantes :

B contient 10 fois A; B est 10 fois plus grand que A; A est contenu 10-fois dans B; A est 10 fois plus petit que B; A est le dixième de B.

En général, *si B est multiple de A, A est appelé sous-multiple* ou *partie aliquote de B.*

DÉFINITION. — ***On appelle partie aliquote d'une longueur, une des parties de cette longueur divisée en parties égales.***

Pour nommer une partie aliquote, on fait suivre le nombre indiquant combien on a fait de parties, de la terminaison *ième.*

Exemples : Si l'on a fait 6 parties égales, chacune s'appelle *sixième.* Si l'on a fait 100 parties égales, chacune s'appelle *centième.*

22. — Proposons-nous maintenant de *mesurer* la longueur d'un banc. Il faut d'abord choisir une longueur unité.

Cette unité est appelée **mètre**; le mètre est divisé en dix parties égales appelées **décimètres**; chaque décimètre est lui-même divisé en dix parties égales, qui sont 100 fois plus petites que le mètre, et qu'on appelle **centimètres**.

Portons le mètre sur la longueur du banc pour savoir combien de fois il y est contenu; si la longueur du banc est la somme de trois longueurs égales à un mètre, nous dirons que le nombre qui mesure la longueur du banc est le nombre 3, le mètre étant l'unité, ou encore que la longueur du banc est 3 mètres.

Il est clair que toutes les longueurs que l'on obtient en portant bout à bout sur une même droite des longueurs égales à un mètre sont mesurées par des *nombres entiers*. Les longueurs successives ainsi obtenues peuvent être comparées aux collections d'objets dont il a été question au n° 7.

En particulier, si des longueurs sont mesurées par des nombres entiers a et b, leur somme est mesurée par le nombre $a+b$. Les nombres entiers ne suffisent pas à mesurer toutes les longueurs.

Supposons que le banc à mesurer contienne plus de 3 fois et moins de 4 fois la longueur du mètre.

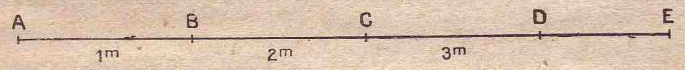


Fig. 5.

Après avoir porté 3 fois la longueur du mètre, nous verrons, par exemple, que la partie restante DE *contient* 7 décimètres et 4 centimètres. Nous dirons que la longueur du banc est *3 mètres, 7 décimètres, 4 centimètres.*

Si la longueur à mesurer est plus petite qu'un mètre et même qu'un décimètre, nous la mesurerons en cherchant combien elle contient de *centimètres* et, si c'est nécessaire, de parties dix fois plus petites appelées *millimètres.*

Le décimètre, le centimètre, le millimètre sont des unités nouvelles qu'on appelle **sous-multiples du mètre.**

Inversement si la longueur à mesurer est grande (longueur d'un champ, distance de deux villages, etc.), on prendra comme unité le produit du mètre par 10, 100, 1000 (décamètre, hecto-

mètre, kilomètre, etc.). Cela permet d'éviter l'emploi des nombres trop grands. Nous dirons par exemple : la distance de Paris à Toulouse est de 716 kilomètres (au lieu de dire 716000 mètres).

23. Unités principales. — Unités secondaires. — Ce qui précède pourrait être répété pour des grandeurs autres que les longueurs, par exemple les masses, les capacités... Ces grandeurs sont dites **continues**, parce qu'on peut les partager en parties aussi petites qu'on le veut (1).

Dans tous les cas, pour mesurer une grandeur, il faut d'abord choisir l'***unité principale***.

C'est toujours une grandeur de même espèce que la grandeur à mesurer; *elle doit être définie avec précision.*

On définit ensuite les unités secondaires qui sont des *multiples* ou des *sous-multiples décimaux* de l'unité principale.

Elles sont 10, 100, 1000 fois plus grandes ou plus petites que l'unité principale.

Pour nommer les *multiples* décimaux de l'unité principale, on fait précéder le nom de cette unité de l'un des préfixes : *déca*, *hecto*, *kilo*, *myria*, qui signifient respectivement : dix, cent, mille, dix mille.

Pour nommer les *sous-multiples* décimaux de l'unité principale, on fait précéder le nom de cette unité de l'un des préfixes : *déci*, *centi*, *milli*, qui signifient respectivement : dixième, centième, millième.

Mesures effectives. — Certaines unités sont réalisées matériellement sous la forme d'instruments utilisés pour la mesure des grandeurs.

La loi autorise aussi la construction d'instruments représentant le *double* ou la *moitié* d'une des unités principales ou secondaires.

Ces instruments sont désignés sous le nom de **mesures effectives.** Les commerçants sont tenus de se servir uniquement de mesures effectives vérifiées et *poinçonnées* (2). Des fonctionnaires spéciaux, les *vérificateurs des poids et mesures*, ont pour mission d'assurer l'application de la loi et de faire cesser l'usage des mesures détériorées.

(1) Les grandeurs *discontinues* sont celles qu'on ne peut diviser en parties aussi petites qu'on le veut. Telles sont les collections d'unités distinctes. Une classe de 35 élèves ne peut être partagée en dixièmes ou en centièmes. Pour mesurer une telle grandeur, l'unité ne saurait être choisie arbitrairement.

(2) Les vérificateurs marquent avec un poinçon spécial les mesures dont-ils ont contrôlé l'exactitude.

24. Définition. — ***Mesurer une grandeur, c'e combien de fois elle contient une grandeu espèce, appelée unité, ou l'un des multiples o multiples de cette unité.***

La loi du 2 avril 1919 a prescrit en France, l'empl M. T. S.

Les unités principales dans ce système sont : le mè longueur, la **tonne**, *unité de masse, la* **seconde**, *u d'où le nom de système M. T. S. qui lui a été donné.*

1° Mesures de longueur.

25. — L'unité principale des mesures de longueu

Définition du mètre. — ***Le mètre est la lo température de zéro, du prototype internati tine iridié, qui a été sanctionné par la Conféren des Poids et Mesures, tenue à Paris en 188 déposé au pavillon de Breteuil, à Sèvres.***

La copie n° 8 de ce prototype international, Conservatoire national des Arts et Métiers, légal pour la France.

La longueur du mètre est très approximativement nième partie du quart du méridien terrestre, qui a été prise comme point de départ pour l'établir.

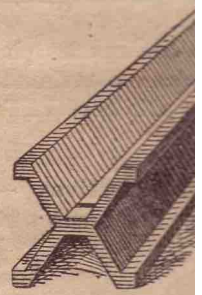


Fig. 6. — Mètre

Le prototype international est une barre en platine iridié (90 parties de platine et 10 d'iridium) ayant la forme d'un prisme évidé sur ses 4 faces. Sa section transversale a à peu près la forme d'un X. Cette barre a une longueur supérieure à 1 mètre et porte deux traits dont la distance, à 0°, est un mètre. C'est ce qu'on appelle un *mètre à traits*, pour le distinguer des *mètres à bouts*, da longueur du mètre est représentée par la règle tou

On a fait des copies du prototype international distribuées par tirage au sort à tous les États ay *système métrique.*

C'est la copie n° 8 qui est le mètre légal en Fra

Marijon
Géométrie du Brevet élémentaire,
1935
Hatier,
Programmes de 1920

Remarque ayant suscité la colère d'Henri Lebesgue… ainsi que la définition du rapport de deux longueurs donné sur la diapo suivante...

aux longueurs A′B′, C′D′, E′F′..., si *le rapport de deux longueurs de la* 1re *série est égal au rapport des longueurs correspondantes de la* 2e *série.*

Soit une proportion entre longueurs, AB, CD, A′B′, C′D′ :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}. \qquad (1)$$

Cette proportion entraîne, d'après le nº 264, la proportion correspondante entre les nombres l, m, l', m' qui mesurent ces quatre longueurs :

$$\frac{l}{m} = \frac{l'}{m'} \qquad (2)$$

Inversement, la dernière proportion entraîne la première. Or, la proportion (2) étant une proportion entre quatre nombres, nous pouvons faire subir à cette proportion certaines transformations.

En particulier, elle entraîne les suivantes :

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'}\ ; \quad \text{et} \quad \frac{l+l'}{l-l'} = \frac{m+m'}{m-m'} \qquad (3)$$

Comme $l + l'$ mesure la somme AB + A′B′, $l - l'$ la différence AB — A′B′,.... et comme, d'autre part, les rapports des nombres mesurant des longueurs sont égaux aux rapports de ces longueurs, les égalités (3) entraînent les proportions :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} \quad \text{et} \quad \frac{AB + A'B'}{AB - A'B'} = \frac{CD + C'D'}{CD - C'D'}$$

En d'autres termes : *On peut faire subir aux proportions entre longueurs les mêmes transformations qu'aux proportions entre nombres.*

REMARQUE. — On observera que l'égalité des produits des extrêmes et des moyens, qui constitue la propriété fondamentale des proportions numériques, n'a plus aucun sens quand il s'agit d'une proportion entre longueurs. Le produit AB × C′D′, de deux longueurs, n'a aucun sens : dans la définition d'un produit, on suppose essentiellement que le multiplicateur est un nombre abstrait.

267. — Si nous considérons en particulier deux séries de longueurs proportionnelles AB, CD, EF,... A′B′, C′D′, E′F′....

nant de A et C les parallèles à Δ′ jusqu'à leurs intersections et D_1 avec les droites *b* et *d*.

Les triangles ABB_1 et CDD_1 ont leurs côtés AB et CD égaux r hypothèse). Leurs angles en A et C, B et D sont égaux me correspondants par rapport aux couples de parallèles $_1$ et CD_1, *b* et *d*, coupées par la sécante Δ. Ces deux triangles t donc égaux (1er cas). On en conclut que $AB_1 = CD_1$ tés opposés à des angles égaux). — Mais $AB_1 = A'B'$ et $_1 = C'D'$, comme côtés opposés des parallélogrammes $'B'B_1$, $CC'D'D_1$ (leurs côtés opposés ont été tracés paral-s). On en conclut que $A'B' = C'D'$. — C'est ce que nous s proposions de démontrer.

262. Application. — *Pour partager le segment* AB *en* 5 *parties les*, nous mènerons de l'extrémité A de ce segment une demi-droite arbitraire, AX ; nous porterons, à partir de A, sur AX, au moyen du compas, 5 longueurs égales juxtaposées, dont les extrémités sont les points 1, 2, 3, 4, 5 (fig. 174). En joignant le point 5 au point B et en menant par les points 1, , 4, de AX, des parallèles à la droite 5B, nous obtenons des ites qui coupent AB en 5 parties égales. — L'égalité de ces ties résulte, en effet, d'après le théorème précédent, de celle longueurs portées sur AX.

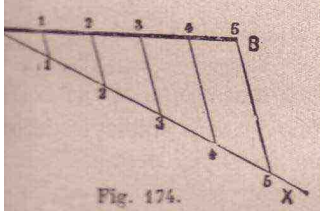


Fig. 174.

ENARQUE. — Les figures 175 et 176 ntrent comment, en utilisant le théo-e du n° 261, on peut partager une

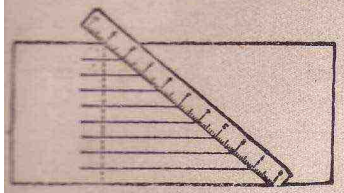


Fig. 175.

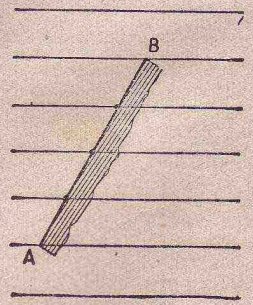


Fig. 176

de en *n* bandes égales, au moyen d'un décimètre ; ou comment,

si l'on a du papier à rayures parallèles et équidistantes, on peut partager pratiquement une longueur AB en *n* parties égales.

§ II. — Définition du rapport de deux longueurs.

262. — *La définition du rapport de deux longueurs* — cas particulier du rapport de deux grandeurs *de même espèce* — a déjà été donnée en Arithmétique. Rappelons-la brièvement :

On dit que la longueur AB *est les* $\frac{7}{5}$ *de la longueur* CD — *ou que le* **rapport** *de la longueur* AB *à la longueur* CD *est* $\frac{7}{5}$ — *lorsque la longueur* AB *est la somme de* 7 *longueurs égales aux parts obtenues dans le partage de* CD *en* 5 *parties égales.*

Si AB est les $\frac{7}{5}$ de CD, $AB = CD \times \frac{7}{5}$ (n° 35).

En général, dire que le rapport de AB à CD est égal à la fraction $\frac{m}{n}$, c'est dire que *si l'on partage* AB *en* m *parties égales* CD *en* n *parties égales, toutes les parties obtenues sont égales.* — Chacune d'elles est une *commune mesure* à AB et CD.

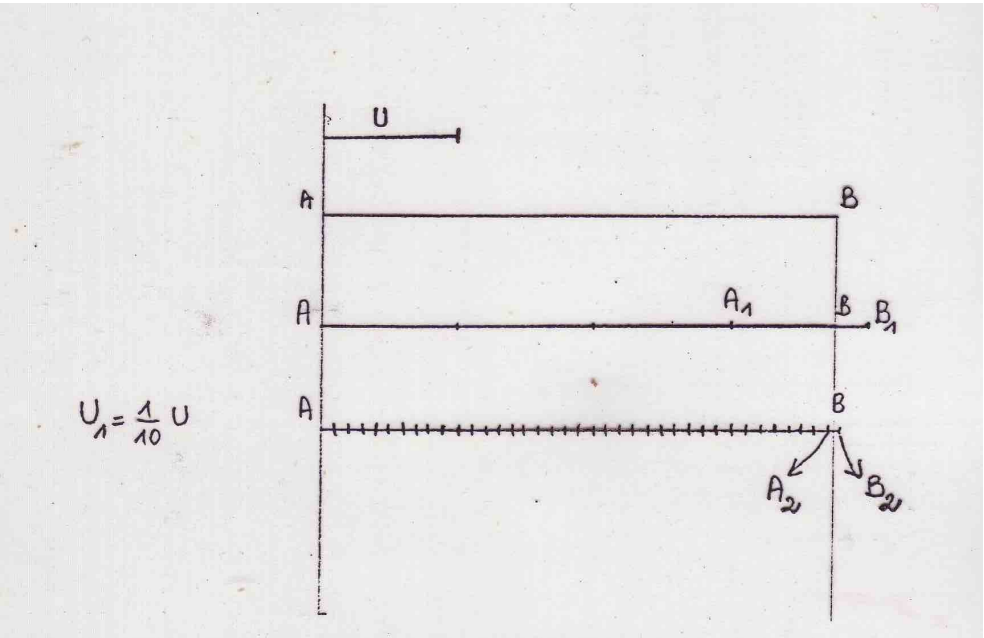
263. Notation. — On exprime que le rapport de AB à CD est $\frac{m}{n}$, en écrivant : $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ $\left(\text{ce qui équivaut à } AB = CD \times \frac{m}{n}\right)$

Le *rapport des longueurs* AB et CD s'appelle aussi le *rapport des segments* AB et CD.

Nous ferons entrer un rapport égal à un nombre entier dans la définition générale précédente, en considérant un entier comme une fraction de dénominateur 1.

REMARQUE. — Le symbole $\frac{AB}{CD}$, qui répond à la définition précédente, n'est pas une fraction. — Ses deux *termes* sont des longueurs, et non pas des nombres entiers. Mais la *valeur* de ce rapport de longueurs est, dans les exemples considérés, une fraction arithmétique.

Henri Lebesgue et la mesure des longueurs



De même que, lorsqu'on compte les éléments d'une collection, « un nombre entier peut être considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet », un nombre réel est « le compte-rendu complet de cette suite indéfinie d'opérations » faites lorsqu'on mesure un segment AB avec un segment unité U.

« Au segment AB, on associe une suite de chiffres avec virgule, par exemple 3,7602… que nous appellerons un nombre. Réciproquement, toute suite de chiffres indéfinie vers la droite et comportant une virgule est-elle un nombre ? C'est-à-dire provient-elle de la comparaison d'un segment AB à U ? … »

Tomes XXX1 (1931) à XXXV (1935) de L'enseignement mathématique.

Introduction de **R** et de la séparation affine / affine euclidien

65. ***La construction de la géométrie élémentaire.*** — 1° La géométrie élémentaire, telle qu'elle a été présentée au lecteur dans les classes secondaires, peut être schématisée de la façon suivante :

I. On part d'un ensemble E, dit *espace*, dont les éléments sont appelés *points*; on distingue certains sous-ensembles de E, sous le nom de *droites* et *plans*.

II. On impose une première série d'axiomes (de géométrie affine), qui lient les points, droites et plans de E.

III. On introduit, sur l'ensemble des bipoints de E, une relation linéaire $\mathcal{R}$, dite *équipollence* et on démontre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $\vec{E} = \frac{E \times E}{\mathcal{R}}$ est dit ensemble des *vecteurs* de E.

IV. On munit $\vec{E}$:

a) d'une loi de composition interne qui est une loi de groupe additif;

b) d'une loi de composition externe, la multiplication par un nombre réel,

de telle sorte que $\vec{E}$ se trouve muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps R.

A ce stade de l'étude, on peut énoncer et démontrer des théorèmes d'où il résulte que l'application associant au bipoint (P, Q) de E, le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ de $\vec{E}$ vérifie les trois axiomes de structure d'espace affine que nous avons énoncés au n° 48. Autrement dit : l'*espace de la géométrie élémentaire peut être muni d'une structure affine*, au sens où nous l'entendons dans cet ouvrage.

V. Dans une seconde partie, on impose une seconde série d'axiomes (de géométrie métrique).

On peut alors démontrer que, *moyennant le choix d'une unité de longueur, l'espace de la géométrie élémentaire est devenu un espace affine euclidien*, au sens où nous l'entendons dans cet ouvrage : cela résulte du fait que le produit scalaire, au sens de la géométrie élémentaire, est associé à une forme bilinéaire symétrique, telle que la forme quadratique associée est définie positive.

Cagnac, Ramis, Commeau, Nouveau cours de mathématiques spéciales, Tome 3, Géométrie, Masson, 1967.

2° Inversement, on peut démontrer que, *le corps de base étant celui des réels, tout espace affine de dimension* 3, au sens où nous l'entendons dans cet ouvrage, *vérifie les axiomes de la géométrie élémentaire.* Il n'y a pas de difficulté en ce qui concerne les axiomes affines dont nous avons parlé au 1°, II; c'est ainsi que, par exemple, les propositions qui font l'objet de nos théorèmes I, III, IV du n° **56** et du théorème du n° **52**, sont en général adoptés comme axiomes de la géométrie élémentaire. La vérification des axiomes métriques, dont il a été question au 1°, est en revanche plus délicate. La comparaison de l'axiomatique de la géométrie élémentaire et de celle que nous avons adoptée ici n'est d'ailleurs pas de notre propos.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

CHAPITRE XI

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Ce chapitre est conforme aux programmes A1 et A2. (Il ne s'adresse pas aux lecteurs qui se sont conformés au programme A'2 et pour lesquels la géométrie vient de faire l'objet d'une construction axiomatique).

I. POINTS ET DIRECTIONS EN GÉOMÉTRIE AFFINE

121. ***Définitions métriques relatives aux vecteurs.*** — 1° **Module d'un vecteur.** — En géométrie métrique on sait comparer des segments de droite de direction quelconque; à l'aide d'un segment-unité, défini indépendamment de sa direction, on sait mesurer tout segment de droite, en trouver la *longueur*.

O étant l'origine du repère, soit $\overrightarrow{OM}$ un représentant du vecteur (libre) $\vec{V}$; la longueur du segment OM, connue grâce au choix d'un segment-unité, s'appelle *module* (ou longueur) du vecteur; on le note

$$\|\vec{V}\|, \qquad |\vec{V}| \qquad \text{ou simplement V.}$$

Les vecteurs unitaires relatifs à des directions différentes sont associés à des segments tous égaux au segment-unité.

Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire ayant la direction de $\vec{V}$; en géométrie affine, on définit la mesure algébrique $\overline{V}$ de $\vec{V}$ pour $\vec{i}$, et on note

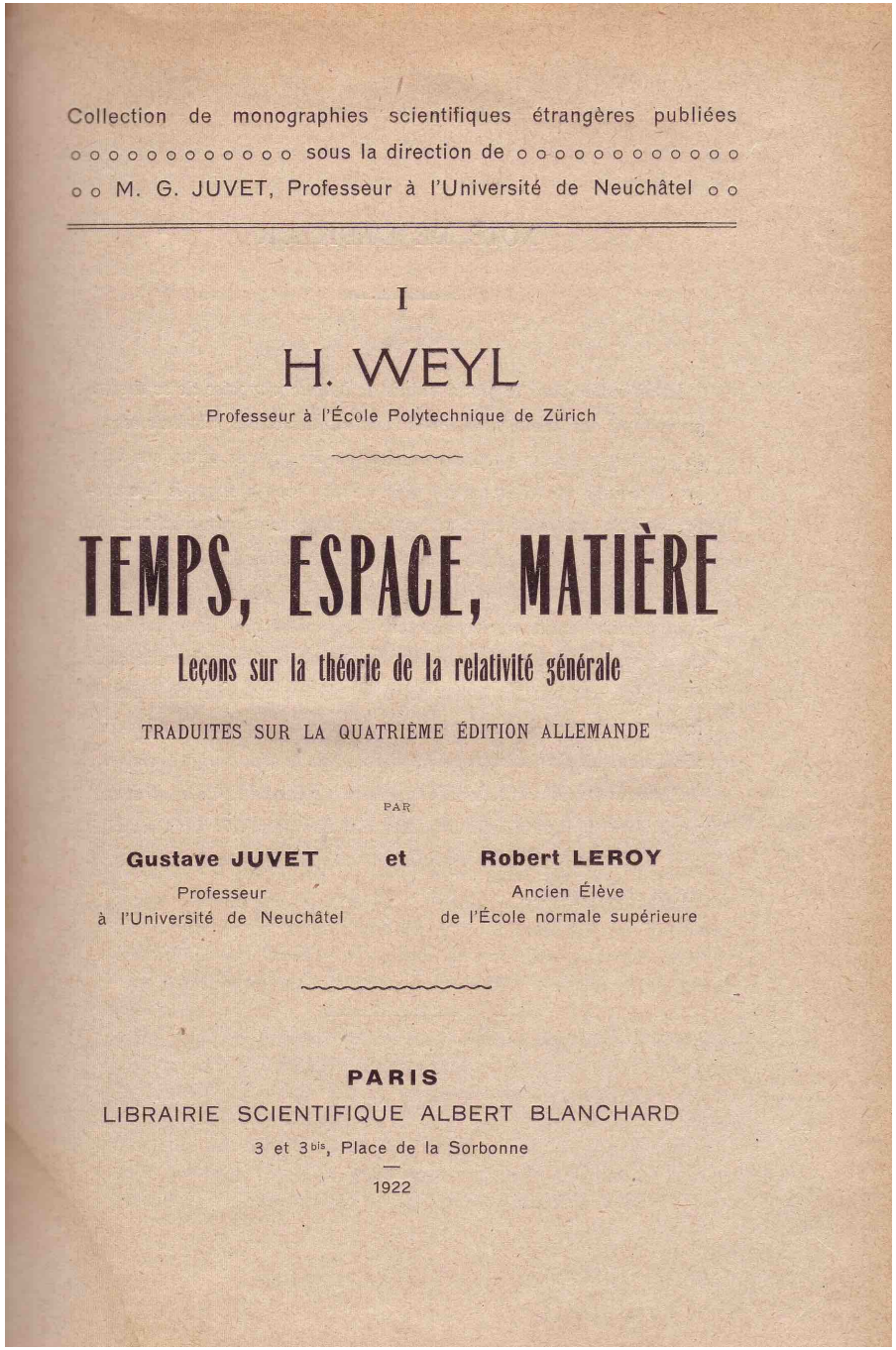
$$\vec{V} = \overline{V}\,\vec{i}.$$

Le module du vecteur est alors la valeur absolue du nombre réel $\overline{V}$:

$$\|\vec{V}\| \qquad = |\overline{V}| \qquad = V$$

module du vecteur — valeur absolue de la mesure algébrique

2° **Angle de deux vecteurs.** — La géométrie métrique introduit l'angle



Collection de monographies scientifiques étrangères publiées
sous la direction de
M. G. JUVET, Professeur à l'Université de Neuchâtel

I

H. WEYL

Professeur à l'École Polytechnique de Zürich

TEMPS, ESPACE, MATIÈRE

Leçons sur la théorie de la relativité générale

TRADUITES SUR LA QUATRIÈME ÉDITION ALLEMANDE

PAR

Gustave JUVET et **Robert LEROY**

Professeur à l'Université de Neuchâtel

Ancien Élève de l'École normale supérieure

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ALBERT BLANCHARD

3 et 3bis, Place de la Sorbonne

1922

One way to learn a lot of mathematics is by reading the first chapters of many books.

Paul R. Halmos

La translation étant ainsi définie sans l'aide de la rotation, on peut encore donner du plan et de la droite, une définition qui ne fasse intervenir que la notion qu'on vient d'éclaircir. En effet, soit **a** une translation qui amène A_0 en A_1; alors A_1 va en A_2, A_2 en A_3, etc.; A_0 de plus vient de A_{-1}, A_{-1} de A_{-2}. Nous obtenons ainsi, non pas une droite, mais une suite discrète de points équidistants. Si n est un nombre entier, il existe une translation $\frac{\mathbf{a}}{n}$, qui, si on l'applique n fois donne le même résultat que si l'on effectue **a**. Nous trouvons alors, en l'appliquant à A_0, un nombre de points n fois plus grand sur la droite à construire. Si nous prenons pour n, tous les nombres entiers, nous obtiendrons un ensemble de points de plus en plus dense. La ligne droite, pouvons-nous dire, en passant à la limite et en invoquant notre intuition du continu, résulte de la même translation infinitésimale répétée indéfiniment, ainsi que son

inverse. Un plan résulte de la translation d'une droite g le long d'une autre h; si g et h sont deux droites qui se coupent en A_0, on applique à g toutes les translations qui conservent h; l'ensemble des droites ainsi obtenu à partir de g forme le plan (g, h).

La construction logique de la géométrie est ordonnée plus simplement, si l'on borne la notion de représentation congruente à celle de translation (§§ 2, 3). Nous obtiendrons ainsi une géométrie dite *affine* dans les cadres de laquelle la notion générale de congruence sera introduite (§ 4). L'intuition nous ayant donné les notions nécessaires, nous entrons de suite dans le domaine de la mathématique **déductive.**

§ 2. — Les bases de la géométrie affine.

§ 4. — Les bases de la géométrie métrique

Nous aurons encore recours à l'intuition pour passer de la géométrie affine à la géométrie métrique. Rappelons (pour l'espace) ce qu'est la grandeur qu'on nomme *produit scalaire* de deux vecteurs **a** et **b**. Après avoir fait choix d'un vecteur unitaire, nous mesurons la longueur de **a** et (ayant égard à la direction) la longueur de la projection orthogonale de **b** sur **a** ; le produit des deux nombres qui mesurent ces longueurs est le produit scalaire **a.b**. Il ne s'agit pas seulement ici — comme dans la géométrie affine — de comparer les longueurs de segments parallèles, mais encore il faut que nous puissions comparer les longueurs de segments diversement dirigés. Les règles qui régissent le calcul du produit scalaire s'expriment par les égalités :

$$\lambda\mathbf{a}.\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}.\mathbf{b}), \qquad (\mathbf{a}+\mathbf{a}').\mathbf{b}=(\mathbf{a}.\mathbf{b})+(\mathbf{a}'.\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{b}')=(\mathbf{a}.\mathbf{b})+(\mathbf{a}.\mathbf{b}'), \qquad \mathbf{a}.\mathbf{b}=\mathbf{b}.\mathbf{a}.$$

Le produit scalaire de **a** par lui-même $\mathbf{a}.\mathbf{a}=\mathbf{a}^2$ est toujours positif, sauf si $\mathbf{a}=0$; il est égal au carré de la longueur de **a**. Ces règles ont pour conséquence que le produit scalaire **x.y** de deux vecteurs quelconques est une forme bilinéaire symétrique, dont la forme quadratique correspondante est définie positive. On reconnaît donc que ce n'est pas la longueur d'un vecteur, mais bien le carré de cette longueur qui dépend rationnellement du vecteur; cette dépendance s'exprime au moyen d'une forme quadratique : c'est là, à proprement parler le contenu essentiel du *théorème de Pythagore*. Le produit scalaire n'est pas autre chose que la forme symétrique bilinéaire, qui provient de cette forme quadratique. Nous formulerons donc ainsi l'*axiome métrique : Après le choix d'un vecteur unitaire* **e**, *deux vecteurs* **x** *et* **y** *déterminent univoquement un nombre* $(\mathbf{x}.\mathbf{y})=Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$; *ce nombre est une fonction bilinéaire symétrique des 2 vecteurs, et la forme quadratique* $Q(\mathbf{x},\mathbf{x})$ *qui lui correspond* $(\mathbf{x},\mathbf{x})=Q(\mathbf{x})$ *est définie positive.* $Q(\mathbf{e})=1$.

Puisque la notion de congruence est définie par la forme métrique fondamentale, il n'y a rien d'étonnant alors, que celle-ci entre dans toutes les formules qui sont relatives à la mesure des grandeurs géométriques. Deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont congruents si l'on a :

$$Q(\mathbf{a}) = Q(\mathbf{a}')$$

Nous pourrions prendre le nombre $Q(\mathbf{a})$ comme mesure de la longueur du vecteur $\mathbf{a}$, mais pour que la longueur de la somme de deux vecteurs parallèles soit égale à la somme des longueurs des parties, nous prendrons comme *définition* de la longueur du vecteur $\mathbf{a}$ *la racine carrée positive* de $Q(\mathbf{a})$. Soient $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ deux couples de vecteurs de longueur égale à l'unité, les deux figures qu'ils forment chacun sont congruentes, pourvu que :

$$Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) = Q(\mathbf{a}',\mathbf{b}')$$

Nous ne prenons pas ce nombre $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ comme mesure de *l'angle*, mais nous définissons celle-ci par la relation

$$\cos.\theta = Q(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

afin que la mesure de la somme de deux angles soit égale à la somme des mesures des parties. L'angle θ de deux vecteurs $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ quelconques, mais $\neq 0$, est alors donné par la relation :

$$\cos\theta = \frac{Q(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\sqrt{Q(\mathbf{a},\mathbf{a}).\ Q(\mathbf{b},\mathbf{b})}} \tag{11}$$

$\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont rectangulaires, si $Q(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$.

P

Proportionnalité

Opération
Proportionnalité
Relation

Thème 1 : Proportionnalité et non-proportionnalité

P 1 Des situations dans lesquelles existent ou non des relations de proportionnalité.
P 2 Comment reconnaît-on une situation de proportionnalité.
P 3 Recherche de coefficient de proportionnalité.
P 4 A la poste.
P 5 Relation « prix-poids ».
P 6 Extrait d'annonce : relation « prix-superficie ».
P 7 Mesure de l'épaisseur d'une page d'un livre.
P 8 Suites de décimaux proportionnels - Recherche de coefficients de proportionnalité.
P 9 Recherche de nombres proportionnels.

Thème 2 : Pourcentage

P 10 Remises et taxes.
P 11 Calculs de prix.
P 12 Augmentation du coût de la vie.
P 13 Le prix de la baguette de pain dans quelques années.
P 14 Un remboursement de sécurité sociale.
P 15 Une offre publicitaire.
P 16 Statistique de classe.
P 17 Les opérateurs fractionnaires.
P 18 En vacances.

Thème 3 : Autres coefficients de proportionnalité

P 19 Développements de bicyclettes.
P 20 Echelle des petites voitures.
P 21 Agrandissement d'un dessin : coefficient d'agrandissement.
P 22 Une facture de gaz : taux de la TVA.

Faire des mathématiques
Deledicq-Lassave
Cédic 6e - 1977

M

Mesurer

Aire
Angle
Evaluation
Longueur
Mesure

Thème 1 : Mesurer des longueurs

M 1 Unités usuelles de longueur.
M 2 Conversions.
M 3 Bien écrire des longueurs.
M 4 Evalue le monde qui t'entoure.
M 5 Des unités sous-entendues dans des longueurs d'objets usuels.
M 6 Mesure ton corps.
M 7 Pointure et longueur du pied.
M 8 Les pistes concentriques d'un stade de course à pied.
M 9 Histoire de roues.
M 10 Ficelons la terre.

Thème 2 : Mesurer des aires

M 11 Comparer des surfaces librement.
M 12 Mesure d'aires.
M 13 Aire de surfaces tracées sur quadrillage.
M 14 Conversions.
M 15 Calculer les aires de surfaces d'objets usuels.
M 16 Terrains.
M 17 Mesure de l'aire d'un rectangle.
M 18 Relation entre longueur et aire.
M 19 Relations entre les aires de surfaces de même périmètre.
M 20 Décomposition d'une surface.
M 21 Un plan d'appartement.
M 22 Des chemins.
M 23-M 24 Aire du triangle.
M 25 Longueur et aire.
M 26 Aire du secteur de disque.
M 27 Aire de la France.
M 28 Partage en aires égales.
M 29 Aire du trapèze.

Thème 3 : Mesurer des angles

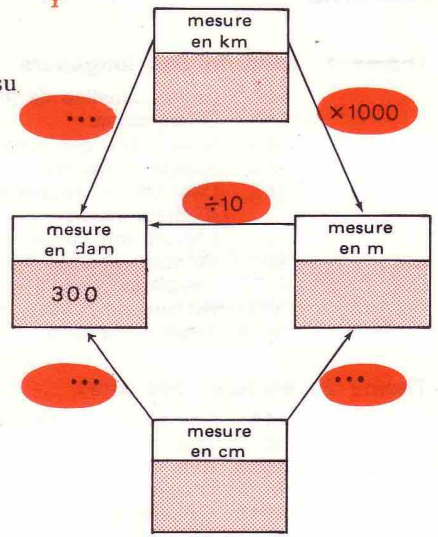
M 30 Somme des mesures des angles d'un triangle.
M 31 Somme des mesures des angles d'un polygone.
M 32 Le billard.
M 33 Longueur d'un arc de cercle.
M 34 Football - angle de tir et usage du rapporteur.
M 35 Conversions des degrés en minutes et secondes.
M 36 Addition de mesures d'angles.
M 37 Conversion grades-degrés.

THÈME 1 : MESURER DES LONGUEURS

Ψ *dictionnaire*

M 1 Unités usuelles de longueur

Ecris toutes les unités de longueur que tu connais, ou que tu as su trouver dans une encyclopédie.
Fais correspondre à chaque unité son abréviation légale.
Que signifient les préfixes : « déca », « hecto », « kilo » ?
et les préfixes : « déci », « centi », « milli » ?



M 2 Conversions

Complète les deux schémas suivants, en y plaçant des décimaux convenables. →

mesure en km	
mesure en hm	
mesure en dam	
mesure en m	
mesure en dm	30000
mesure en cm	
mesure en mm	

Que signifient les flèches ? Complète-les !

Complète aussi le tableau suivant (sur une ligne figurent les mesures d'un même segment).

mesure en km	mesure en m	mesure en cm	mesure en mm
		32,20	
	0,02		
			317
		0,107	
	a		
		b	

M 3 Bien écrire les longueurs !

Les écritures suivantes sont-elles correctes ou incorrectes ? Corrige-les dans le second cas en justifiant les raisons de ta correction :
8 cms ; 12 dm ; 26 Hm ; 62 mm ; 26 MM ;
47,5 m ; 38 m et 5 cm ; 4 M ; 43 cm 5 ; 29 kms.

M 4 Evalue le monde qui t'entoure

Ψ

Evalue « à l'œil » la hauteur d'une table, d'une chaise, les dimensions d'une armoire, d'une porte, d'une fenêtre, de ta salle de classe ou de ta chambre, de ton stylo, d'une pièce de 5 F (diamètre et épaisseur)...
Mesure ces objets.
Compare a) ton évaluation et ta mesure,
b) ta mesure et celles de tes camarades.

double décimètre
mètre ruban
éventuellement : pied à coulisse

R

Repérer

Repérage
Relation

Thème 1 : Repérage sur une ligne

R 1 Observation d'objets gradués.
R 2-R 3 Graduation d'une demi-droite et d'une droite.
R 4-R 5 Inégalités et demi-droite graduée : résoudre des « inéquations ».
R 6 Repérage sur une ligne courbe : graduation d'une spirale.
R 7 Numérotage de rue.

Thème 2 : Cartes et plans

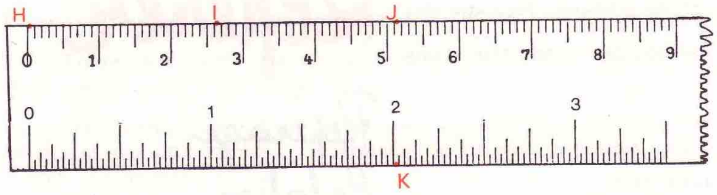
R 8 Carte de France et quadrillage.
R 9 Quadrillage et jardins de Versailles.
R 10 Repérage sur un atlas.
R 11 Repérage « polaire » de l'Afrique.

Thème 3 : Activités sur quadrillage

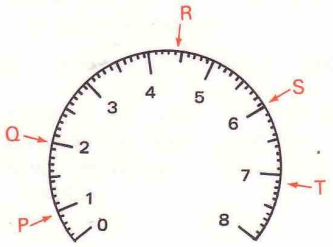
R 12 Quadrilatères à dessiner sur quadrillage : trouver des coordonnées.
R 13 Dessins de lettres sur quadrillage.
R 14 Chercher la mairie.
R 15 Une partie de morpion.
R 16 Un quadrillage oblique.

THÈME 1 : REPÉRAGE SUR UNE LIGNE

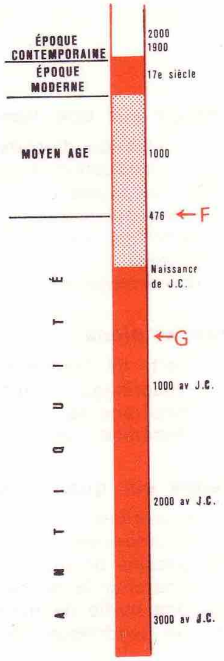
R 1 Observe les objets gradués ci-dessous



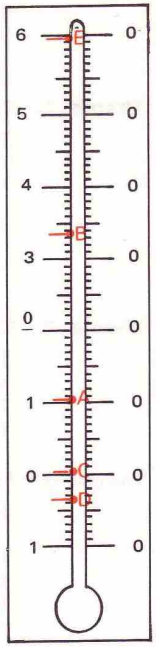
un triple décimètre portant deux graduations : l'une en centimètres, l'autre en unités anglaises.



Un compte tours de voiture



une échelle des temps



un thermomètre

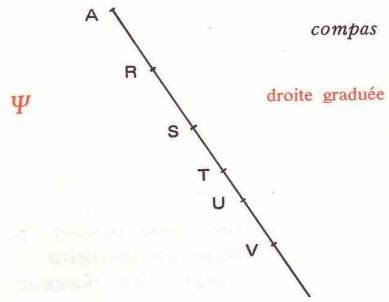
1. Dans tous ces exemples, nous sommes en présence de deux ensembles.
   Le premier ensemble est un ensemble de points, ou de traits, ou de divisions...
   Le second est un ensemble de nombres.
Précise pour chaque exemple, les ensembles dont il s'agit (quels nombres ? quels traits ?)

2. Cherche d'autres exemples d'objets régulièrement gradués.

3. Nous avons placé sur les objets dessinés les points A,B,C,D,E,F,G,H,I,...
Quel est leur « repérage » ?

R 2 Graduation d'une demi-droite

Décalque la demi-droite d'origine A dessinée ci-contre.
Gradue-la et indique le « repérage » de chaque point marqué sur le dessin.
Compare ta graduation et celles de tes camarades.
Avez-vous gradué « pareillement » ?
Comment « passe-t-on » d'une graduation à l'autre ?



M 5 Des unités sous-entendues

Dans le langage courant, tu as entendu les expressions suivantes.
Quelles sont les unités sous-entendues ?

une cuisine de 4 sur 5 ;
une feuille de classeur $21 \times 29{,}7$;
une course de 400 ;
une pellicule photographique 24×36 ;
une feuille de contreplaqué de 5 ...

Cherche d'autres exemples.

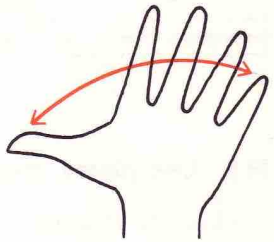
M 6 Mesure ton corps

Ψ *double décimètre*
ficelle (ou pied à coulisse)

1. Mesure le diamètre de ton pouce : x
   Mesure la longueur de son tour : y
   Chaque élève de la classe fait la même mesure - Faites un tableau.

   Calcule aussi $\frac{y}{x}$

Graphique !



2. Fais le même travail avec d'autres mesures :
   x est la longueur de la main
   y est la largeur
   (Mettez-vous d'accord sur ce qu'il faut mesurer.)
3. x est la longueur du pied
   y est la distance entre le pouce et le petit doigt, main écartée

Cette dernière mesure est très pratique ; tu as intérêt à connaître sa valeur pour ta main droite ; on l'appelle « empan ».

Et alors ?

M 7

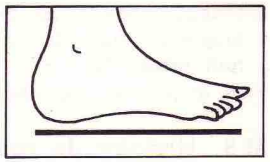
Voici une relation « pointure-longueur de pied » établie par un fabricant de chaussures.

Ψ *triple décimètre*

1. Contrôle avec les élèves de ta classe ce tableau.
2. On admet que la pointure d'une chaussure s'obtient en ajoutant à la longueur du pied, en cm, la moitié de cette longueur. Est-ce vrai pour ce tableau ?
3. As-tu trouvé le moyen de *calculer* la pointure lorsque tu connais la longueur du pied ?

CHAUSSURES

Prendre la mesure de votre pied comme indiqué sur le croquis et reportez-vous au tableau ci-dessous.



cm	19	19,6	20,3	21	21,6	22,3	23	23,6	24,3	25	25,6	26,3	27	27,6	28,3
point	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44

Faire des mathématiques
3e
Deledicq
Lassave,
C & D. Missenard
Cédic – 1980.

Distance

• Choisir une unité de longueur dans le plan $\mathcal{P}$ permet de définir une application appelée distance :

$$d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$$
$$(A, B) \mapsto d(A, B).$$

Propriétés : A, B, C étant trois points,
– $d(A, B) = 0$ ⟨équivaut à⟩ $A = B$
– $d(A, B) = d(B, A)$
– $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$ (inégalité triangulaire).

• *Distance et alignement : énoncé du plus court chemin.*
M, A, B étant des points,
$M \in [AB]$ ⟨équivaut à⟩ $d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)$.

• *Distance et parallélisme : côtés d'un parallélogramme.*
A, B, C, D étant quatre points non alignés,

Si (AB) // (CD) et (AD) // (BC) Alors AB = CD et AD = BC

• *Énoncé des milieux et une réciproque*
ABC étant un triangle,

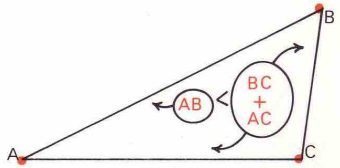
Si B' est le milieu de [AB] et C' est le milieu de [AC] Alors (B'C') // (BC) et B'C' = 1/2 BC

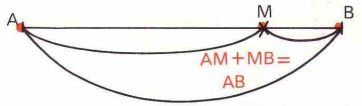
Si B' est le milieu de [AB] C' ∈ [AC] (B'C') // (BC) Alors C' est le milieu de [AC]

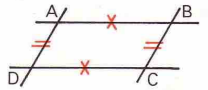
• *Distance et orthogonalité : médiatrice*
Définition : la médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment en son milieu.
Propriété : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points du plan équidistants des extrémités du segment.

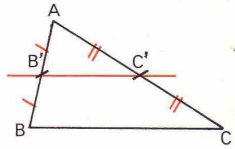
• *Distance d'un point à une droite*
Si D est une droite et P un point, la plus petite des distances de P à un point de D est celle de P à son projeté orthogonal sur D.

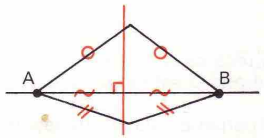
Dans la pratique, lorsqu'aucune confusion n'est possible, il est commode de noter AB à la place de $d(A, B)$.

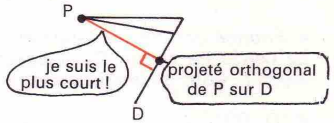












Cercle

Définitions :
• O étant un point, r étant un réel strictement positif, le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan dont la distance à O est r.
• Le disque de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan dont la distance à O est inférieure ou égale à r.

Introduction de la notion de distance

Aux États-Unis, Birkhoff et son axiomatique : règle graduée avec des nombres réels, rapporteur, triangles semblables (et isométriques), parallélisme… Son manuel scolaire avec son collègue Beatley, professeur de sciences de l'éducation.
1933, 1940-1941, 1959. Chelsea Publishing Company.

Ouvrage de Millmann et Parker : Geometry - A metric approach with models (Springer, 1981, 1991)
Reprend l'approche de Birkhoff, en la généralisant.
Géométrie neutre ou absolue.
Le plan muni de la "taxi-distance" n'en est pas une.

Blumenthal caractérise le plan euclidien en tant qu'"espace métrique" au sens de Fréchet dans son ouvrage "A modern view of geometry", Dover, 1961 et y traite de bien d'autres choses (affine, projectif…).

Queysanne-Revuz, Seconde CT, 1972

a) Distance définie sur P. Isométries de P.

Définition.

On appelle **distance** définie sur un plan P, ensemble de points, toute application d de $P \times P$ sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

D_1. Quelles que soient A et B de P on a

$$d(A, B) = 0 \Longrightarrow A = B.$$

D_2. Quels que soient A et B de P on a

$$d(B, A) = d(A, B).$$

D_3. Quels que soient A, B, C de P on a

a) $C \in [A, B] \Longrightarrow d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$,

b) $C \notin [A, B] \Longrightarrow d(A, B) < d(A, C) + d(C, B)$.

D_4. Quelle que soit la demi-droite [O, A) de P et quel que soit le nombre réel positif x il existe un point unique $M \in [O, A)$ tel que $d(O, M) = x$.

Le nombre $d(A, B) = d(B, A)$ est appelé **distance** des points A et B. Le plan P muni d'une distance est appelé **plan métrique.**

D'où ce D_4 sort-il ?

Annie Cousin-Fauconnet :
Enseigner la géométrie au collège
Armand Colin – 1995
Partie théorique pour le professeur

Longueurs et distances dans l'espace E muni de l'application d

1° La relation définie entre deux segments [AB] et [CD] par d(A,B) = d(C,D) est évidemment réflexive, symétrique et transitive : c'est donc une relation d'équivalence, et elle permet d'introduire, par classe d'équivalence interposée, la notion de longueur d'un segment :

a) on dira que les segments [AB] et [CD] ont même **longueur**, ou que la **distance** de A à B est égale à la distance de C à D, si d(A,B) = d(C,D),

b) on dira que d(A,B) est la **mesure, donnée par *d***, de la longueur du segment [AB], mais, plus habituellement, on introduira un segment [OI] tel que d(O,I) = 1, et on dira que d(A,B) est la **mesure de la longueur** du segment [AB], l'**unité de longueur** étant OI.

2° Si d′ est une autre application vérifiant les axiomes, et telle que d(A,B) = d(C,D) entraîne d′(A,B) = d′(C,D), alors il existe un réel positif k, tel que d′ = k d.

Qu'il est difficile de parler de distances sans parler de longueurs, d'unité de longueur, et de mesures de longueurs…

Programmes de 1985 (en collège)

J. Lelong-Ferrand dans “Les fondements de la géométrie” (PUF, 1985) réhabilite la question des grandeurs et de leur mesure.

Elle commence par la construction des réels à partir des développements décimaux illimités, après avoir évoqué le lien entre ces derniers et le problème de la mesure des grandeurs. Après avoir construit $\mathbb{R}$, elle revient plus précisément sur ce problème. Résumons l'essentiel, pour ce qui nous concerne.

Une grandeur physique mesurable (masse, longueur, ...) peut s'interpréter mathématiquement comme un demi-groupe abélien ordonné (la loi étant notée +), que l'on transforme, par le procédé de symétrisation, en groupe abélien ordonné G. (Ce qui revient à orienter la grandeur et à lui adjoindre des éléments dits «négatifs».)

Si ce groupe est archimédien, c'est-à-dire :

si pour tout couple (a, b) d'éléments de G tel que $a > O_G$,
il existe un entier n tel que $na > b$
(na désigne la somme de n termes égaux à a : $a + a + \ldots + a$).

.on démontre que :

pour tout a de G tel que $a > O_G$,
il existe un homomorphisme de groupes strictement croissant h_a
et un seul de $(G, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ tel que $h_a(a) = 1$.

g désignant un élément de G, $h_a(g)$ est la mesure de g quand on prend a comme unité.

C'est par définition le quotient de g par a que l'on note $\frac{g}{a}$.

Dans le cas où G = $\mathbb{R}$:

quel que soit le réel $a > 0$, il existe un homomorphisme de groupes strictement croissant h_a et un seul de ($\mathbb{R}$, +) dans ($\mathbb{R}$, +) tel que $h_a(a) = 1$. $\mathbb{R}$ ayant de plus de « bonnes » propriétés, il en résulte que h_a est bijectif, propriété que l'on peut utiliser pour définir la multiplication.

On peut alors démontrer que $h_a(b)$ est tel qu'en le multipliant par a, on obtient b, c'est-à-dire que $h_a(b) = \frac{b}{a}$.

Dans cette présentation, le quotient du réel b par le réel a, égal à $h_a(b)$, apparaît avant leur produit (égal à $h_a^{-1}(b)$), phénomène à relier au fait que le quotient de deux grandeurs a une signification physique alors que le produit de deux grandeurs n'en a pas (du moins pas de manière immédiate !).

Mme Lelong-Ferrand termine le chapitre en signalant que cette présentation de $\mathbb{R}$ « n'utilise que la théorie des décimaux et non celle des fractions, $\mathbb{Q}$ apparaissant comme ensemble des quotients d'entiers » et qu'elle « justifie le point de vue des récents programmes de premier cycle où l'on admet une notion assez vague (mais suffisante !) de nombre réel et où l'on considère les rationnels comme des quotients ».

En Sixième, ce point de vue conduit à mettre l'accent sur les quotients de décimaux.

Bareil –Zehren
Hachette
1986
Classe de 6e

Périmètre et addition des longueurs, sans unité ni mesures.

1 LONGUEURS ET PÉRIMÈTRES

I Un premier problème

Si tu parcours, une fois, les côtés d'un polygone, la longueur totale parcourue est le ***périmètre du polygone****.*
Pour l'obtenir ***sans mesurer****, il suffit de reporter et d'ajouter des longueurs.*
Faisons-le pour un triangle ABC (Cf. figure 1).

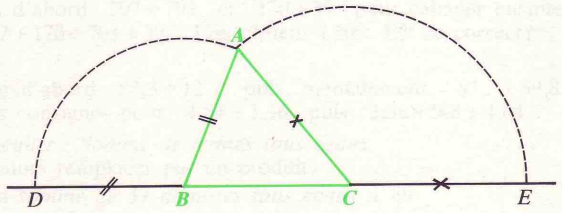


Figure 1

1 Nous avons reporté, **au compas,** sur la droite (*BC*) :
— la longueur *BA* en *BD*,
— la longueur *CA* en *CE*.

● Le périmètre du triangle est alors la longueur *DE*, somme des trois longueurs *BD*, *BC*, *CE*.

2 Vocabulaire et notations

● On simplifie habituellement *« longueur BA »* en *« BA »*, *« longueur BD »* en *« BD »*, etc.

On écrira donc « $BA = BD$ » pour « longueur BA = longueur BD », etc., et $DE = DB + BC + CE = AB + BC + CA$.

- On marque sur la figure **l'égalité des longueurs** BA et BD en « **barrant de la même façon** » *les deux segments* $[BA]$ *et* $[BD]$.
  De même pour CA et CE.
  ⚠ Deux segments, différents, de même longueur sont « *superposables* » : *ils* ***ne sont pas*** « *égaux* ».
- Pour obtenir D, on a « *prolongé le segment* $[CB]$, *vers* B, *d'une longueur* BD *égale à* BA ». Dis ainsi comment on obtient E.
- Pour simplifier, nous dirons « *dessiner une longueur* » au lieu de « dessiner un segment ayant cette longueur-là ».

3 Activité

Dessine, au compas, deux segments $[BA]$ et $[BC]$ de même longueur, avec B, A, C non alignés.

(⚠ Cela ne fait qu'un point B : Cf. page 16.)

- Construis (dessine, sans tâtonnements), comme ci-dessus, le périmètre DE du triangle ABC. Marque bien toutes les égalités de longueurs.

Question *Qu'est B pour le segment* $[DC]$?

4 Cas du triangle équilatéral

(« Triangle équilatéral » : Cf. page 47.)

- La figure 1 donne alors, par exemple, la figure 2, et $DE = BC \times 3 = 3BC$.

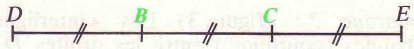


Figure 2

Nous avons aussi $BC = DE : 3 = \frac{1}{3} DE$ ($\langle\langle \frac{1}{3} DE$ » se lit « un tiers de DE »).

- Si BC est la longueur 2,25 cm , complète : $DE =$ ... cm.

II Un deuxième problème

1 Problème

Diviser, sans mesurer, une longueur par un entier.

- *Exemple :* Prenons la longueur 10 cm et **divisons-la par 7** *(fais ce qui*

Division d'une longueur sans mesurer…

suit, au fur et à mesure, en utilisant un quadrillage quelconque et en observant la figure 3) :

— prenons un réseau quadrillé de **7 bandes** *de bords extrêmes D et Δ;*

— marquons *A*, sur *D*, et *B*, sur *Δ*, tels que $AB = 10$ cm et traçons le segment $[AB]$;

— les 7 bandes **divisent 10 cm par 7**

et $AE = AB : 7 = \frac{1}{7} AB.$

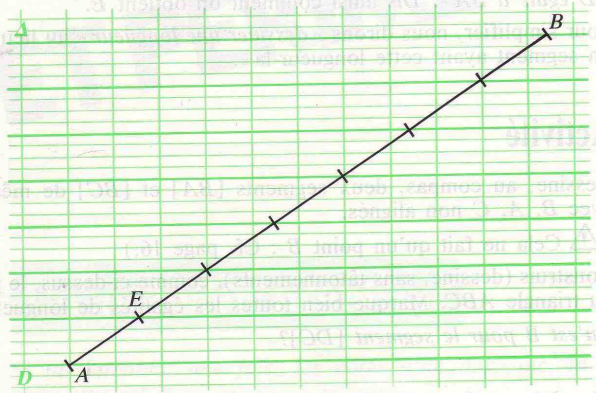


Figure 3

● *Remarque 1 :* Si tu as à diviser une longueur déjà dessinée :

— reporte-la sur ton quadrillage (avec un compas par exemple);

— ou bien, utilise un *« quadrillage mobile » :* quadrillage sur calque, bande de papier, ...

Remarque 2 : (figure 3) Les « interlignes » du quadrillage donnent 28 bandes (pourquoi?) entre les droites *D* et *Δ*. De là la division de la longueur *AB* par 28.

● *Exercice 1 :* Indique comment tu utiliseras un quadrillage pour obtenir le milieu d'un segment.

Exercice 2 : Divise, avec un quadrillage, la longueur 8 cm par 3 (prends des bandes de largeur 2 carreaux).

2 A propos de mesures

(Cf. figure 3.)

— Prenons la longueur centimètre comme unité de longueur.

— La *mesure* de la longueur *AB* (ou *« distance AB »*) est alors 10 et nous devrons avoir :

(mesure de *AE*) × 7 = 10.

(Nous reprendrons cela au chapitre 3.)

Choix d'une unité
et mesures…

III Mesurages et encadrements décimaux

1 *Exemple 1 : Jim, Luc, Ève, Zoé doivent évaluer, en mètres, la longueur, désignée par ℓ, d'un bâtiment.*

- Chacun propose **un encadrement décimal** (avec le mètre pour unité) :
  — « **à la dizaine** » (à 10 m près) pour Luc : $40\text{ m} < \ell < 50\text{ m}$;
  — « **entier** » (à 1 mètre près) pour Jim : $42\text{ m} < \ell < 43\text{ m}$;
  — « **au dixième** » $\left(\text{à } \frac{1}{10}\text{ m près}\right)$ pour Eve : $42{,}6\text{ m} < \ell < 42{,}7\text{ m}$;
  — « **au centième** » $\left(\text{à } \frac{1}{100}\text{ m près}\right)$ pour Zoé : $42{,}63\text{ m} < \ell < 42{,}64\text{ m}$;
- Nous avons chaque fois encadré ℓ par :
  — une « **approximation décimale par défaut** » (40 m; 42 m; 42,6 m; ...),
  — une « **approximation décimale par excès** » (50 m; 43 m; 42,7 m; ...).
- Pour signaler la difficulté d'obtenir exactement la longueur ℓ on parlera du « mesurage » de ℓ.

Exemple 2 (figure 3) : Donne, en mm, l'encadrement décimal entier de la longueur AE.

2 *Exercice :* Avec l'unité mm donne les *encadrements décimaux entiers* des longueurs AB, AC, BC de la figure 4.

Figure 4

3 Donne les *approximations décimales entière, au dixième, au centième*, du nombre 7,185.

Question *Quel lien fais-tu entre les approximations décimales par défaut et les troncatures?*

4 Mesurage et « milieu d'un encadrement »

- *Exemple :* Supposons que l'on trouve que la longueur d'une table est comprise entre 131,4 cm et 131,5 cm .
  On proposera 131,45 cm qui est la « moyenne » de 131,4 et 131,5 .
  Ce nombre est le « milieu de l'encadrement ».

Exercice *Il faut fixer une valeur pour un nombre x dont un mesurage a donné $87 < x < 88$. Que proposes-tu?*

5 **Évalue la précision de tes dessins et de tes mesurages.**
Pour la figure 4 ta mesure du segment $[AC]$ est-elle bien la somme des mesures des segments $[AB]$ et $[BC]$?

IV Rappels sur cercle et disque

1 Marque un point A.
Place plusieurs points à 3 cm de A. Où marqueras-tu tous les points qui sont à 3 cm de A?

2 Dessine le cercle de centre A et de rayon 4 cm.
Appelons-le : *cercle* (A ; $\underbrace{4\ cm}$)
centre — rayon
Marque un point B sur le cercle. Complète : $AB =$ ... cm.

3 Tout l'intérieur d'un cercle, et ce cercle-frontière, forment un **disque** : la région hachurée de la figure 5 est le disque (E ; 1,3 cm). Vérifie-le.

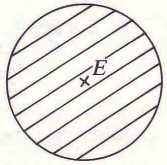


Figure 5

4 Figure 8 : diamètre = rayon × 2.
B et C sont **diamètralement opposés;** de même E et F; H et G.

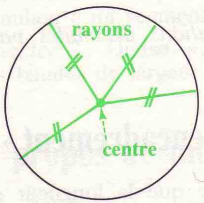


Figure 6

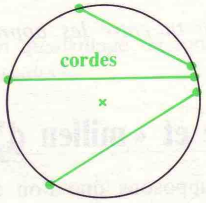


Figure 7

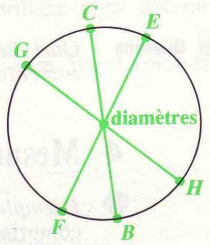


Figure 8

Exercice : Dessine deux cercles, qui se coupent en E et F. Marque le point B diamétralement opposé à E sur un cercle et D diamétralement opposé à E sur l'autre cercle.

3 LE QUOTIENT

I Activité : Bonjour le quotient!

1 Deux problèmes

- *On dispose d'une baguette en bois de* 50 cm.

  Problème 1 : *On veut la partager en baguettes de* 10 cm.
  Pour savoir le nombre de morceaux qu'on peut faire, on complète :

  $10 \text{ cm} \times \boxed{\ldots} = 50 \text{ cm}.$

  Problème 2 : *On veut la partager en* 10 *morceaux tous pareils. Pour savoir la longueur de chacun, on complète :* $\boxed{\ldots \text{ cm}} \times 10 = 50 \text{ cm}.$

- *Pour les deux problèmes, il s'agit de compléter :*

  $10 \times \boxed{\ldots} = \boxed{\ldots} \times 10 = 50.$

On sait, par un calcul mental, que le nombre cherché est 5.
Ce nombre **5 est le quotient de 50 par 10** et tu sais donc l'écrire 50 : 10 ,

$\boxed{\ldots} = 50 : 10 = 5.$

Mais il existe une autre écriture de ce quotient : **l'écriture** $\frac{50}{10}$.

Donc, **par définition :**

$50 : 10 = \frac{50}{10}$; $10 \times \frac{50}{10} = 50$; $\frac{50}{10} \times 10 = 50$.

● Quand le numérateur et le dénominateur sont *entiers, l'écriture fractionnaire est une* « **fraction** ». Exemple : $\frac{170}{17}$.

Exercice 1 : Écris la fraction dont le numérateur est 27 et dont le dénominateur est 3. Donne une écriture décimale du nombre $\frac{27}{3}$.

Exercice 2 *Indique au moins trois écritures fractionnaires de* 5,4.

Exercice 3 : Même consigne pour 12.

II Y a-t-il toujours un quotient?

1 Problème

Ce n'est pas toujours aussi facile qu'au § I-1.

Par exemple, essayons de compléter : $7\times\boxed{\ldots}=\boxed{\ldots}\times 7=10.$

● Luc affirme qu'aucun nombre décimal ne convient.

Question *Est-ce vrai?*

● Ève revient aux longueurs et se souvient de la figure 3 du chapitre 1 page 28 avec son résultat :

(*mesure de AE*) $\times 7=10$ et cette *mesure de AE existe!*

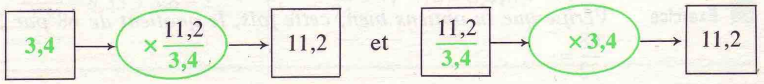
Le fait que cette mesure de AE ne puisse être un nombre décimal n'empêchera pas de l'appeler **le quotient de 10 par 7** et de l'écrire $\frac{10}{7}$.

Pour le problème posé, nous compléterons ainsi :

11 $10 : 7=\frac{10}{7}$; $7\times\frac{10}{7}=10$; $\frac{10}{7}\times 7=10$.

2

De même, nous aurons, par exemple :



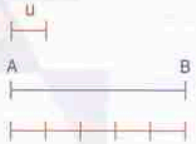
Les quotients pour pouvoir mesurer…

1 Longueur d'un segment

a/ Mesure d'une longueur

Pour mesurer un segment :
– on choisit un segment unité ;
– on détermine combien de fois cette unité est contenue dans le segment.

Exemple :



Le segment [AB] a pour longueur 5 u.

b/ Notation

On note CD la longueur du segment [CD].

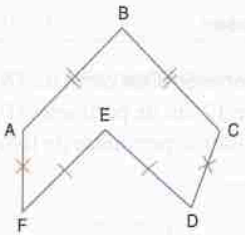
Exemple :

On note CD = 3 cm.

c/ Codage

Sur une figure géométrique, on indique les segments de même longueur avec un code.

Exemple :



On a : AB = BC ; AF = CD ; FE = ED.

2 Unités usuelles de longueur

L'unité de longueur est le mètre noté : m.

On utilise aussi les unités suivantes :

• kilomètre	(km)	avec	1 km	=	1 000 m
• hectomètre	(hm)	avec	1 hm	=	100 m
• décamètre	(dam)	avec	1 dam	=	10 m
• décimètre	(dm)	avec	1 dm	=	0,1 m
• centimètre	(cm)	avec	1 cm	=	0,01 m
• millimètre	(mm)	avec	1 mm	=	0,001 m

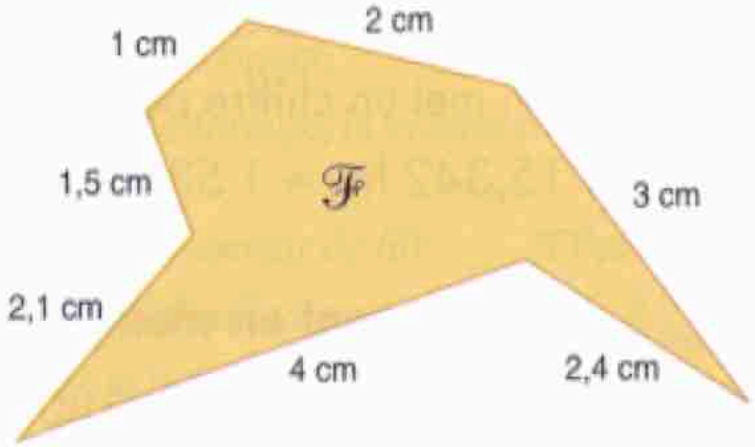
3 Périmètre d'une figure

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour.

Exemple

$1 + 2 + 3 + 2{,}4 + 4 + 2{,}1 + 1{,}5 = 16.$

La figure $\mathscr{F}$ a pour périmètre 16 cm.



Hatier 6e - 2000

Mesurer les longueurs en cm et, dans le même temps… en pouces

La notion d'étalon est importante pour comprendre la didactique de la mesure à l'école primaire. En effet, l'activité qui, classiquement, sert à introduire la mesure des longueurs est la suivante : on a choisi un étalon de longueur et on arpente divers traits à l'aide de cet étalon. La mesure obtenue s'exprime alors soit par un nombre entier, soit par un encadrement entre deux entiers successifs.

Ce procédé d'arpentage est fondamental car c'est lui qui permet de donner aux enfants l'intuition de ce qu'est une mesure : ce trait est long comme 3 allumettes, par exemple. Il est par ailleurs adapté aux jeunes enfants parce qu'il conduit à un encadrement par des mesures entières, alors que la mesure est un rapport qui, généralement, ne peut pas s'exprimer par un nombre entier (la diagonale du carré dont le côté mesure 1 a pour mesure $\sqrt{2}$).

Examinons la progression qui est le plus souvent adoptée aujourd'hui. On propose successivement aux enfants les deux sortes d'activités suivantes :

A

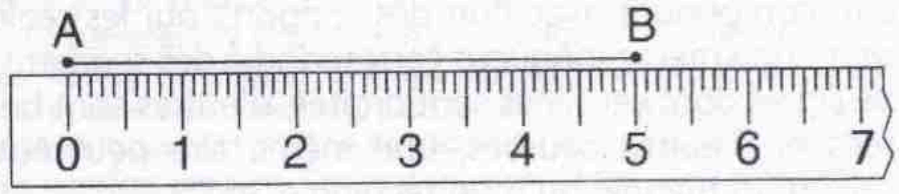
U

Si l'unité est U, la bande A mesure…

V

Si l'unité est V, la bande A mesure…

Puis :



Le segment AB mesure ..... cm

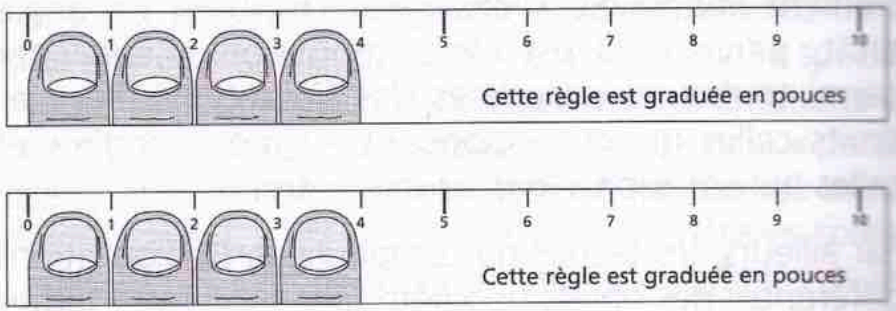
Il n'y a pratiquement pas de transition entre une activité et l'autre : l'enfant procède d'abord à des arpentages avec des unités quelconques, et lorsqu'il rencontre une unité conventionnelle de longueur, c'est directement avec la règle graduée en cm, c'est-à-dire sous une forme très élaborée où l'arpentage qui a permis la mesure n'est pas facile à reconstituer mentalement.

Cette progression présente un double inconvénient :
– lorsqu'ils arpentent avec une unité quelconque, beaucoup d'enfants n'ont pas conscience qu'ils mesurent, parce qu'ils ont déjà une connaissance sociale du phénomène de la mesure et que pour eux, mesurer, ça se fait « avec la règle et avec des cm » ;
– lorsqu'ils mesurent avec la règle graduée, ils ne font aucun lien entre cet outil et le résultat d'un arpentage à l'aide d'un étalon d'1 cm.

Livre du maître J'apprends les maths CE2, 2003 - Retz.

Du coup, lorsqu'on demande aux enfants de « montrer 1 cm sur la règle », ils montrent le plus souvent l'intervalle entre 0 et 1 (voire le seul chiffre 1), mais la longueur d'un intervalle entre 2 numéros successifs n'est pas aussi facilement interprétée comme 1 cm. En fait, de nombreux enfants apprennent à se servir d'un double décimètre par répétition de la « bonne séquence d'actions » (je pose le 0 sur une extrémité du segment, je regarde à l'autre extrémité, etc.), sans réellement comprendre la structure de cet outil. De nombreuses erreurs attestent d'ailleurs de la nature de cet apprentissage : certains enfants font coïncider une extrémité du segment avec le 1 (et non le 0), d'autres avec le bord de la règle.

C'est une autre progression qui a été adoptée dans *J'apprends les maths CE2*[4]. On y utilise de manière conjointe le pouce et une bande de longueur 1 cm comme *étalons de longueur*. C'est ainsi que les enfants disposent de 2 règles graduées, l'une en pouces et l'autre en cm :



On leur propose de mesurer des longueurs d'abord en pouces, puis en centimètres.

Ces utilisations successives de 2 étalons doivent amener les élèves à mieux se représenter ce qu'est une longueur de 1 cm. En effet, l'arpentage est explicite dans la règle graduée en pouces (de manière évidente, on y a mis bout à bout des pouces). Or une règle graduée en cm est construite de la même manière : on y a mis « bout à bout des cm ».

Quand, dès le cycle 2, les enfants rencontrent cette règle graduée en cm, ils s'approprient d'autant mieux cette structure qu'elle est alors dépourvue de toute numérotation. Pour mesurer la longueur d'un trait, ils sont ainsi amenés à « compter les cm ». On veut par là qu'ils comprennent qu'une longueur de 6 cm est équivalente à 6 longueurs de 1 cm mises bout à bout. Lorsqu'ils utilisent un double décimètre numéroté, il

4. Dans *J'apprends les maths CE1*, la même progression mise en œuvre avec une règle graduée en allumettes plutôt qu'en pouces.

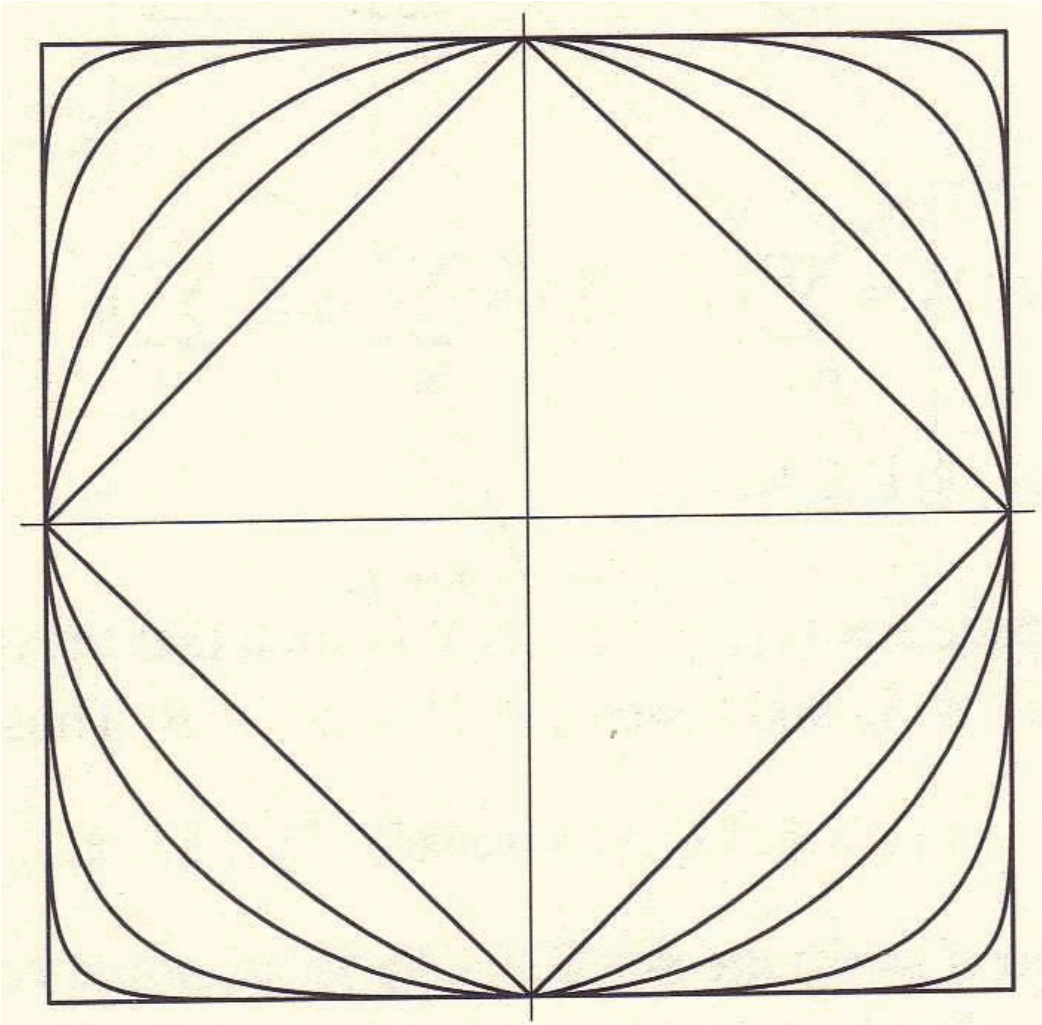
À comparer avec les diapos 3 et 4…

ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

Minkowski Geometry

A. C. THOMPSON
Dalhousie University

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS



$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |u_j|^p \right)^{1/p}, \; p \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max\{|u_j| : j = 1, \ldots, d\}$$

Bords des boules unités pour p = 1, 3/2, 2, 4, 10 et ∞.

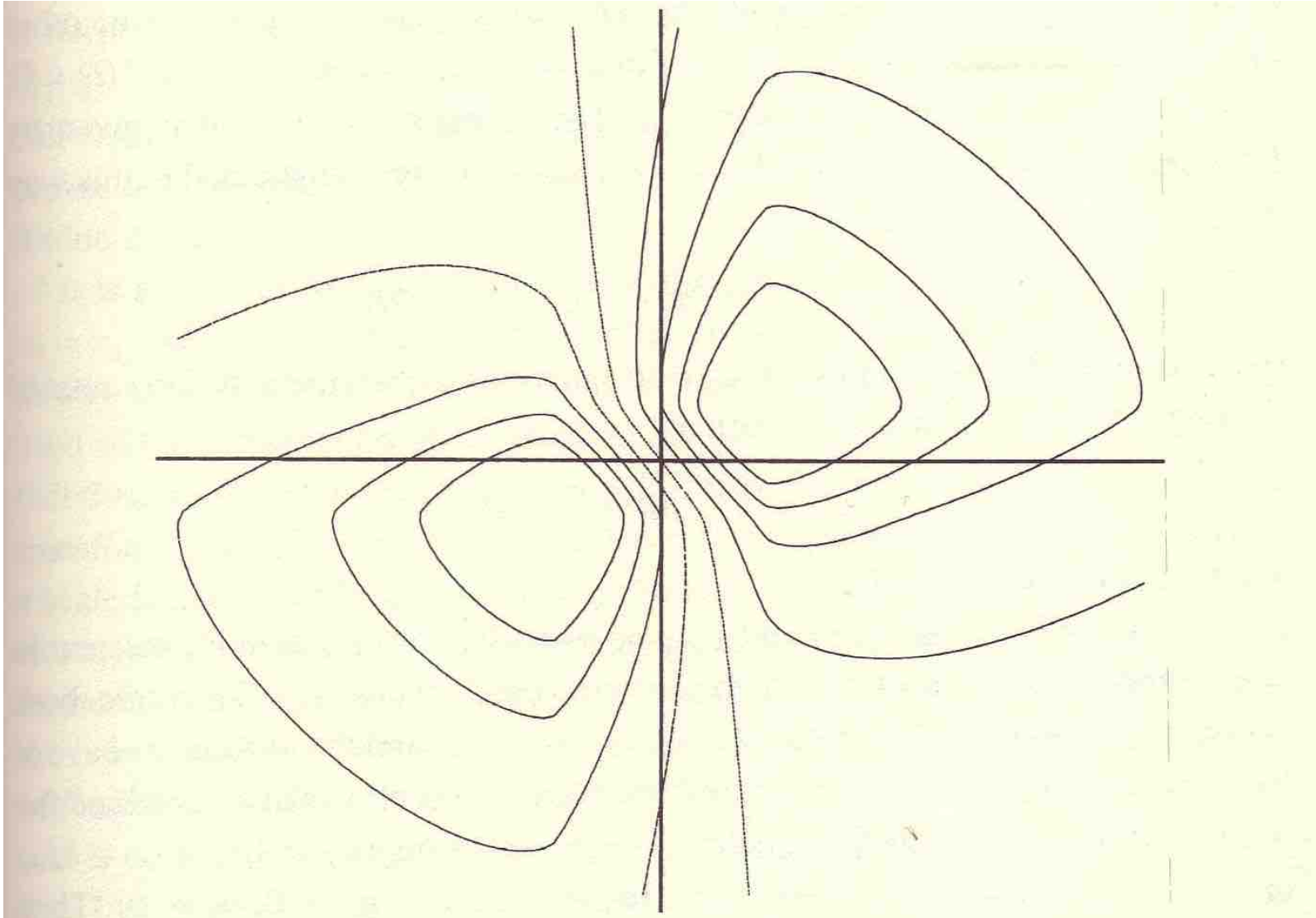


Figure 4.11b. "Circles" of Apollonius with respect to the points $a := (2, 1)$ and $b := (-2, -1)$ when the norm is the ℓ_p-norm for $p = \frac{4}{3}$. The curves are the loci $\|x-a\| = \alpha\|x-b\|$ for $\alpha = 1, 1.3, 1.7, 2.2, 3$ and their reciprocals.

Dessin fait par Brian Ingalls avec Maple.

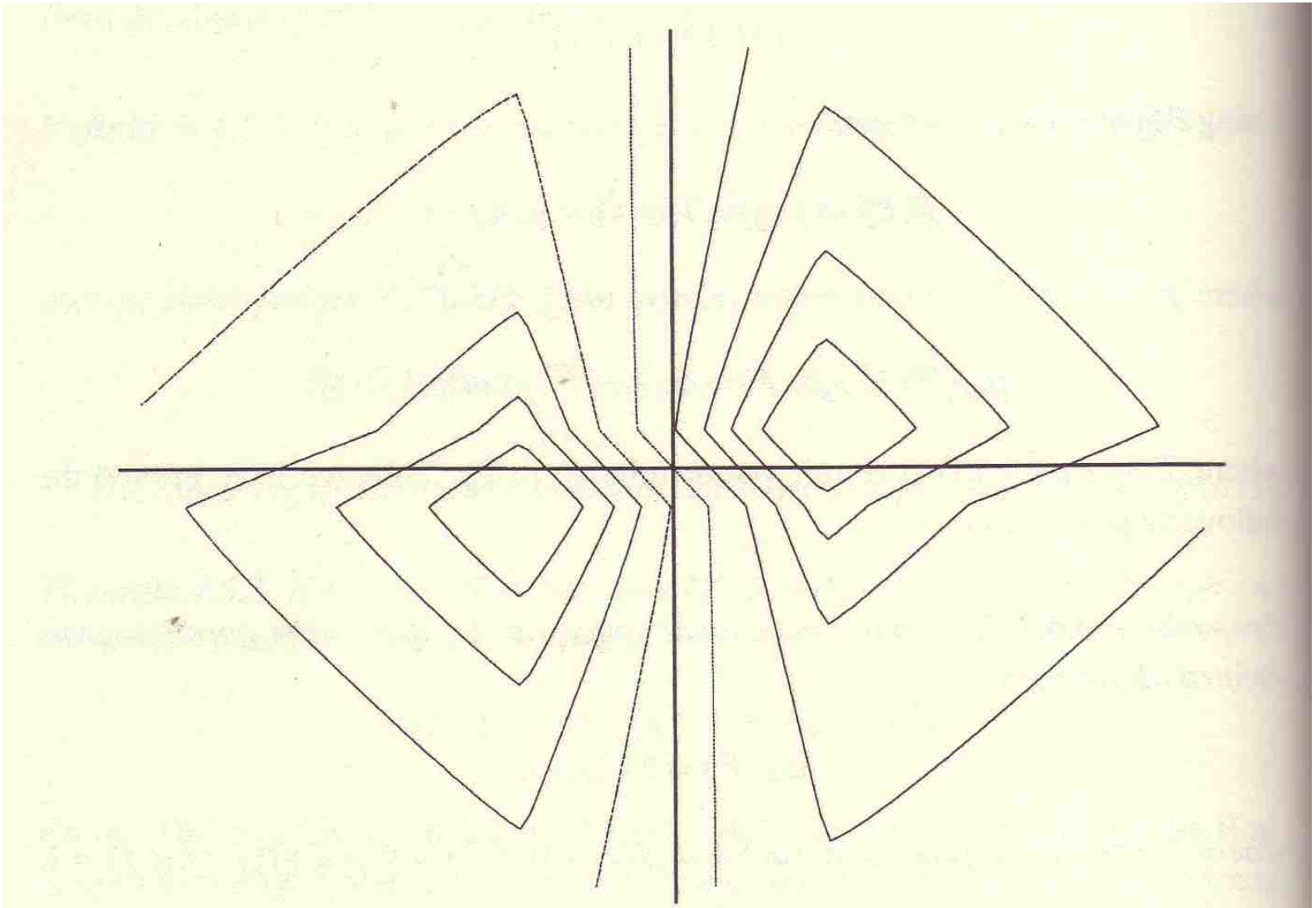


Figure 4.11a. "Circles" of Apollonius with respect to the points $a := (2, \frac{1}{2})$ and $b := (-2, -\frac{1}{2})$ when the norm is the ℓ_p-norm for $p = 20/19$. The curves are the loci $\|x - a\| = \alpha\|x - b\|$ for $\alpha = 1,\ 1.5,\ 2.1,\ 3,\ 5$ and their reciprocals.

Dessin fait par Brian Ingalls avec Maple.

Enoncés équivalents à l'axiome d' Euclide en géométrie neutre (ou absolue)

Enoncé 1 : (forme donnée par Euclide à son fameux postulat)
Si *A* et *D* sont des points du même côté de la droite *BC* tels que la somme des angles *ABC* et *BCD* est inférieure à deux angles droits, alors les droites *AB* et *CD* se coupent.

Enoncé 2 : Quelles que soient les droites *l, m, n*, si *l // m* et si *m // n*, alors *l // n*.

Enoncé 3 : Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

Enoncé 4 : (forme donnée par Playfair à l'axiome d' Euclide)
Par un point pris hors d'une droite, il passe une droite parallèle à cette droite et une seule.

Enoncé 5 : Si deux droites sont parallèles, et si une droite est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.

Enoncé 6 : Les médiatrices d'un triangle sont concourantes

Enoncé 7 : Une droite perpendiculaire à l'un des côtés d' un angle aigu coupe l'autre côté.

Enoncé 8 : par tout point intérieur à un angle passe une droite qui coupe ses deux côtés (ailleurs qu'en son sommet).

Enoncé 9 : La somme des angles de tout triangle est égale à deux angles droits.

Enoncé 10 : Si C est hors du segment AB et sur le cercle de diamètre AB, alors l'angle ACB est droit (énoncé appelé "Théorème de Thalès" dans les pays anglo-saxons).

Enoncé 11 : Il existe un triangle dont la somme des angles vaut deux angles droits.

Enoncé 12 : Si trois angles d'un quadrilatère sont droits, le 4^{e} l'est aussi.

Enoncé 13 : Il existe un rectangle.

Enoncé 14 : Il existe deux droites telles que tous les points de l'une sont équidistants de l'autre.

Enoncé 15 : Il existe deux triangles semblables qui ne sont pas isométriques.