Journées bisontines de didactique et d'épistémologie

Modèles mathématiques des grandeurs physiques et de leur calcul

André PRESSIAT
Ex-membre du LDAR – Université Diderot Paris 7
Ex-MCF de mathématiques – Université d'Orléans

Plan

1. Grandeurs vectorielles en physique

- Une première modélisation (mathématique – Klaus Jänich)
- Une deuxième modélisation (mathématique – Rémi Goblot)
- Deux modélisations par deux physiciens (Bernard Diu – R. Feynman)
- Remarques sur ces modélisations

2. Grandeurs scalaires en physique
- Une modélisation mathématique (Hassler Whitney)

3. Autres grandeurs physiques vectorielles et algèbre de Grassmann de $\mathbf{R}^3$: vecteurs, bivecteurs, …, formes linéaires, …
- (Aperçu – Bernard Jancewicz)

4. Grandeurs physiques et algèbres de Clifford
- Geometric Algebra for physicists (Chris Doran – Anthony Lasenby)

Grandeurs vectorielles par Klaus Jänich

Dans son ouvrage *Linear Algebra*, Jänich (Springer, 1994, 2007) consacre un long paragraphe aux vecteurs du physicien, dans le but de les démarquer mais également de les relier aux vecteurs de l'algèbre linéaire abstraite.

Il considère l'espace d'observation $\mathcal{A}$, qu'il transforme en un espace vectoriel en le pointant à l'aide d'un point O, et en considérant les vecteurs - positions, $\overrightarrow{OP}$
P désignant un point quelconque de $\mathcal{A}$.
Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{A}_O$.

En physique, on attache au point O d'autres espaces vectoriels :
$\mathcal{E}_O$: espace vectoriel des champs électriques en O ;
$\mathcal{V}_O$: espace vectoriel des vitesses en O ;
$\mathcal{F}_O$: espace vectoriel des forces en O …

Jänich précise qu'il n'est pas habituel en Physique de donner des noms spéciaux et des notations aux espaces vectoriels contenant de tels vecteurs comme éléments. Il les a inventés ici pour la comparaison entre les concepts mathématique et physique d'un vecteur.

Ces vecteurs physiques ont une “magnitude”, un module, bien différents de la norme d’un vecteur dans un espace vectoriel euclidien tel qu’on en rencontre en l’algèbre linéaire.
Ainsi, si $\vec{r} \in \mathcal{A}_O$, son module n’est pas un nombre réel : par exemple, on a $|\vec{r}|= 5$ cm, et non pas $|\vec{r}| = 5$.
Si $\vec{E} \in \mathcal{E}_O$, on a par exemple, $|\vec{E}| = 5\ V/\text{cm}$, et non pas $|\vec{E}| = 5$.

Jänich précise, *qu’afin d’établir un pont entre la physique et l’algèbre linéaire, au lieu de supprimer les unités, il préfère les introduire dans l’algèbre linéaire*. Dans ce but, il définit ce qu’il appelle le “domaine scalaire des longueurs” :

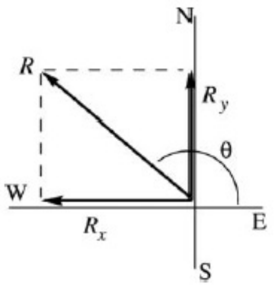
$$\mathbf{R}\,[\text{Longueur}] = \mathbf{R}\,[\text{cm}] = \{\, x \text{ cm} \,;\, x \in \mathbf{R} \,\}$$

C’est un espace vectoriel sur **R** de dimension 1, où les opérations sont définies par :

$$x \text{ cm} + y \text{ cm} = (x + y) \text{ cm}$$
$$\lambda\,(x \text{ cm}) = \lambda x \text{ cm}$$

et qui admet 1 cm pour base.
Malgré les apparences, **R**[cm] ne dépend pas de l’unité de longueur choisie. **R**[cm] = **R**[m] : il s’agit seulement d’un changement de base.

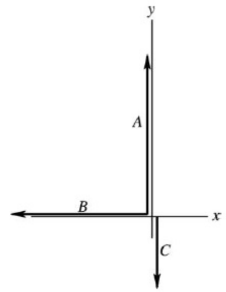
Exemples de calculs de longueur (calculatrice de Google et extraits de manuels de Physique variés…) :



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-2.90\text{ km})^2 + (1.75\text{ km})^2}$$
$$R = 3.39\text{ km}$$
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1.75\text{ km}}{-2.90\text{ km}} = -0.603$$
$$\theta = 148.9^\circ$$

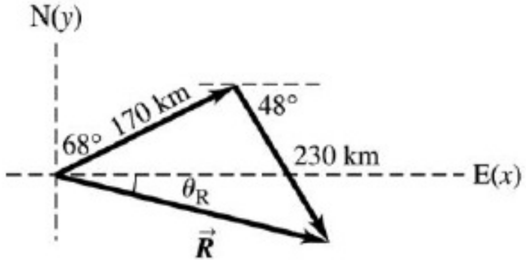
$$R_y = A_y + B_y = (170\text{ km})\cos 68^\circ - (230\text{ km})\sin 48^\circ = -107.2\text{ km}.$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(311.5\text{ km})^2 + (-107.2\text{ km})^2} = 330\text{ km}.\ \tan\theta_R = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \frac{107.2\text{ km}}{311.5\text{ km}} = 0.344.$$
$\theta_R = 19^\circ$ south of east.

$$R = \sqrt{(-2{,}43)^2 + (-4{,}99)^2} = 5{,}55\text{ m et }\tan\theta = \frac{-4{,}99}{-2{,}43} \implies \theta = 64{,}0^\circ$$



$A_x = 0,\ A_y = +3.25\text{ km}$
$B_x = -2.90\text{ km},\ B_y = 0$
$C_x = 0,\ C_y = -1.50\text{ km}$
$R_x = A_x + B_x + C_x$
$R_x = 0 - 2.90\text{ km} + 0 = -2.90\text{ km}$
$R_y = A_y + B_y + C_y$
$R_y = 3.25\text{ km} + 0 - 1.50\text{ km} = 1.75\text{ km}$

$$R_x = A_x + B_x = (170\text{ km})\sin 68^\circ + (230\text{ km})\cos 48^\circ = 311.5\text{ km}.$$



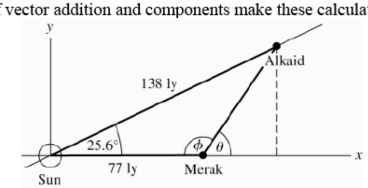
IDENTIFY: Draw the vector addition diagram for the position vectors.

SET UP: Use coordinates in which the Sun to Merak line lies along the x-axis. Let $\vec{A}$ be the position vector of Alkaid relative to the Sun, $\vec{M}$ is the position vector of Merak relative to the Sun, and $\vec{R}$ is the position vector for Alkaid relative to Merak. $A = 138$ ly and $M = 77$ ly.

EXECUTE: The relative positions are shown in Figure 1.101. $\vec{M} + \vec{R} = \vec{A}$. $A_x = M_x + R_x$ so $R_x = A_x - M_x = (138\text{ ly})\cos 25.6^\circ - 77\text{ ly} = 47.5\text{ ly}$. $R_y = A_y - M_y = (138\text{ ly})\sin 25.6^\circ - 0 = 59.6\text{ ly}$. $R = 76.2$ ly is the distance between Alkaid and Merak.

(b) The angle is angle ϕ in Figure 1.101. $\cos\theta = \frac{R_x}{R} = \frac{47.5\text{ ly}}{76.2\text{ ly}}$ and $\theta = 51.4^\circ$. Then $\phi = 180^\circ - \theta = 129^\circ$.

EVALUATE: The concepts of vector addition and components make these calculations very simple.



De même, on peut définir le domaine scalaire des vitesses, des champs électriques : **R**[cm/s], **R**[V/cm] qui sont également indépendants des unités choisies.
R est le domaine scalaire sans dimension : **R** = **R**[1].

Jänich affirme ensuite que l'on peut multiplier entre eux ces scalaires physiques :

5 cm . 6 V/cm = 30 *V*,

sans se lancer dans de longues explications formelles à propos de :

cm . s = s . cm et cm/cm = 1.

De plus, en physique, on peut multiplier un vecteur physique par un scalaire physique.
Ainsi, si $\vec{v} \in \mathcal{V}_O$, et 5 s $\in$ **R**[s], alors 5 s $\vec{v} \in \mathcal{A}_O$, ce qui l'incite à écrire :

$$\mathcal{V}_O[\mathrm{s}] = \mathcal{A}_O.$$

IDENTIFY: Since light travels at constant speed, $d = ct$

SET UP: The distance from the earth to the sun is 1.50×10^{11} m. The distance from the earth to the moon is 3.84×10^{8} m. $c = 186{,}000$ mi/s.

EXECUTE: **(a)** $d = ct = (3.0\times10^{8}\ \text{m/s})(1\ \text{y})\left(\dfrac{365\frac{1}{4}\ \text{d}}{1\ \text{y}}\right)\left(\dfrac{24\ \text{h}}{1\ \text{d}}\right)\left(\dfrac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}}\right) = 9.5\times10^{15}\ \text{m}$

(b) $d = ct = (3.0\times10^{8}\ \text{m/s})(10^{-9}\ \text{s}) = 0.30\ \text{m}$

(c) $t = \dfrac{d}{c} = \dfrac{1.5\times10^{11}\ \text{m}}{3.0\times10^{8}\ \text{m/s}} = 500\ \text{s} = 8.33\ \text{min}$

(d) $t = \dfrac{d}{c} = \dfrac{2(3.84\times10^{8}\ \text{m})}{3.0\times10^{8}\ \text{m/s}} = 2.6\ \text{s}$

(e) $t = \dfrac{d}{c} = \dfrac{3\times10^{9}\ \text{mi}}{186{,}000\ \text{mi/s}} = 16{,}100\ \text{s} = 4.5\ \text{h}$

(-10 m/s)/(240 s)

Tous Images Vidéos Actualités Shopping Maps

Environ 344 000 000 résultats

((-10) (m / s)) / (240 s) = -0,0416666667 m / s²

5 m/s x 5 s

Tous Images Vidéos Actualités Shopping

Environ 649 000 résultats

(5 (m / s)) x 5 s = 25 meters

Tiré de :
Chevallard Y., Bosch M. (1999-2000) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée, *Petit x* **55**, 5-32.

Un automóvil empieza a subir une cuesta recta a 72 km/h y llega a la parte más alta a 36 km/h habiendo disminuido uniformemente la velocidad.

a) Hallar la longitud de la cuesta si tardó 4 minutos en subirla.
b) ...

Expresamos, en primer lugar, las velocidades en m/s:

$$v_0 = \frac{72\ \text{km}}{\text{h}} = \frac{72\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ v = \frac{36\ \text{km}}{\text{h}} = \frac{36\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) Calculamos la aceleración:

$$a = \frac{v-v_0}{t} = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\cdot 60\ \text{s}} = \frac{-10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{240\ \text{s}} = -0{,}04\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Determinada la aceleración, calculamos la distancia recorrida en 4 minutos, o sea, la longitud de la cuesta:

$$s = v_0\cdot t + \frac{1}{2}a\cdot t^2 = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}240\ \text{s} - \frac{1}{2}0{,}04\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}240^2\ \text{s}^2$$

$$= (4800 - 1152)\ \text{m} = 3\,648\ \text{m}.$$

Plus généralement,
si $\mathcal{X}_O$ est un espace vectoriel physique en O dont le domaine scalaire est **R**[a]
et si **R**[b] est un autre domaine scalaire,
alors on pose : $\mathcal{X}_O[\mathrm{b}] := \{\mathrm{b}\,\vec{v}\ ;\ \vec{v} \in \mathrm{X}_O\}$;
le domaine scalaire de l'espace vectoriel physique $\mathcal{X}_O$[b] est **R**[ab].

Enfin, si $\mathcal{X}_O$ est un espace vectoriel physique sur le domaine scalaire **R**[a] et si $\mathcal{Y}_O$ en est un autre sur le domaine scalaire est **R**[b] :

$$\mathcal{Y}_O = \mathcal{X}_O\left[\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{X}_O = \mathcal{Y}_O\left[\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right]$$

ce qui permet, en particulier, de décrire tout vecteur physique de $\mathcal{X}_O$ en multipliant un vecteur position (appartenant à $\mathcal{A}_O$) par un scalaire physique pris dans le domaine **:**

$$\mathbf{R}\left[\frac{a}{\mathrm{cm}}\right]$$

Il étend ensuite les notions familières en algèbre linéaire à son nouveau cadre. Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs physiques dont les domaines scalaires sont **R**[*a*] et **R**[*b*] est un scalaire physique appartenant à **R**[*ab*].

Par exemple,
si $\vec{r}$ est un élément de $\mathcal{A}_O$ (domaine **R**[cm]),
et si $\vec{E}$ est un élément de $\mathcal{E}_O$ (domaine scalaire : **R**[V/cm]),
alors $\vec{r} \cdot \vec{E} \in$ **R**[V].

La question suivante se pose alors : faut-il traiter toute la physique avec des vecteurs physiques, et rejeter ceux de l'algèbre linéaire ? Jänich évoque alors un moyen de conserver la puissance de cette dernière tout en ménageant une place pour les vecteurs physiques.

Parmi tous les espaces vectoriels physiques en *O*, il en est un qui est spécial : il est (du point de vue physique) sans dimension : on le note $\mathcal{U}_O$.

$$\mathcal{U}_O = \mathcal{A}_O\left[\frac{1}{\text{cm}}\right] = \mathcal{E}_O\left[\frac{\text{cm}}{\text{V}}\right] = \ldots$$

La “magnitude” (le module, $|\vec{u}|$) d’un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{U}_O$ est un nombre réel.
On peut définir le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathcal{U}_O$ et c’est un nombre réel.
On dispose alors d’un espace vectoriel euclidien au sens de l’algèbre linéaire avec un produit scalaire : $\mathcal{U}_O \times \mathcal{U}_O \to \mathbf{R}$, à partir duquel on peut retrouver tous les produits scalaires de vecteurs physiques :

$$\mathcal{U}_O[a] \times \mathcal{U}_O[b] \to \mathbf{R}[ab]$$

$\mathcal{U}_O$ est donc **un pont entre l’algèbre linéaire** dans laquelle on fait le produit scalaire de vecteurs appartenant au même espace vectoriel **et les calculs avec les vecteurs en physique** dans lesquels on peut faire des produits scalaires de vecteurs de différentes sortes, produits qui appartiennent à des “domaines scalaires” de grandeurs physiques.

Terminons par la question des coordonnées. Là encore, on se sert de $\mathcal{U}_O$ comme intermédiaire.

En algèbre linéaire (mathématique), étant donné un espace vectoriel réel V, on choisit une base v_1, v_2, … ,v_n, et tout vecteur v peut s'exprimer d'une seule manière sous la forme :
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les coordonnées du vecteur v.
Les droites vectorielles $\mathbf{R}v_i$ sont les "axes" de coordonnées.

On considère une base orthonormée de $\mathcal{U}_O$: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

Si $\vec{u}$ appartient à $\mathcal{U}_O[a]$, alors on peut l'écrire sous la forme :

$$\vec{u} = u_x\,\hat{x} + u_y\,\hat{y} + u_z\,\hat{z}$$

où les "coordonnées" sont des éléments de $\mathbf{R}[a]$.

Si $\vec{v}$ appartient à $\mathcal{U}_O[b]$, alors on peut l'écrire sous la forme :

$$\vec{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z}$$

où les coordonnées sont des éléments de $\mathbf{R}[b]$.

Et le produit scalaire de ces deux vecteurs physiques s'exprime alors ainsi :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Il appartient à $\mathbf{R}[ab]$.

Remarque :
On peut remplacer les vecteurs - positions par des champs de vecteurs à valeurs dans l'espace des vecteurs libres (l'espace jouant alors le même rôle que $\mathcal{U}_O$ est noté $\mathcal{U}_{libre}$). Du point de vue des “domaines scalaires” et des “espaces vectoriels physiques”, rien ne change.

Dans la présentation de Jänich, plusieurs points peuvent paraître illégitimes :
- Comment “définit-on rigoureusement” les éléments de la forme x cm pour créer le domaine scalaire des longueurs **R**[cm] ?
- Comment “définir rigoureusement” un vecteur physique associé à une grandeur ?
- Comment “définir rigoureusement” l'espace vectoriel $\mathcal{U}_O$ (ou $\mathcal{U}_{libre}$) des vecteurs sans dimension ?
- Comment “définit-on rigoureusement” 1/cm ?

Toutes les réponses à ces questions (et à d'autres) se trouvent dans l'ouvrage de Rémi Goblot : *Agrégation de mathématiques, Thèmes de géométrie*, 1998, Masson.
Chapitre 10 : Mesure des grandeurs, pp. 219-233.

Dans sa théorie, l'espace d'observation est un espace affine euclidien E, associé à un espace vectoriel euclidien $\bar{E}$,
sur lequel on a une famille $\mathcal{P}$ de produits scalaires proportionnels, à facteurs de proportionnalité positifs, définissant les mêmes notions d'orthogonalité et d'isométrie. $\mathcal{N}$ désigne la famille de normes toutes proportionnelles, qui en dérivent.

Goblot construit axiomatiquement la grandeur "longueur", notée **L**, à partir de $\bar{E}$: deux vecteurs de $\bar{E}$ sont équivalents s'ils ont même norme. L'ensemble quotient est noté $\mathbf{L}^+$, il est en bijection avec $\mathbf{R}^+$. On le munit d'une addition, et d'une multiplication à opérateurs dans $\mathbf{R}^+$.
En le symétrisant, on obtient **L**, qui est alors une droite vectorielle orientée.

Un élément u de $\mathbf{L}^+$, appelé unité de longueur, étant choisi, on démontre que :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\to \mathbf{L} \\ \lambda &\mapsto \lambda u \end{aligned}$$

est un isomorphisme de droites vectorielles orientées. Ceci légitime l'écriture :
$\mathbf{L} = \mathbf{R}[u]$ (notation que Goblot n'introduit pas).
En revenant dans l'espace d'observation de Jänich, on donne ainsi une justification à la notation **R**[cm].

Goblot présente une théorie des grandeurs expliquant comment on peut les multiplier, définir l'inverse d'une grandeur, et munir ainsi la classe des grandeurs d'une structure de groupe.

• D'abord, il identifie toute grandeur **G** avec une droite vectorielle orientée.
Une unité dans **G** est un élément γ de $\mathbf{G}^{*+}$; alors l'application :

$$\mathbf{R} \to \mathbf{G}$$
$$k \mapsto k\gamma$$

est un isomorphisme respectant la positivité, ce qui justifie la notation
$\mathbf{G} = \mathbf{R}[\gamma]$ (que Goblot n'introduit pas), et renvoie aux "domaines scalaires" sans quotient d'unités de Jänich : **R**[s], **R**[V]….

• Ensuite, il définit le produit de deux grandeurs $\mathbf{G_1}$ et $\mathbf{G_2}$: c'est leur **produit tensoriel** $\mathbf{G}_1\otimes\mathbf{G}_2$, quotient du produit cartésien par une relation d'équivalence choisie de façon à ce que tout élément de $\mathbf{G}_1\otimes\mathbf{G}_2$ puisse s'écrire d'une infinité de façons sous la forme $g_1 \otimes g_2$ avec la règle : $(\lambda g_1) \otimes g_2 = g_1 \otimes (\lambda g_2)$.
On peut le munir d'une structure de droite vectorielle orientée. Si γ_1 est une unité de $\mathbf{G_1}$ et γ_2 est une unité de $\mathbf{G_2}$, $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ est l'unité de $\mathbf{G}_1\otimes\mathbf{G}_2$ déduite des unités γ_1 et γ_2. On démontre que $\otimes$ est commutative et associative.

• La grandeur sans dimension n’est autre que la droite vectorielle **R** munie de l’unité 1. (Ce que Jänich devrait écrire sous la forme **R** = **R**[1]).

• L’inverse d’une grandeur **G** est la droite vectorielle duale **G*** de **G** ; on préfère la noter $\mathbf{G}^{[-1]}$. Si γ est une unité de **G**, l’unité inverse notée γ^{-1}, est la forme linéaire :

$$\begin{aligned}\gamma^{-1} : \mathbf{G} &\to \mathbf{R}\\ k\gamma &\mapsto k\end{aligned}$$

Ainsi, le 1/cm de Jänich trouve une “justification”.

• Après quelques identifications, on obtient le groupe des grandeurs, où la grandeur **R** est l’élément neutre.
On simplifie les notations, en notant $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$ au lieu de $\mathbf{G}_1\otimes\mathbf{G}_2$ et g_1g_2 au lieu de $g_1\otimes g_2$.

• Étant donné des grandeurs $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_k$ et des entiers relatifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$, on peut former la grandeur dérivée : $\mathbf{G}_1^{[n_1]}\mathbf{G}_2^{[n_2]} \ldots \mathbf{G}_k^{[n_k]}$.
À partir des grandeurs fondamentales longueur **L**, masse **M**, temps **T**, on peut former les grandeurs dérivées : aire $\mathbf{L}^{[2]}$, volume $\mathbf{L}^{[3]}$, vitesse **V** (= $\mathbf{LT}^{[-1]}$), accélération **A** (=$\mathrm{LT}^{[-2]}$), force **F** (= $\mathbf{MLT}^{[-2]}$), énergie **E** (= $\mathbf{ML}^{[-2]}\mathbf{T}^{[-2]}$)…

• En choisissant le mètre m comme unité dans **L**, le kilogramme kg comme unité dans **M**, la seconde s comme unité dans **T**, les unités des grandeurs dérivées s’en déduisent.

Afin de disposer de l'objet jouant pour Jänich le rôle de $\mathcal{U}_O$ (ou $\mathcal{U}_{libre}$), c'est-à-dire l'espace des vecteurs physiques sans dimension,
Goblot construit axiomatiquement un espace vectoriel appelé espace des vecteurs purs, noté $\bar{\bar{E}}_P$.

Pour ne pas confondre les vecteurs de $\bar{\bar{E}}$ avec ceux de $\bar{\bar{E}}_P$, il note les premiers avec une flèche de longueur usuelle, et les seconds avec une flèche plus courte.

$\bar{\bar{E}}_P$ est le produit cartésien de $\mathbf{R}^{*+}$ par l'ensemble des demi-droites vectorielles de $\bar{\bar{E}}$, complété par un singleton “vecteur nul”.

Un vecteur pur non nul est donc formé par un nombre réel λ strictement positif et une demi-droite vectorielle $R^{*+}\vec{v}$, où $\vec{v}$ est un vecteur de l'espace vectoriel $\bar{\bar{E}}$ associé à l'espace d'observation (E, formé de points).

Nous reparlerons plus loin des vecteurs purs, du lien entre vecteurs purs (notés avec une petite flèche) et vecteurs “géométriques” (notés avec une grande flèche).

Enfin, Goblot est en mesure de construire axiomatiquement l'espace vectoriel $\bar{\bar{E}}_{\mathbf{G}}$ associée à une grandeur **G**, correspondant au $\mathcal{U}_O[a]$ de Jänich.

C'est, encore une fois, un produit tensoriel, celui de **G** par $\bar{\bar{E}}_P$, quotient du produit par une relation d'équivalence judicieusement choisie. Alors, on peut construire une application bilinéaire canonique :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \times \bar{\bar{E}}_P &\to \bar{\bar{E}}_{\mathbf{G}} \\ (g,\ \vec{v}) &\mapsto g \otimes \vec{v} \ (\text{ou } g\,\vec{v}) \end{aligned}$$

et, si γ désigne une unité de **G**, on a l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{E}}_P &\to \bar{\bar{E}}_{\mathbf{G}} \\ \vec{v} &\mapsto \gamma\,\vec{v} \end{aligned}$$

ce qui permettrait de justifier la notation $\bar{\bar{E}}_{\mathbf{G}} = [\gamma]\bar{\bar{E}}_P$,
notation que Goblot n'introduit pas,
et qui correspond, à l'ordre près, au $\mathcal{X}_O = \mathcal{U}_O[a]$ de Jänich.

Goblot remarque que $\bar{\bar{E}}$, espace des vecteurs “géométriques” est l'espace vectoriel associé à la grandeur **L**, et pourrait être noté $\bar{\bar{E}}_{\mathbf{L}}$.

Paul ROUGÉE a écrit dans le bulletin de l'APMEP en avril 1974 un article de 31 pages, intitulé *Axiomatique pour les dimensions physiques, les scalaires et les vecteurs du physicien*, qui n'élude aucune des difficultés examinées ci-dessus. Sa contribution est signalée dans la brochure "Grandeur, mesure", de la collection *Mots*, publiée par l'APMEP en 1982, mais n'est pas reprise dans cette brochure : sans doute a-t-elle été jugée trop complexe, et peu lisible par un large public de professeurs.

Dans son ouvrage *Mécanique des grandes transformations*, publié chez Springer en 1997, il évoque la multitude de corps scalaires associés aux dimensions physiques, le corps de réels étant celui des scalaires sans dimension. L'ensemble de ces scalaires physiques *"se stratifie"* en sous-ensembles regroupant les scalaires de même dimension physique…
La même "*stratification*" a lieu pour les vecteurs physiques selon leur dimension.

Du côté des physiciens : Bernard Diu présente le cours de Feynman

PRESENTATION DU TEXTE

Aussitôt qu'avancé, le titre du chapitre – « Vecteurs » - est d'emblée précisé par la première phrase, puis page 7 :

In this chapter we introduce a subject that is technically known in physics as symmetry in physical law[2].

Cette technique appelée le calcul vectoriel fournit le titre de ce chapitre ; à proprement parler, cependant, c'est un chapitre sur la symétrie des lois physiques.

Suit en introduction une définition précise, reprise de Hermann Weyl, du concept de symétrie, pour application à la physique – où elle se confondra bientôt avec la notion d'« invariance ». Feynman s'en tient, pour l'essentiel, aux transformations – translations, rotations – que l'on qualifie de « passives » : l'objet d'étude demeure intouché et immuable ; c'est le repère que l'on déplace seulement – l'origine et les axes cartésiens permettant de le décrire. On envisage aussi parfois des transformations « actives » : fixé le repère, on transporte l'objet lui-même par

1. *The Feynman lectures on physics*, R.P. Feynman, R.B. Leighton & M. Sands, Addison-Wesley éditeur (1963).
2. C'est Feynman qui souligne.

Téléchargeable à l'adresse : https://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/feynman-analyse-38.pdf translation ou rotation. Dans le premier cas – passif –, les propriétés de la réalité à étudier persistent intactes, à l'évidence ; mais les lois qui en rendent compte ? Conservent-elles la même expression dans le nouveau repère qui valait dans le précédent ? Feynman analyse longuement, de ce point de vue, les lois de Newton. Dans le second cas – actif –, les propriétés mêmes du système observé peuvent s'altérer au cours des manipulations qu'il subit […]

Cet examen méthodique et minutieux, détaillé et approfondi – près de six pages, sur les quinze que compte en tout le chapitre – de l'invariance des lois physiques par changement du repère de référence – examen centré sur l'exemple simple mais ô combien significatif ! des lois de Newton – aboutit à mettre en évidence […] la propre raison d'être des vecteurs et des scalaires. « Behold ! »

GRANDEUR VECTORIELLE

Sont associés à une **grandeur vectorielle** « three numbers » – ses composantes.
Toutefois :
No, not every three numbers form a vector !
La propriété spécifique des vecteurs s'énonce [ainsi] : les trois composantes d'un vecteur (quelconque) se maintiennent inchangées dans toute translation des axes de référence ; dans une rotation, elles se transforment textuellement comme font les coordonnées d'un point (quelconque) de l'espace.

GRANDEUR SCALAIRE

Une **grandeur scalaire** est caractérisée par un nombre unique – sa valeur – que n'affecte ni une translation ni une rotation du repère :

> *Quelque chose de nouveau entre en jeu. Nous pouvons produire une nouvelle grandeur, une fonction de x, y et z, appelée fonction scalaire, une quantité qui n'a pas de direction mais qui reste la même dans les deux systèmes [de coordonnées]*

Feynman prend l'exemple du scalaire égal au module d'un vecteur et insiste :

> *Cela ne dépend pas des axes, la réponse est la même pour tout ensemble d'axes. Nous avons ainsi un nouveau* type *de quantité, un nouvel* invariant *ou* scalaire *produit par un seul vecteur « élevé au carré ».*

Á ce propos, affirmons avec force, contre les vents de croyances et les marées de dires que propage maint manuel de mathématiques, qu'un vecteur ne peut en aucun cas se réduire à une collection de scalaires parce qu'un vecteur a une direction (p.7) :

> *Il signifie trois nombres [x, y, z], mais en réalité il ne signifie pas qu'eux, parce que si nous utilisons un système de coordonnées différent, les trois nombres se transformeront en x', y', z'.*

C'est là, sans nul doute, que réside la « substantifique moelle » de ce chapitre.

La suite, dans l'article de Bernard Diu (Bulletin Vert, APMEP Fév - Mars 1991, pp. 29-56) *Scalaires et vecteurs en Physique*. (Ne fait pas partie de la section consultable de son dernier ouvrage chez Odile Jacob : La mathématique du physicien, 2010).

« Trois remarques s'imposent :

• En premier lieu, une grandeur vectorielle possède une dimension physique, "portée" par son module : longueur pour les vecteurs géométriques, longueur divisée par un temps pour les vitesses, par le carré d'un temps pour les accélérations…

• Deuxièmement, certaines grandeurs vectorielles sont des champs vectoriels, c'est-à-dire des fonctions de point à valeurs vectorielles…

• Enfin, s'il est possible de représenter une grandeur vectorielle directement dans l'espace, c'est parce que sa direction est celle d'un axe de l'espace ; lorsqu'on utilise une telle représentation, l'origine de la flèche est un point de l'espace (celui auquel est associée la grandeur), sa direction est une direction de l'espace, mais son extrémité n'est un point de l'espace que dans le cas très particulier où sa dimension physique est celle d'une longueur (c'est-à-dire s'il s'agit d'un vecteur géométrique) ; ainsi, la longueur relative des flèches représentatives des deux grandeurs vectorielles n'a de signification que si ces deux grandeurs ont même dimensions physiques (auquel cas, le rapport des longueurs des flèches reproduira celui des valeurs des grandeurs représentées). »

En Physique, on parle de composantes d'un vecteur même sans avoir une "base" de "vecteurs unitaires" …

Prenons donc le segment orienté d'origine M, représentant une grandeur vectorielle $\vec{A}$. Traçons, avec M pour origine, un trièdre trirectangle $M\tilde{x}$, $M\tilde{y}$, $M\tilde{z}$ dont les axes sont choisis parallèles, et de même sens, à Ox, Oy, Oz, respectivement. Les composantes cartésiennes A_x, A_y, A_z de $\vec{A}$ se définissent comme les mesures algébriques des projections orthogonales, sur les « axes locaux » $M\tilde{x}$, $M\tilde{y}$, $M\tilde{z}$, du segment orienté représentant $\vec{A}$ (figure 1). Si θ_A et φ_A sont les angles ($0 \le \theta_A \le \pi$; $0 \le \varphi_A < 2\pi$) permettant de repérer la direction de $\vec{A}$ (figure 2), les composantes cartésiennes de $\vec{A}$ s'écrivent $A_x = |\vec{A}| \sin\theta_A \cos\varphi_A$, $A_y = |\vec{A}| \sin\theta_A \sin\varphi_A$, $A_z = |\vec{A}| \cos\theta_A$.

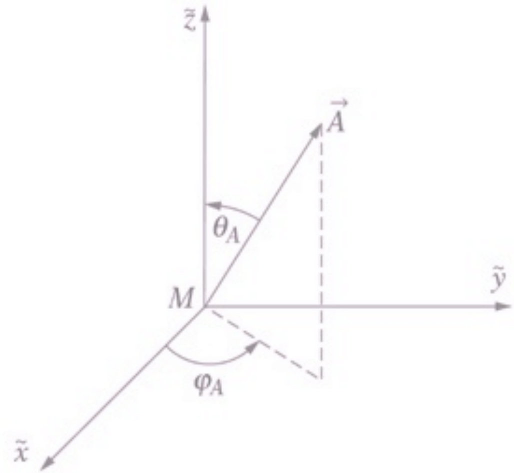


Figure 2

Leurs dimensions physiques reproduisent celles du module $|\vec{A}|$ de $\vec{A}$ – puisque les sinus et cosinus n'en apportent aucune – c'est-à-dire celles de la grandeur vectorielle $\vec{A}$ elle-même.

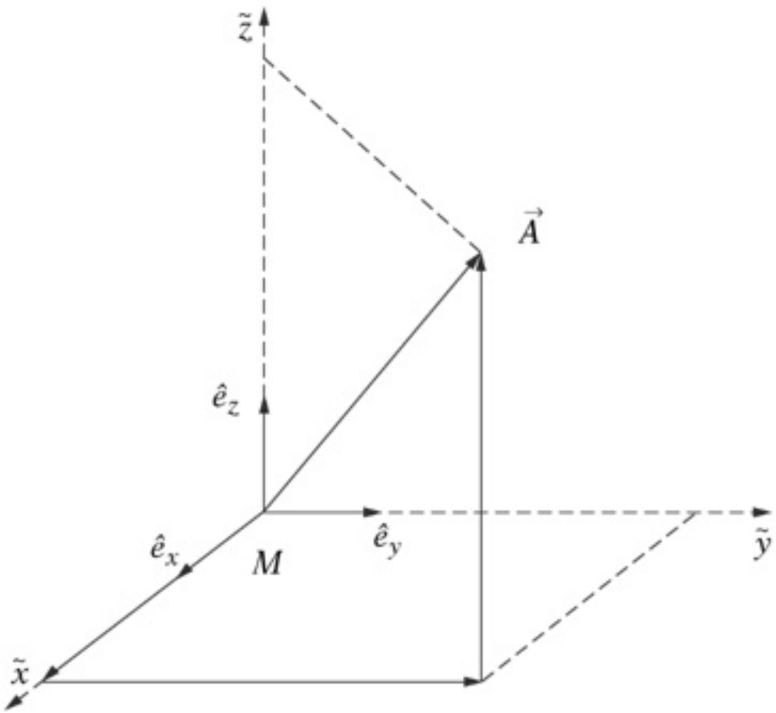
Mais on peut également exprimer un vecteur à l'aide de ses composantes et des *vecteurs unitaires*.

« Rappelons qu'il est utile d'introduire des vecteurs unitaires : ce sont des grandeurs vectorielles sans dimension, dont le module vaut 1, par définition ; ainsi, un vecteur unitaire est caractérisé par, ou caractérise, une direction de l'espace. Les anglo-saxons utilisent une notation très commode qui consiste à remplacer, pour les vecteurs unitaires, la flèche par un "chapeau" (accent circonflexe) : $\hat{A}$ est le vecteur associé à la direction du vecteur $\vec{A}$. »

Si $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ dénotent les vecteurs unitaires des axes de référence Ox, Oy et Oz, on peut écrire une grandeur vectorielle quelconque $\vec{A}$ sous la forme

$$\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z :$$

en mettant bout à bout, conformément à la règle du parallélogramme, le vecteur porté par $M\tilde{x}$ et de mesure algébrique A_x, puis le vecteur porté par $M\tilde{y}$ et de mesure algébrique A_y et enfin le vecteur porté par $M\tilde{z}$ et de mesure algébrique A_z (*cf.* figure 4), on obtient effectivement le vecteur $\vec{A}$. Mais la formule précédente appelle deux remarques. En premier lieu, ce n'est pas parce que toutes les grandeurs vectorielles peuvent être ainsi décomposées selon le même triplet $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ de vecteurs unitaires qu'elles appartiennent à un espace vectoriel unique : il n'est pas question de sommer un champ électrique et une accélération, parce que ces deux grandeurs vectorielles révèlent des dimensions physiques différentes ; dans la décomposition de la grandeur $\vec{A}$ sur les axes cartésiens, ses dimensions sont, rappelons-le, « portées » par ses composantes A_x, A_y, A_z. Deuxièmement, dans le produit $A_x \hat{e}_x$ par exemple, $\hat{e}_x$

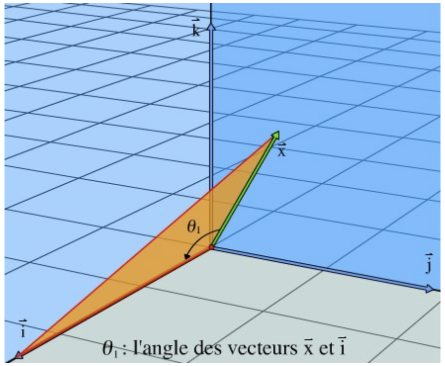


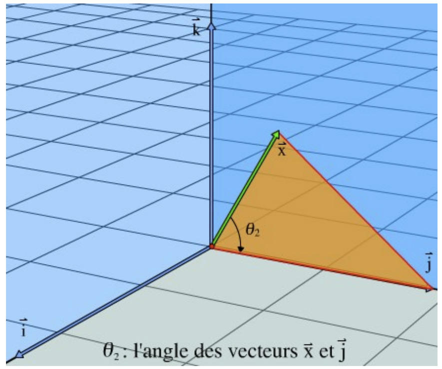
Et les vecteurs purs de Goblot ?

Une unité de longueur *u* étant fixée dans **L***+
(associée à un produit scalaire p_u et une norme ϕ_u)
à chaque vecteur pur $\vec{v}$ égal à (λ, δ), est associé le vecteur $\lambda \overrightarrow{U}$ de $\overline{E}$ où $\overrightarrow{U}$ est le vecteur de δ de longueur *u*, c'est-à-dire le vecteur unitaire de δ pour l'unité de longueur *u*.

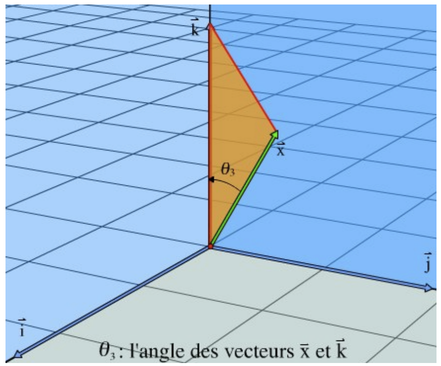
Si $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé de *E*, et si (*a*, *b*, *c*) désignent les coordonnées du vecteur associé au vecteur pur (λ, δ), alors :

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$





$\overrightarrow{U}$ est le vecteur dont les coordonnées sont *les cosinus directeurs* de la demi-droite δ, c'est-à-dire les cosinus des angles que fait un vecteur directeur de δ avec chacun des vecteurs du repère.



Question : Depuis quand les cosinus directeurs ont-ils disparu des programmes de mathématiques ?

122. ***Représentation d'une direction orientée dans un repère orthonormé.*** — 1. **Repère dans un espace métrique.** — En géométrie métrique, les vecteurs unitaires des diverses directions de droite ont la même longueur; il en est ainsi des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ du repère.

En règle générale, on supposera en outre les axes Ox, Oy, Oz orthogonaux deux à deux : on obtient ainsi ce qu'on appelle un *repère orthonormé*.

La longueur V du vecteur $\vec{V}(a, b, c)$ est alors donnée par

$$V^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

et la distance des deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ est alors donnée par

$$(M_1M_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

REMARQUE. — Lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ d'un repère cartésien plan quelconque ont même longueur, les diagonales de ce repère (cf. n° 117) sont alors les bissectrices des axes Ox, Oy, le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ (fig. 7) étant alors un losange.

2° **Cosinus directeurs d'une direction orientée (repère orthonormé).** — Soit $\vec{\delta}$ une direction orientée, $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{\delta}$; les coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère orthonormé sont appelées *paramètres directeurs principaux* de $\vec{\delta}$; ce sont aussi les cosinus des angles que font les axes Ox, Oy, Oz avec $\vec{\delta}$; d'où :

DÉFINITION. — **On appelle cosinus directeurs d'un axe $\vec{\delta}$ les mesures algébriques des projections orthogonales sur les axes du repère d'un vecteur unitaire de $\vec{\delta}$.**

Soit $\vec{u}(p, q, r)$;

si
$$\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \vec{\delta}), \qquad \beta = (\overrightarrow{Oy}, \vec{\delta}), \qquad \gamma = (\overrightarrow{Oz}, \vec{\delta})$$
$$p = \cos\alpha \qquad q = \cos\beta \qquad r = \cos\gamma.$$

Pour que trois nombres donnés p, q, r soient les cosinus directeurs d'un axe $\vec{\delta}$, il faut et il suffit qu'ils soient les coordonnées d'un vecteur unitaire, soit

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

3° **Calcul des cosinus directeurs à partir d'un système de paramètres directeurs.** — Soit δ la direction de paramètres directeurs (a, b, c); ces trois nombres sont les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{V}$ de δ. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire choisi sur δ et p, q, r ses coordonnées $(p^2 + q^2 + r^2 = 1)$.

Soit ρ la mesure algébrique de $\vec{V}$ avec le vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\vec{V} = \rho\vec{u} \qquad \text{ou} \qquad a = \rho p, \qquad b = \rho q, \qquad c = \rho r$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = \rho^2 \longrightarrow \rho = \varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad \varepsilon = +1 \text{ ou } -1$$

Nouveau cours de mathématiques spéciales,
G. Cagnac, E.Ramis,
J. Commeau, Tome 3 Géométrie
Masson, 1967.
Programme 1963.

Remarques

« *When I use a word, it means just what I choose it to mean—neither more nor less.* »
Humpty Dumpty dans *Through the looking-glass, and What Alice Found There* (Carroll, 1871).
Lewis Carroll – le mathématicien Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898).

Jänich fait un cours d'algèbre linéaire "abstraite", mais s'adresse aussi à des étudiants en physique, à qui il réserve certains développements, de manière à les aider à faire un pont entre l'algèbre linéaire abstraite et les grandeurs vectorielles en physiques.
• Il met bien en évidence la grande complexité de l'univers des grandeurs vectorielles du physicien.
• Il met en lumière un espace vectoriel sans dimension, qu'il rapproche d'un espace vectoriel de l'algèbre linéaire abstraite.
• Mais il ne fait aucun dessin pour représenter ces grandeurs.
Il manque un lien avec les vecteurs "géométriques" de la géométrie ordinaire, et notamment avec les directions de ces vecteurs.
• Il ne s'embarrasse pas avec les justifications.

• Pourtant[1], Jänich met en évidence un point commun entre le produit scalaire dans $\mathcal{U}_O$ et le produit scalaire dans $\mathcal{A}_O$.
Les deux vérifient la relation :
« Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au quart de la différence entre le carré scalaire de leur somme et le carré scalaire de leur différence. »

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{4}\left[\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 - \left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2\right]$$

• Le premier parce qu'elle est la traduction du fait que dans un rectangle les diagonales ont même longueur, le deuxième parce que c'est ainsi que le produit scalaire y est défini.

[1] Partie du travail de Jänich non abordée lors de la conférence.

• Goblot écrit un livre de préparation à l'agrégation de mathématiques en France.
Il consacre un chapitre à la mesure des grandeurs, « dans le but d'attirer l'attention sur la nature physique des quantités que l'on manipule, question de grande importance, abordée dès l'école primaire. »
Il prévient le lecteur : ce chapitre traite d'une question qui ne fait pas partie des programmes du concours.

• Pourtant, il se place dans l'institution de la préparation aux concours, dans laquelle la reconstruction de la géométrie élémentaire avec la triade "vectoriel / affine / affine euclidien" est considérée comme "la voie royale".

• Ainsi, il s'interdit de parler de longueur d'un segment (ou d'un vecteur) sans disposer auparavant d'une famille $\mathcal{P}$ de produits scalaires (et de la famille $\mathcal{N}$ des normes qui en dérivent), qui sont tous proportionnels à facteurs de proportionnalité positifs. D'abord, il ne dit rien sur le choix de cette mystérieuse famille, mais précise dans son "introduction naïve" que le choix de l'un des produits scalaires dans cette famille correspond au choix d'une unité de longueur (p. 220).

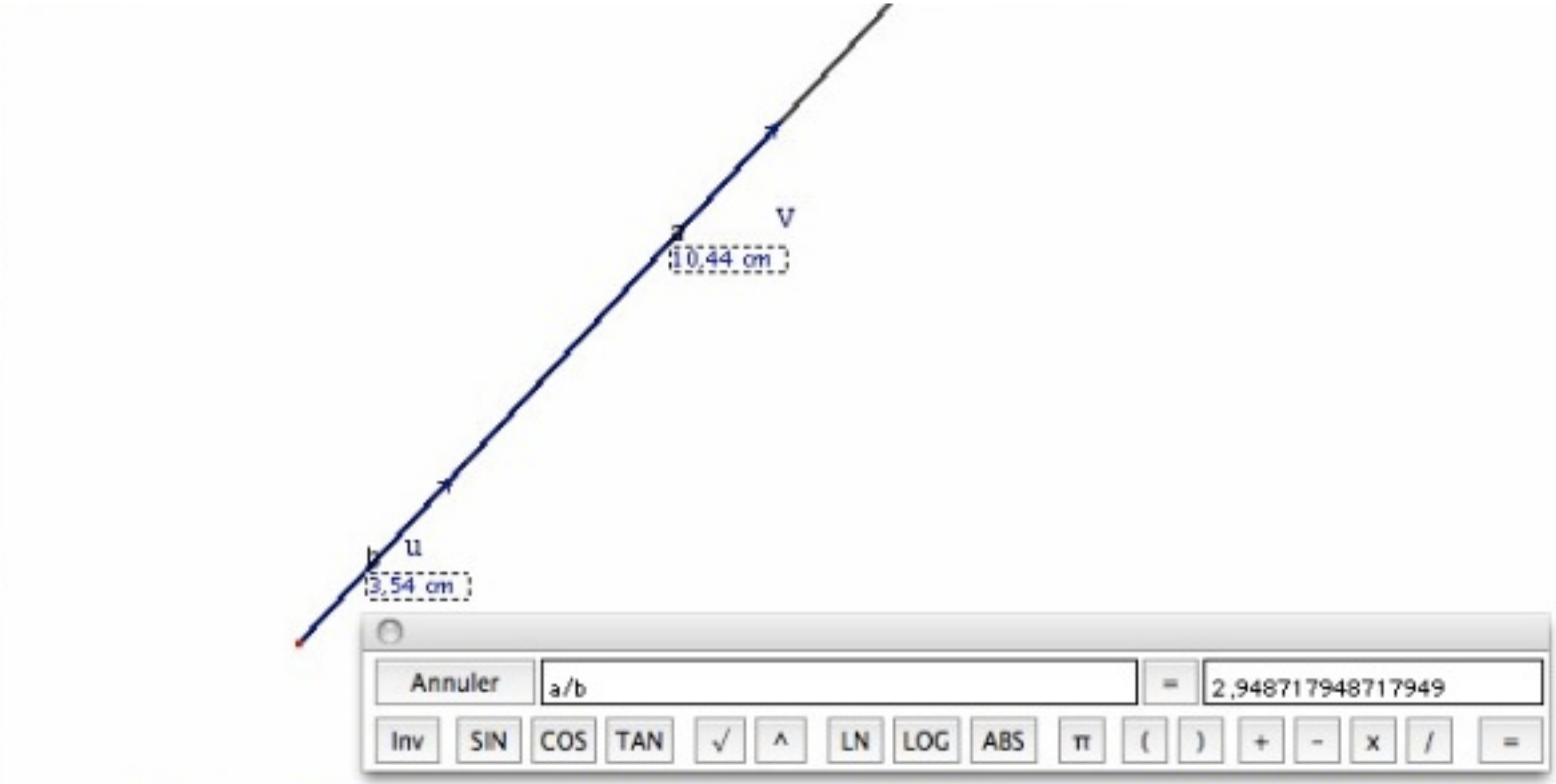
La diapositive suivante aborde une partie du travail de Goblot qui a été traitée trop "grossièrement" dans la conférence.

• Ce n'est que plus tard (p. 225-226), en construisant la droite vectorielle **L** des longueurs, qu'il explicite le lien entre le choix d'une unité de longueur u et la norme N_u appartenant à $\mathcal{N}$ qui lui est associée.

• Enfin, ce n'est qu'à la page 228 qu'il évoque le produit scalaire. Il définit d'abord un produit scalaire $p_{\mathbf{L}}$ à valeurs dans $\mathbf{L}^{[2]}$: une de ses valeurs est donc une aire. Puis, il choisit une unité de longueur u, la norme N_u qui lui est associée, et son "produit scalaire associé" p_u. Composant le produit scalaire $p_{\mathbf{L}}$ avec l'application "mesure des aires" obtenue en choisissant l'unité dérivée u^2 dans $\mathbf{L}^{[2]}$, il obtient un produit scalaire à valeurs dans **R,** à propos duquel il affirme : on vérifie qu'on obtient ainsi le produit p_u. Le parallèle avec le travail de Jänich est manifeste, et le lecteur est invité à faire la vérification…

• Le produit scalaire p_u est celui étudié au lycée, mais l'auteur ne le dit pas clairement. Or, à ce niveau, p_u peut être construit à partir de N_u et du cosinus d'un angle, c'est-à-dire à partir de mesures de longueurs avec une unité u et de mesures d'angles. On peut également l'exprimer seulement à l'aide de carrés de normes de vecteurs. Puisque le carré de la norme d'un vecteur est égal au produit scalaire de ce vecteur par lui-même, on pourra dire que « N_u dérive de p_u », comme Goblot le dit dans son "introduction naïve".

• Pourtant, Goblot met le doigt sur l’espace des directions du physicien, espace sans dimension physique, à l’aide de ses vecteurs purs, en “débarrassant” les vecteurs géométriques de leur longueur. Sa “petite flèche” pour les noter n’est pas sans rappeler le “chapeau” ^ des anglo-saxons, repris par B. Diu.



Rapport des longueurs 10,44 cm et 3,04 cm: 2,948717948717949

Ayant introduit l'espace des vecteurs purs, Goblot définit facilement le produit scalaire de deux vecteurs purs :

Si $\vec{v}_1 = (\lambda_1, \delta_1)$ et $\vec{v}_2 = (\lambda_2, \delta_2)$, on définit :

$$p_P(\vec{v}_1, \vec{v}_2) := \vec{v}_1 . \vec{v}_2 = \lambda_1 \lambda_2 \cos\theta$$

où θ est l'angle des demi-droites δ_1 et δ_2.

Il peut alors passer d'un vecteur pur $\vec{v} = (\lambda, \delta)$ au vecteur "longueur" $\lambda \overrightarrow{U}$ de $\overline{E}$ où $\overrightarrow{U}$ est le vecteur unitaire de δ pour l'unité de longueur *u*.

En notant $\varphi_u(\vec{v})$ le vecteur $\lambda\overrightarrow{U}$, on a :

$$p_P(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = p_u\left[\varphi_u(\vec{v}_1), \varphi_u(\vec{v}_2)\right]$$

Comme chez Jänich, le passage des produits scalaires de vecteurs purs (nombres réels) aux produits scalaires de vecteurs "géométriques" est assuré, mais moins commode à réaliser (suppression des unités chez Jänich, isomorphismes multiples chez Goblot).

R. Feynman explique à quoi lui sert un vecteur pour traduire la symétrie des lois physiques.
Il se préoccupe peu des calculs effectifs, ne traite aucun exemple.
Son traitement des vecteurs unités, du produit scalaire des vecteurs unitaires sont présentés comme des moyens commodes et agréables de calcul.
Il n'introduit pas les vecteurs "chapeau", et travaille avec **i, j**, et **k**.

B. Diu explique comment il représente sur la feuille de papier ces différents vecteurs, et ce qu'ils représentent.

Dans ses explications, il utilise le langage de la géométrie élémentaire d'avant la réforme des maths modernes : rapport de longueurs, par exemple.

Figure 2.15 ▲
Les vecteurs unitaires $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$ sont orientés selon les axes x, y et z, respectivement.

Les vecteurs unitaires

Pour simplifier la manipulation des vecteurs, il est commode d'introduire les **vecteurs unitaires** $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$, qui sont respectivement situés sur l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z. Un vecteur unitaire est une grandeur sans dimension qui sert uniquement à définir une orientation dans l'espace. Son module vaut une unité, ce qui se traduit par $\|\vec{\mathbf{i}}\| = \|\vec{\mathbf{j}}\| = \|\vec{\mathbf{k}}\| = 1$. À la figure 2.15, l'origine des vecteurs unitaires a été placée à l'intersection des axes pour des raisons pratiques.

En général un vecteur quelconque peut s'écrire comme la somme de trois vecteurs parallèles à chacun des axes (figure 2.16) :

Expression d'un vecteur en fonction des vecteurs unitaires

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\vec{\mathbf{i}} + A_y\vec{\mathbf{j}} + A_z\vec{\mathbf{k}} \qquad (2.7)$$

EXEMPLE 2.5

Une fillette parcourt 3 m vers l'est puis 4 m vers le sud. (a) Quel est son déplacement résultant ? (b) Quel est le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_R$ qui indique l'orientation de ce déplacement ? (c) Montrer que les orientations de $\vec{\mathbf{u}}_R$ et de $\vec{\mathbf{R}}$ sont réellement identiques. (d) Montrer que le module de $\vec{\mathbf{u}}_R$ est bien égal à 1.

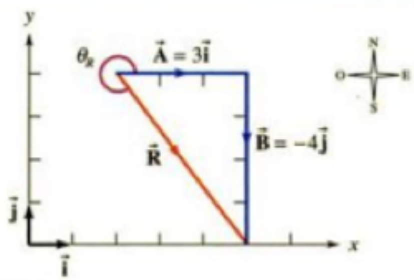


Figure 2.18 ▲
Le déplacement résultant est $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (3\vec{\mathbf{i}} - 4\vec{\mathbf{j}})$ m $= 5\,\vec{\mathbf{u}}_R$ m.

Solution

(a) L'axe des x et l'axe des y de la figure 2.18 pointent respectivement vers l'est et le nord. Le premier déplacement est $\vec{\mathbf{A}} = 3\vec{\mathbf{i}}$ m et le deuxième, $\vec{\mathbf{B}} = -4\vec{\mathbf{j}}$ m. Le déplacement résultant est donné par

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (3\vec{\mathbf{i}} - 4\vec{\mathbf{j}})\text{ m}$$

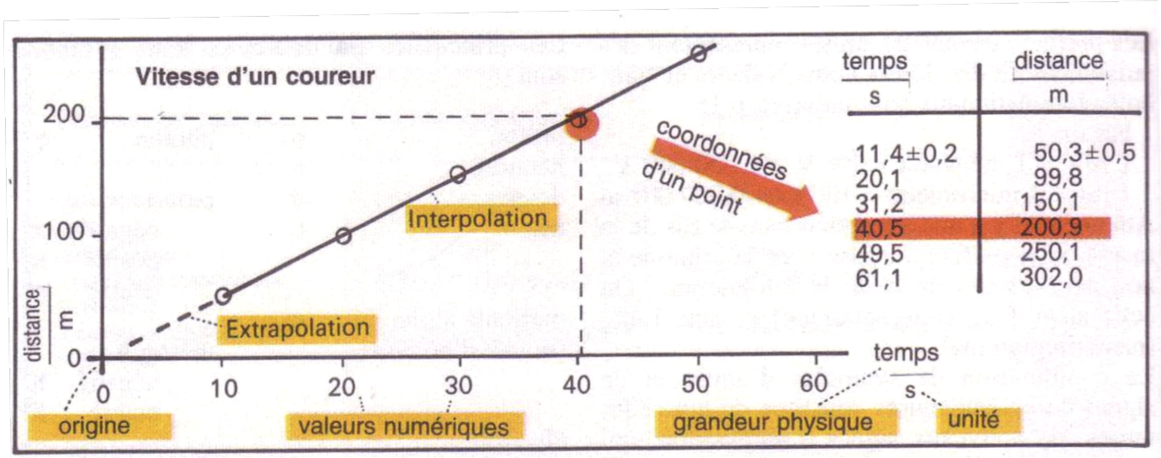
Le vecteur $\vec{\mathbf{R}}$ est complètement défini par ses composantes. Mais, si l'on veut connaître son module et son orientation, on peut utiliser les équations 2.5 et 2.6, qui donnent $R = [(3)^2 + (4)^2]^{1/2} = 5$ m et $\tan\theta_R = -4/3$, d'où $\theta_R = 307°$ ou $127°$. Comme R_x est positif et R_y est négatif, on choisit $\theta_R = 307°$.

(b) $$\vec{\mathbf{u}}_R = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|} = \frac{3\vec{\mathbf{i}}\text{ m}}{5\text{ m}} - \frac{4\vec{\mathbf{j}}\text{ m}}{5\text{ m}} = 0{,}6\vec{\mathbf{i}} - 0{,}8\vec{\mathbf{j}}$$

(c) Pour évaluer l'orientation de $\vec{\mathbf{u}}_R$, on utilise l'équation 2.6. Ainsi, $\tan\theta = -0{,}8/0{,}6$, d'où $\theta = 307°$, ce qui correspond bien à l'angle trouvé pour $\vec{\mathbf{R}}$.

(d) Selon l'équation 2.5, on trouve que

$$\|\vec{\mathbf{u}}_R\| = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = 1$$



temps s	distance m
11,4±0,2	50,3±0,5
20,1	99,8
31,2	150,1
40,5	200,9
49,5	250,1
61,1	302,0

Représentation graphique, dans un repère cartésien plan, de deux grandeurs physiques liées

Tiré de l'Atlas de la Physique de Hans Breuer, La Pochothèque, p. 22.

Éléments de bibliographie

Baylis W. E. (Ed.) (1996) *Clifford (Geometric) Algebras*, Birkhäuser, Boston.

Benson, H., Séguin, M. (2009) Physique : 1. Mécanique, De Boeck Supérieur, 672 pages.

Breuer, H. (1997) *Atlas de la Physique*, La Pochothèque Le Livre de Poche, traduction de DTV-Atlas zur Physik, 1987, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, Munich.

G. Cagnac, E.Ramis, J. Commeau, (1967) Nouveau cours de mathématiques spéciales,Tome 3, Géométrie, Masson.

Chevallard Y., Bosch M. (1999-2000) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée, *Petit x* **55**, 5-32.

Chevallard Y., Bosch M. (2002) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations, *Petit x* **59**, 43-76.
Diu, B. (1991) Scalaires et vecteurs en Physique, dans *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, n° 377, février-mars 1991, pp. 29-56.
Doran C., Lasenby A. (2013) *Geometric Algebra for Phy*sicists, Cambridge University Press (Sixième édition).
Feynman, R. (1979) *Le cours de physique de Feynman*, Mécanique 1, InterEditions, Paris. Traduction par G. Delacote de *The Feynman Lectures on Physics,* publié par Addison-Wesley Publishing Company, Copyright 1963 California Institute of Technology.
Grandeur, Mesure, collection Mots, Tome VI, Brochure APMEP n°46, 1982.
Goblot, R. (1998) *Thèmes de géométrie, Agrégation de mathématiques*, Masson.
Jänich, K. (1994) *Linear Algebra*, Spinger-Verlag.
Rougée, P. (1974) Axiomatique pour les dimensions physiques, les scalaires et les vecteurs du physicien, dans *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, n° 293, Avril 1974, pp. 295-325.
Rougée, P. (1997) *Mécanique des grandes transformations*, Springer.
Whitney, H. (1968) The Mathematics of Physical Quantities, Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly*, Mars 1968, pp. 227-256.