

# Intégration de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants

Journées bisontines de didactique et d'épistémologie

[ana-jimena.lemes@univ-lille.fr](mailto:ana-jimena.lemes@univ-lille.fr)

24 mars 2022

---

## Plan de l'expose

1. La construction d'une compétence historique chez les enseignants de mathématiques.
2. Une des expériences menée avec des enseignants en exercice.
3. Trois articles publiés en binôme avec des enseignants de mathématiques.

État de l'art à partir des approches suivantes :

- **IREM, France** : *Barbin (2010), Tournès (1993)*
- **Socioepistemologia, Mexique** : *Cantoral (2002), Montiel et Buendía (2012)*
- **História da ciência e ensino, Brésil** : *Beltran, Saito et Trindade (2014), Pereira et Saito (2018)*
- **Didáctica de la historia de las matemáticas, Colombie** : *Torres, Guacaneme et Arboleda (2014), Guacaneme (2016)*
- **Le travail de Jankvist, Danemark** : *Jankvist (2013), Smestad, Jankvist et Clark (2014)*
- **Le travail de Guillemette, Canada** : *Guillemette (2015), Guillemette (2017)*

En général, ces six approches :

1. Introduction de l'histoire des mathématiques dans la formation initiale et dans la formation continue
2. Cette expérience peut être motivée par la lecture et l'analyse des sources historiques
3. Préoccupation pour le manque de matériel adéquat et de formateurs avec des connaissances spécifiques en histoire

1. Effectuer une analyse des conceptions des futurs enseignants de mathématiques, sur les mathématiques et son enseignement, *a priori* et *a posteriori* d'un cours d'histoire des mathématiques
2. Identifier l'influence de ce cours sur les conceptions des futurs enseignants
3. Étudier les liens entre ces conceptions et le développement des compétences nécessaires pour introduire une perspective historique dans la classe
4. Effectuer l'étude en France (Lille) et en Uruguay (Montevideo)

- Cadre théorique : Connaissance Mathématique pour l'Enseignement de Ball, Thames et Phelps (2008)
- Instruments de collecte des données : questionnaires et entretiens
- Entretiens avec des étudiants, des enseignants avec l'expérience dans l'introduction d'une perspective historique, des formateurs et des experts en histoire des mathématiques
- Analyses des données : traitement quantitatif et qualitatif

---

**Ball, Thames et Phelps (2008), proposent le modèle de la Connaissance Mathématique pour l'Enseignement – CME.**

Shulman (1987) établit une différence entre les connaissances nécessaires pour être un spécialiste dans une discipline et les connaissances nécessaires pour être un spécialiste dans l'enseignement de cette discipline : *pedagogical content knowledge* – PCK (connaissance pédagogique du contenu).

## Le modèle de la Connaissance Mathématique pour l'Enseignement

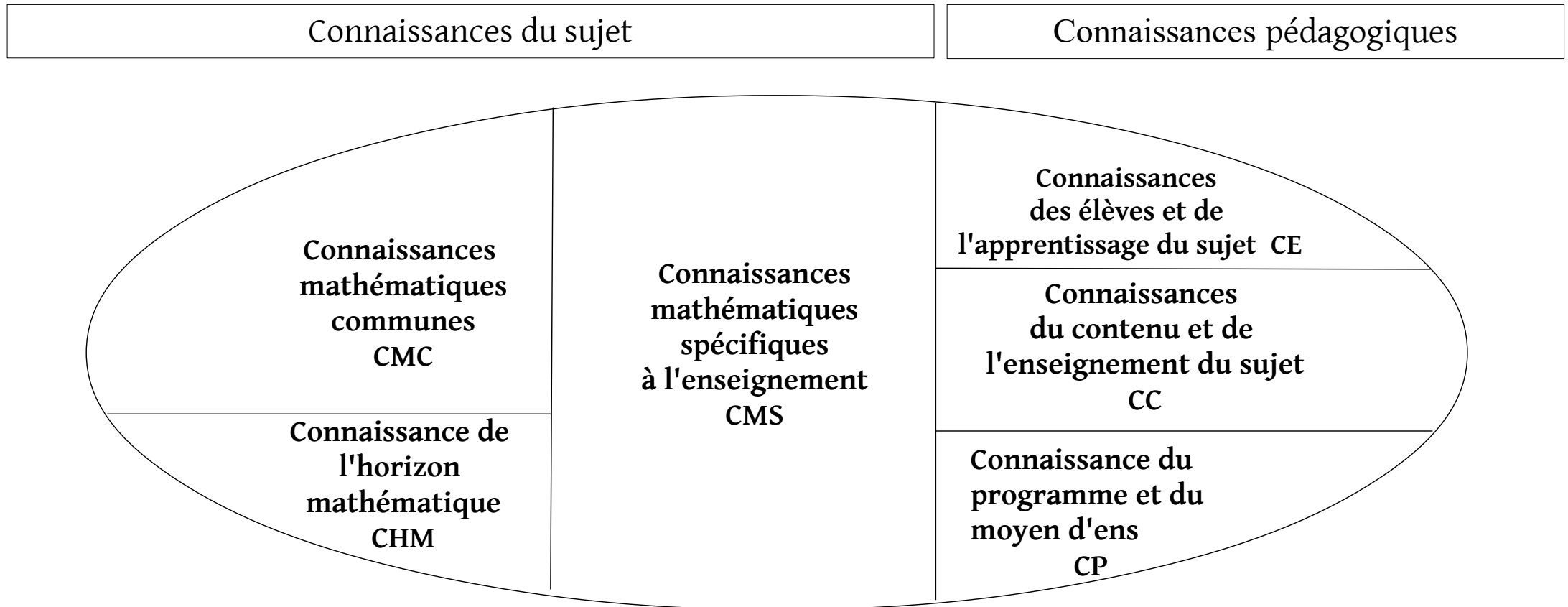


Figure 1 : Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Ball, Thames et Phelps (2008, p. 403)



Figure 2 : Interaction entre les connaissances, les conceptions et les attitudes (Ernest, 1989)

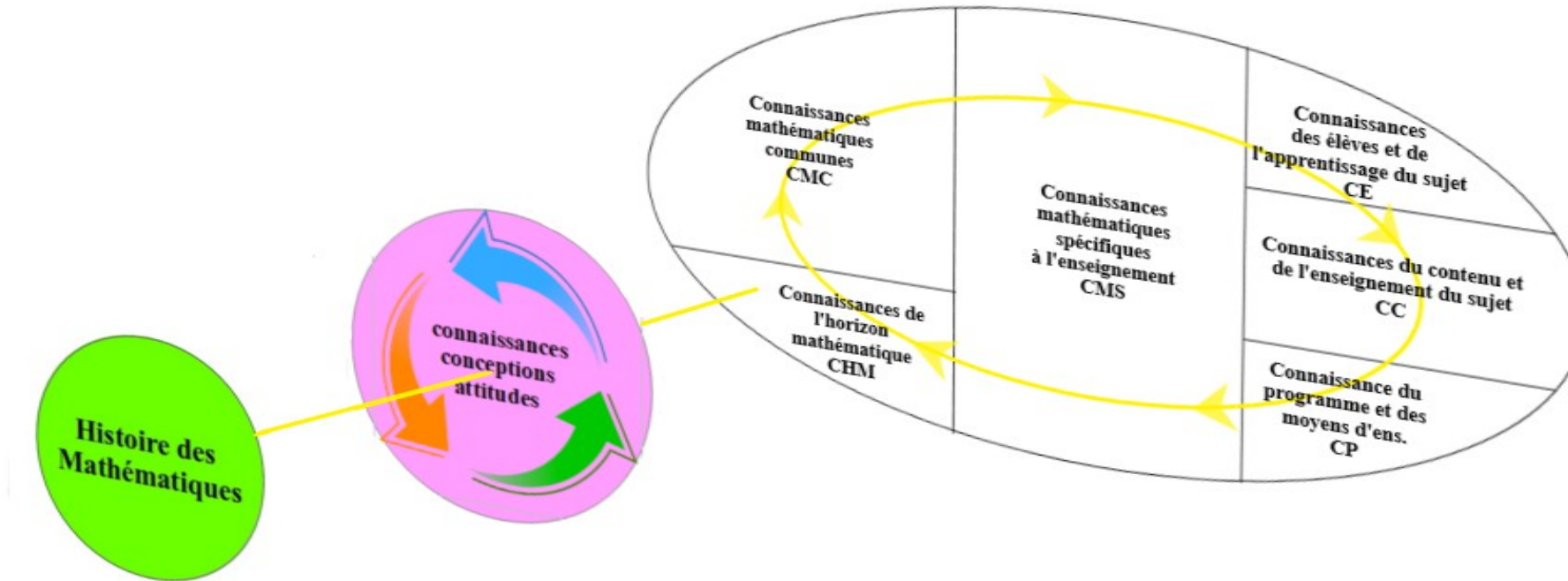


Figure 3 : L'histoire des mathématiques passe par le « filtre » et se manifeste dans la CME.

Le questionnaire était structuré en 4 parties :

1. Origine sociale, la trajectoire académique et la situation actuelle de l'étudiant
2. Formation
3. Conception sur les mathématiques
4. Questions fermées et ouvertes, où nous profitons pour inviter les étudiants à participer à la recherche avec un entretien

## 5. Instruments de collecte des données – Le questionnaire

### Questions sur différentes dimensions des mathématiques

10. Sur une échelle de 1 à 5 (1 = totalement en désaccord ; 2 = modérément en désaccord; 3 = indifférent ; 4 = modérément d'accord ; 5 = totalement d'accord), ou 0 si vous n'avez pas pensé au sujet, veuillez indiquer **votre opinion** dans les cases ci-dessous:

	1 totalement en désaccord	2 modérément en désaccord	3 indifférent	4 modérément d'accord	5 totalement d'accord	0 je n'y ai pas pensé
a) Les mathématiques sont une construction qui dépend de la culture ou la civilisation.						

Figure 4 : Extrait de questionnaire

J'ai travaillé avec trois communautés impliquées :

- Étudiants enseignants stagiaires des mathématiques
- Enseignants avec l'expérience d'utilisation de l'histoire des mathématiques
- Formateurs - experts

- Enseignants et formateurs :

**Partie 3 : Conceptions sur les potentialités de l'histoire des mathématiques**

**Après la découverte de l'histoire des mathématiques, avez-vous changé vos perspectives à propos de l'enseignement des mathématiques ? Lesquelles ?**

- Étudiants :

**Partie 4 : Conceptions sur les potentialités de l'histoire des mathématiques**

**Pensez-vous que l'histoire des mathématiques peut vous aider dans l'enseignement des mathématiques ? Dans quel sens ?**

- Enseignants et formateurs :

**Après avoir approché l'histoire des mathématiques, pensez-vous que la dimension historique vous a aidé dans l'enseignement des mathématiques ? De quelle manière ?**

- Étudiants :

**Pensez-vous que l'histoire des mathématiques peut vous aider dans l'enseignement des mathématiques ? De quelle manière ?**

---

J'ai utilisé des fragments des entretiens françaises pour définir la catégorie P1 :

[...] tous ces cours là c'étaient basés sur les lectures de textes. Forcément, c'est obligé parce que c'est en lisant de texte qu'on apprend l'histoire de mathématiques. (E1)

J'ai extrait un volume de 10 pages formé de divers morceaux découpés, mais avec l'idée que ça reste lisible pour montrer son cheminement, et faire comparer à la manière dont on fait le cours aujourd'hui. (D1)

Pour la partie que je prépare, je dois choisir quels documents je vais les présenter. Presque toujours j'essaye d'avoir des textes à leur montrer. (D5)

**Catégorie P1 : Lecture de textes historiques**

**Méthode de travail**

En France :

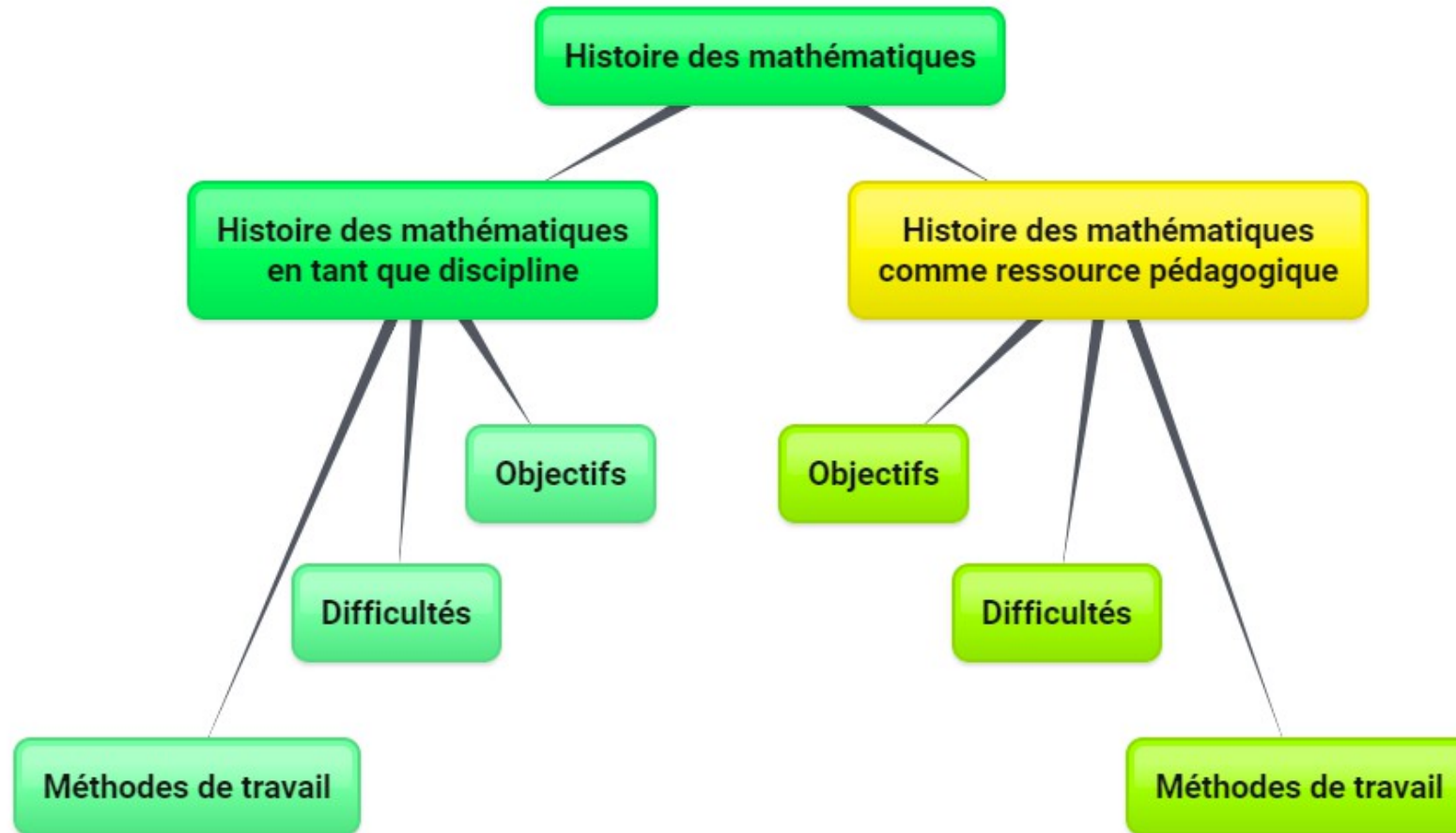


Figure 5 : Deux points de vue sur l'histoire des mathématiques

En Uruguay :

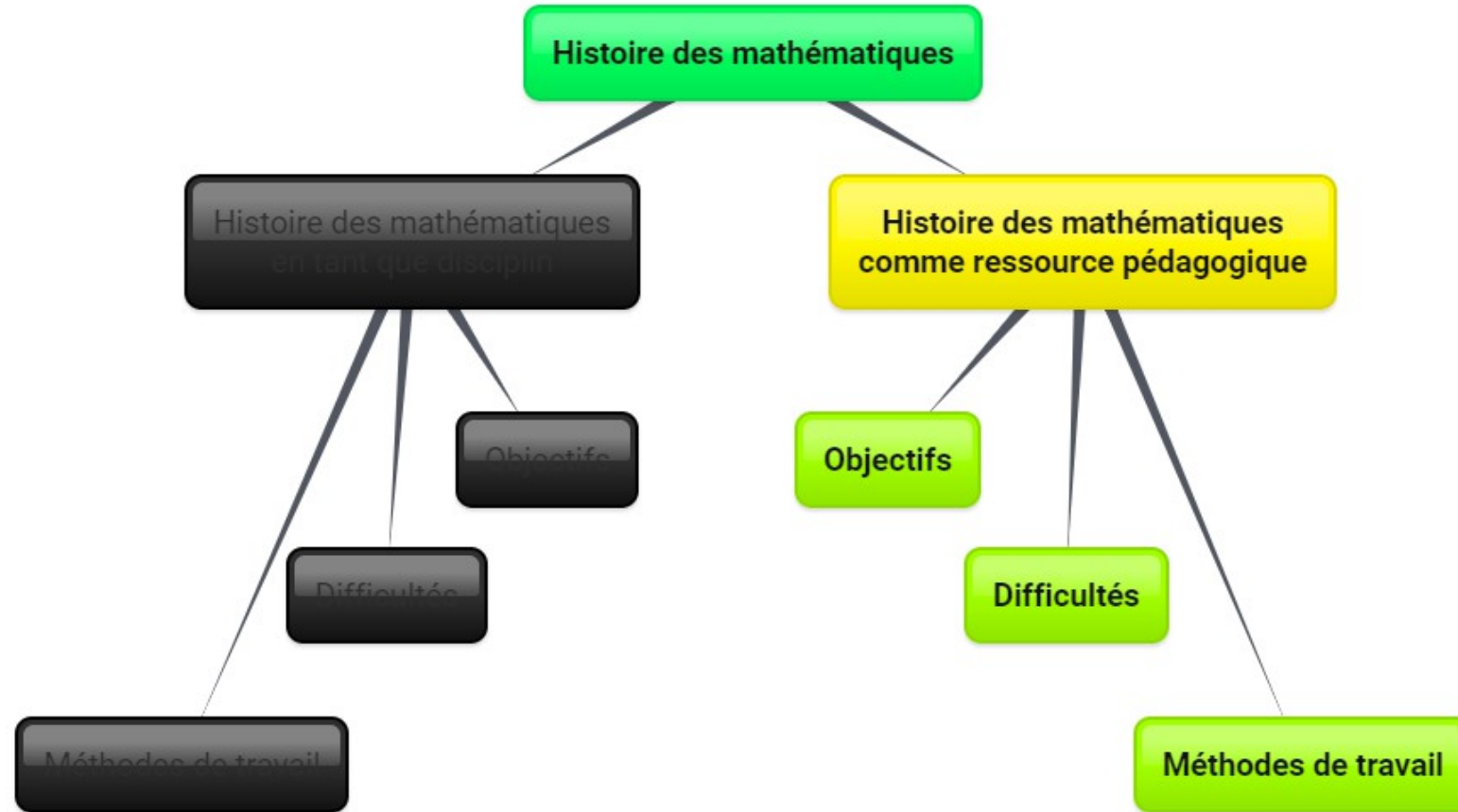


Figure 6 : Un point de vue sur l'histoire des mathématiques

Associer ces catégories aux sous-domaines définis par le modèle de la Connaissance Mathématique pour l'Enseignement

Catégorie	Sous-domaine de la CME	Justification	Exemple
P1) Lecture de textes historiques.	CMS	Sont des connaissances mathématiques spécifiques.	<i>[...] tous ces cours là c'étaient basés sur les lectures de textes. (E1)</i>

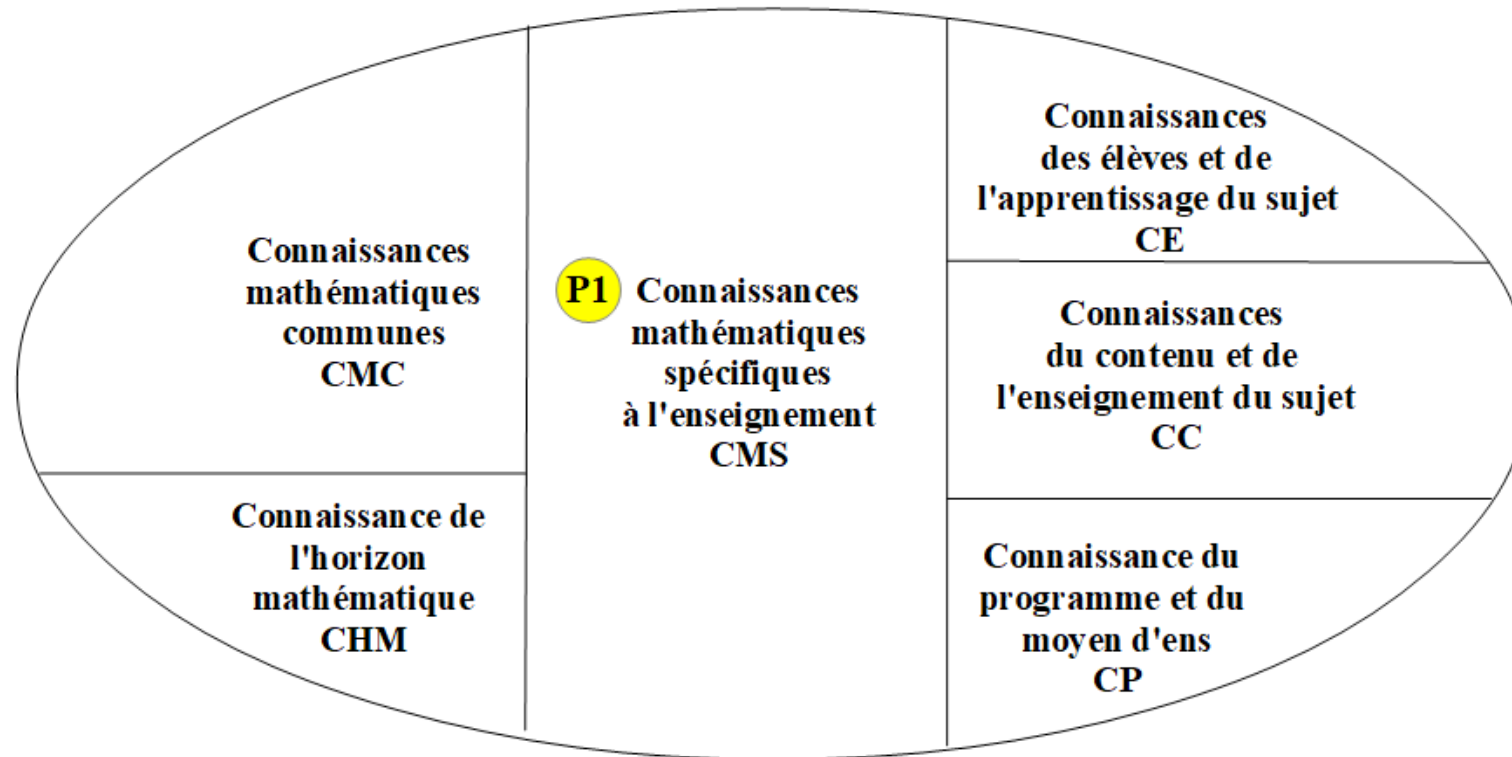


Figure 7 : P1 de la CME en France

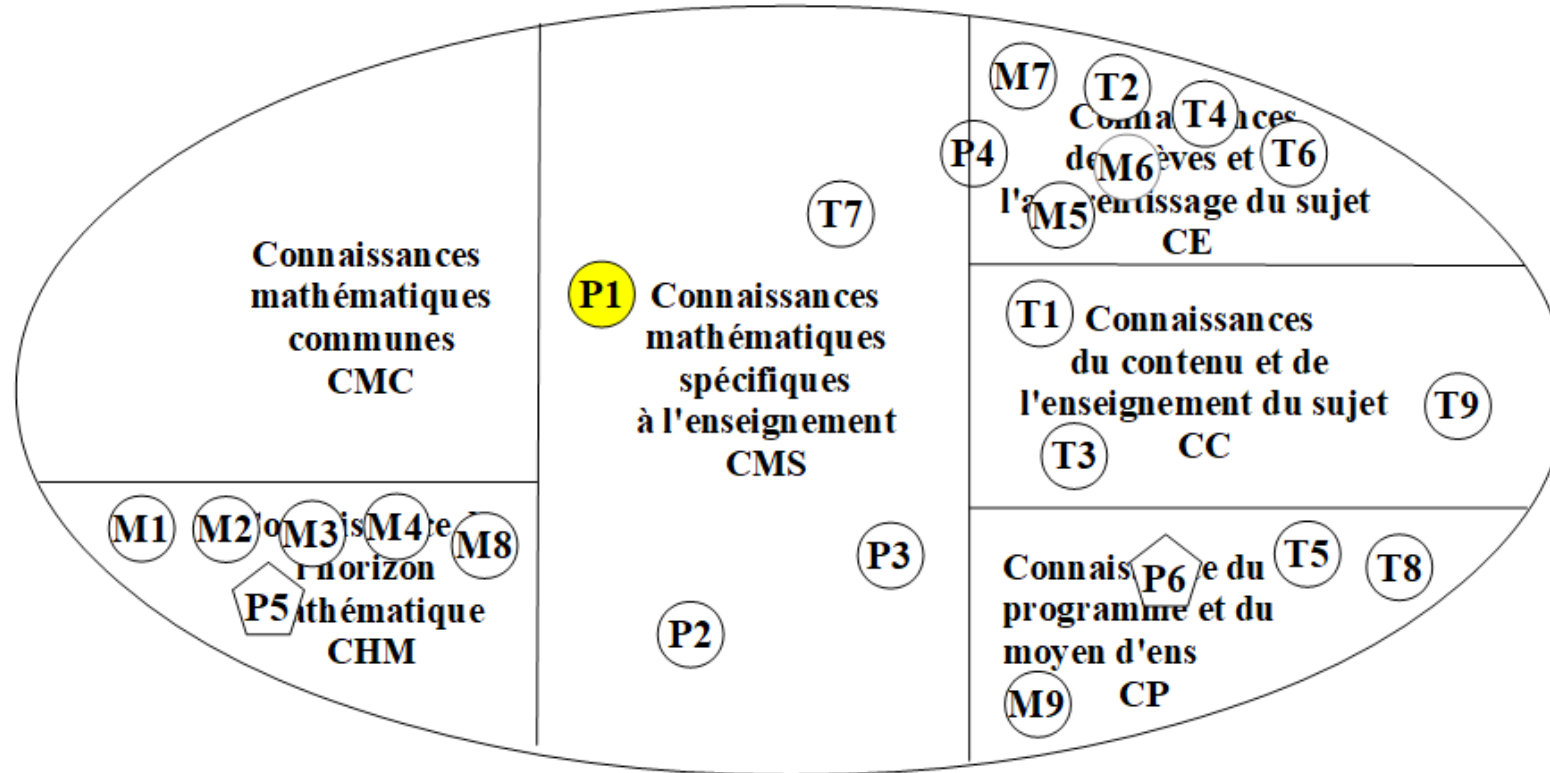


Figure 8 : CME\*France

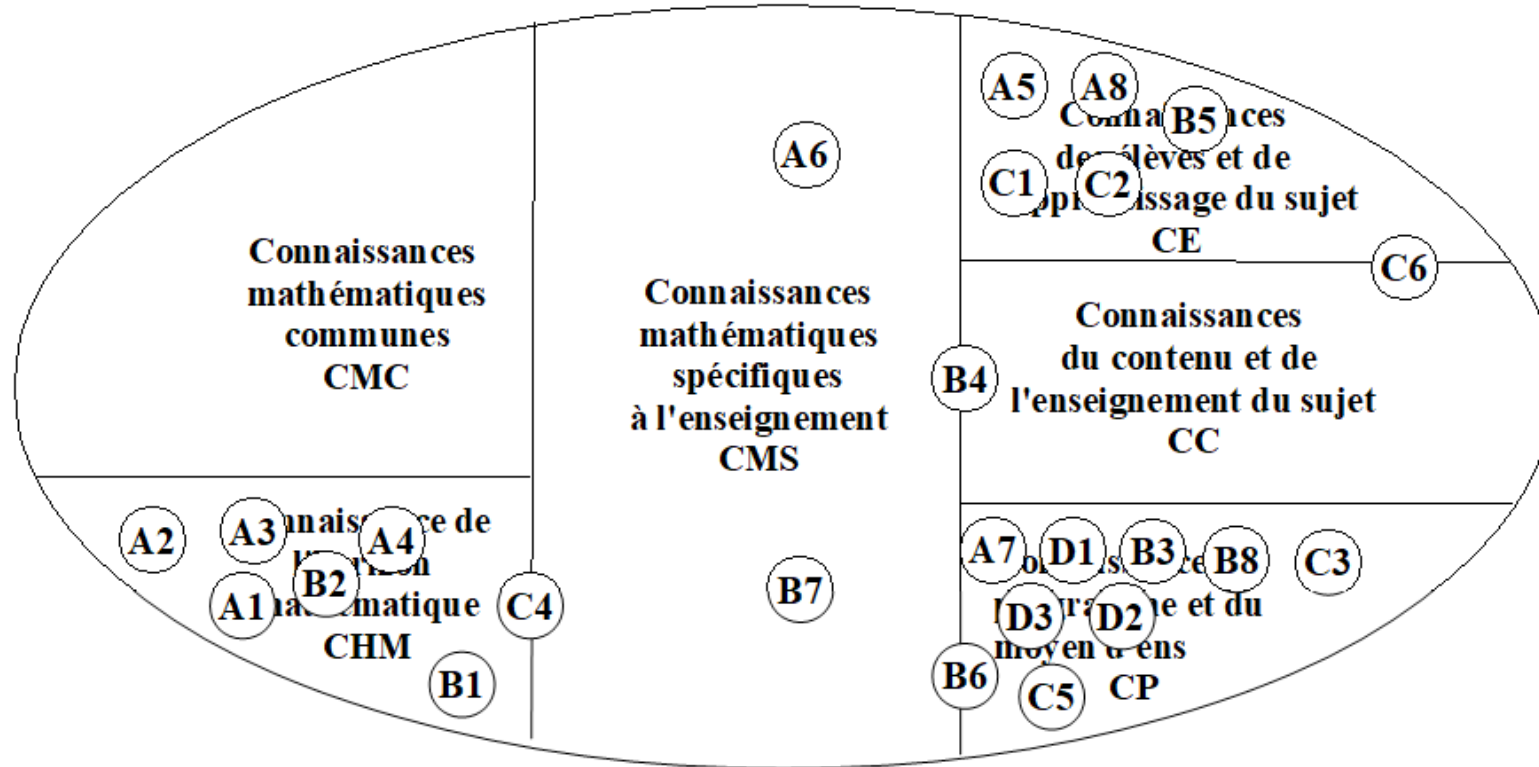


Figure 9 : CME\*Uruguay

Une catégorie présente en France liée au souci de tomber dans l’anachronisme et la simplification d’un épisode historique :

Sous-domaine de la CME	Catégories françaises	Catégories uruguayennes	Représentation
CMS	<p>T7) Anachronisme ou simplification d'un épisode historique.</p> <p>« Cet aspect de dépaysement, est extrêmement important pour les enseignants et pour surtout pas, faire d'anachronisme quand on lis un texte. » (E1)</p>		T7

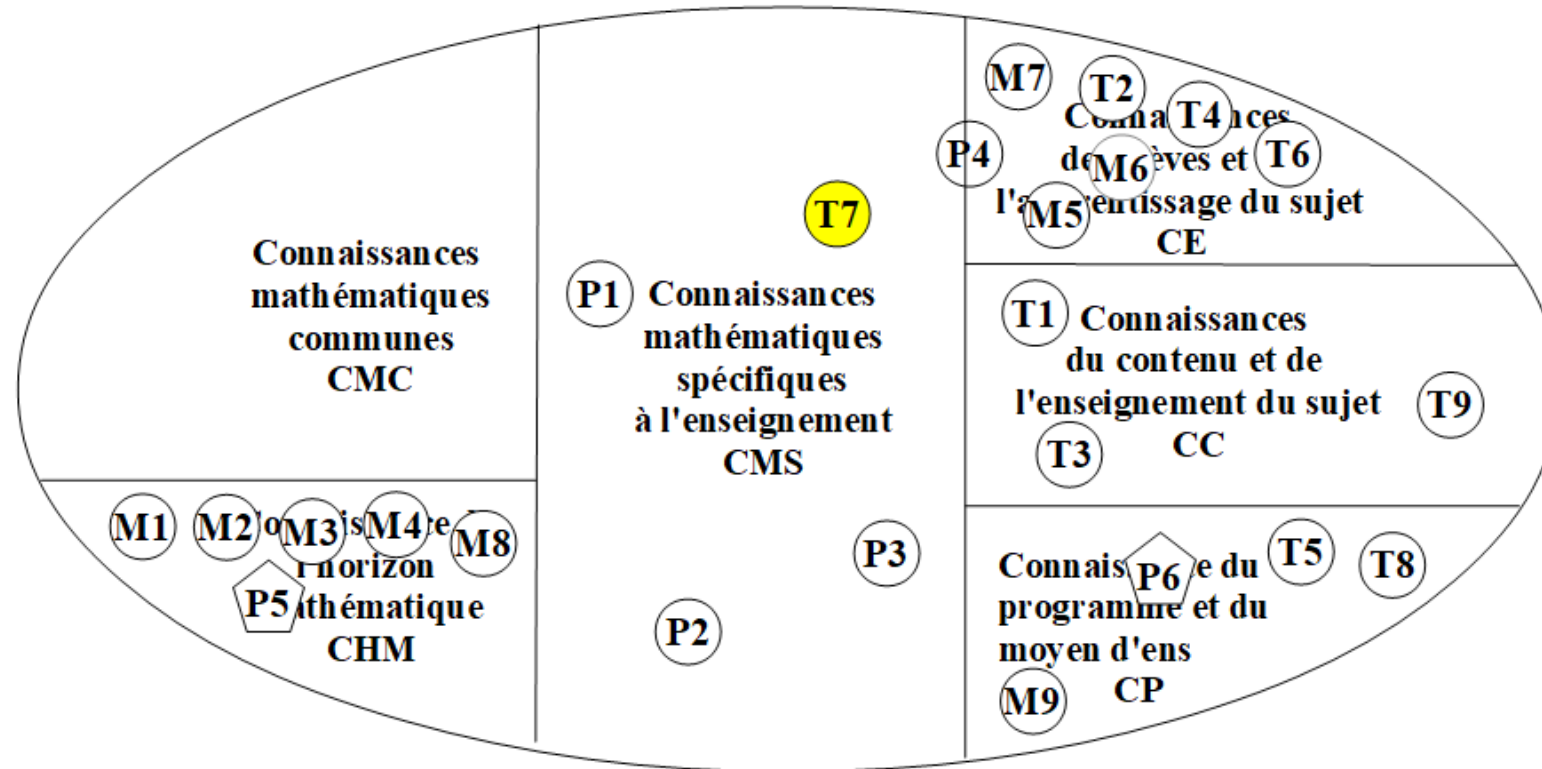


Figure 10 : T7 de la CME\*France

Une catégorie présente en Uruguay qui garde le contact entre l'histoire et les programmes d'enseignement secondaire :

Sous-domaine de la CME	Catégories françaises	Catégories uruguayennes	Représentation
CMS/CP		<p>B6) L'évaluation de l'histoire des mathématiques comme discipline dans la formation des enseignants.</p> <p>« ils [les étudiants] choisissent un thème mathématique pour aborder leur développement du point de vue historique. Lorsqu'ils choisissent le sujet, nous les formateurs, on leurs demande de tenir compte du contenu mathématique présent au secondaire » (UE3)</p>	<b>B6</b>

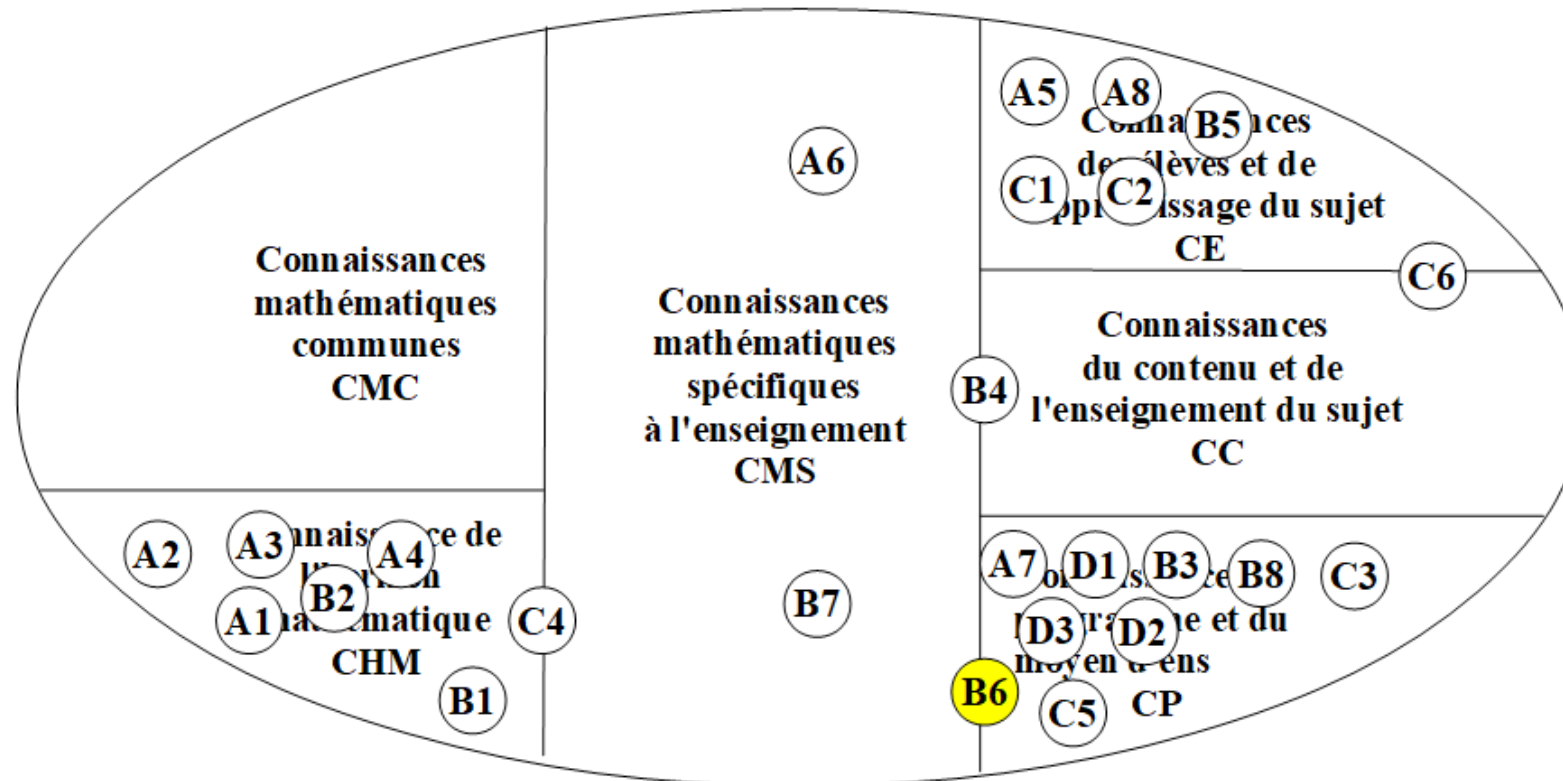


Figure 11 : B6 de la CME\*Uruguay

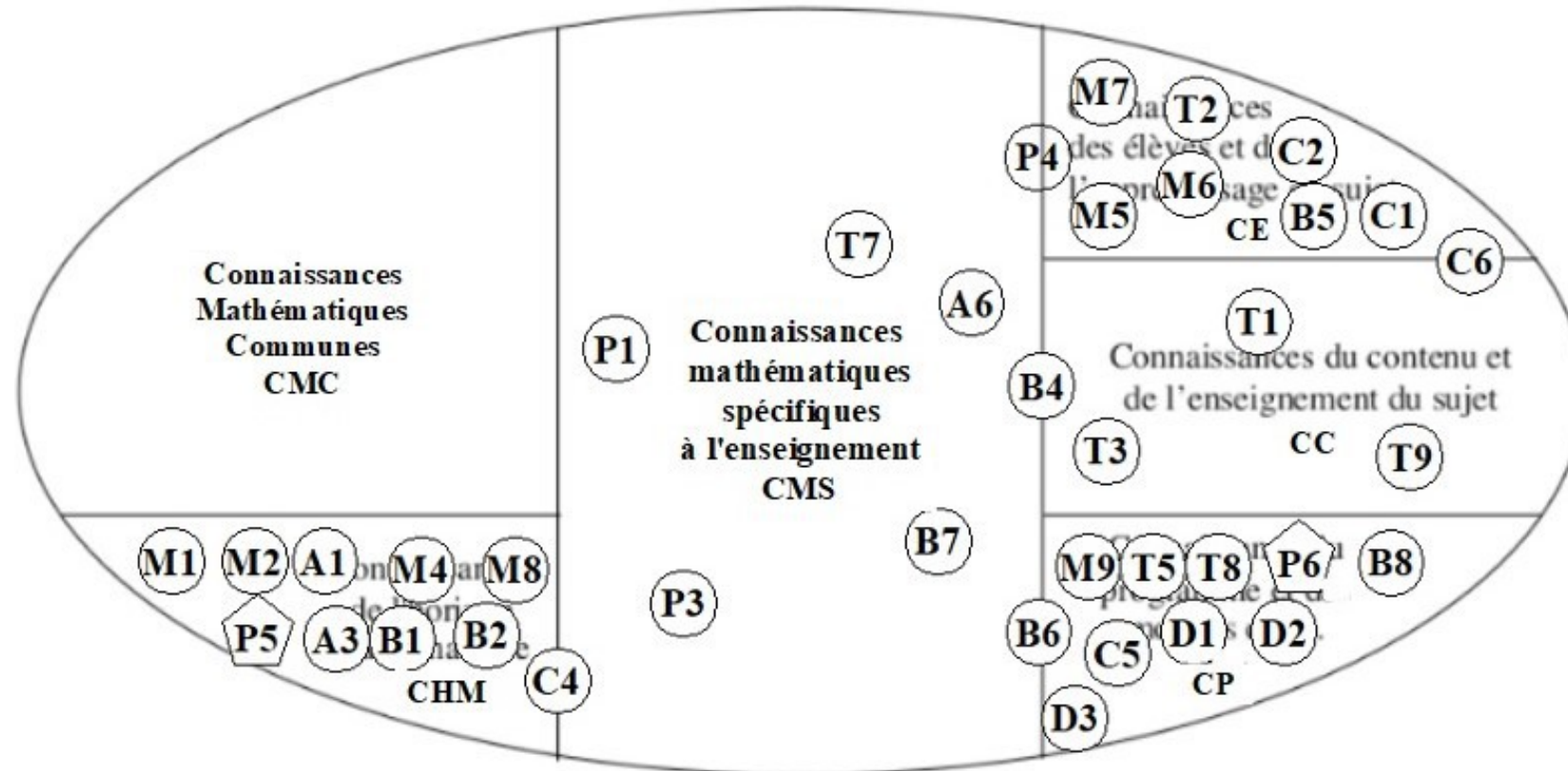


Figure 12 : CME pour l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement

## Compétence historique dans l'enseignant des mathématiques au secondaire

### Objectifs

- liés à la compréhension d'une mathématique liée à ses origines, offrant à l'enseignant la possibilité de donner des réponses sur le besoin des notions mathématiques, leur construction et constante évolution.
- comprendre la cohérence interne de la discipline et les étapes nécessaires qui permettent certaines démarches.
- savoir qu'il n'y a pas de réponse unique à chaque problème, ni de vérité absolue, mais que les réponses peuvent être différentes et dépendre du développement et des besoins mathématiques d'une époque.
- reconnaître l'effort individuel et collectif des personnes qui se sont consacrées à développer une idée, avec leurs succès et leurs erreurs.

## Compétence historique dans l'enseignant des mathématiques au secondaire

### Difficultés

- ne pas savoir comment intégrer une perspective historique dans les cours
- liées au public
- liées au matériel :
  - *trouver une source historique appropriée pour le niveau enseigné, dans la langue dans laquelle on enseigne ou avec une traduction*
  - *proposer l'analyse de films ou de matériel audiovisuel*
  - **attention** à ne pas avoir une vision anachronique qui pourrait déformer les faits historiques ou d'une simplification excessive qui pourrait la transformer en caricature.
- le temps nécessaire pour développer l'activité

---

## Plan de l'expose

1. La construction d'une compétence historique chez les enseignants de mathématiques.
- 2. Une des expériences menée avec des enseignants en exercice.**
3. Trois articles publiés en binôme avec des enseignants de mathématiques.

### **1. L'intégration de l'histoire des mathématiques :**

- motive et éveille la curiosité des étudiants
- humanise les mathématiques
- aide à remettre en question les notions établies (ICMI Study, 2000)

### **2. Recherche sur la formation des enseignants :**

- les futurs enseignants apprennent leurs modèles tout au long de leur scolarité (Ernest, 1989 ; Carrillo et Contretas, 1995)

**Pour qu'un futur enseignant puisse intégrer l'histoire des mathématiques dans ses cours, il est souhaitable qu'il vive cette expérience pendant sa scolarité**

---

**Dans cette présentation, je me concentrerai sur deux points :**

- « attaquer » une conception
- « vivre l'expérience » de l'hm dans la classe

Public d'enseignants en exercice

- Attaquer une conception peut produire un « choc » épistémologique.

Le dépaysement épistémologique est une expérience qui provoque la remise en cause de savoirs et de procédures qui vont de soi (Barbin, 2010).

Cela produit un sentiment d'incertitude, une sorte de choc.

---

**Mon objectif dans cette présentation est :**

Montrer une expérience dans laquelle on « attaque » une conception qui existe dans un groupe de professeurs de mathématiques en utilisant l'hm :

**« en mathématiques, il est toujours possible de décider si un énoncé est vrai ou faux, et pour justifier ce résultat, il est nécessaire de présenter une preuve »**

**Produire un dépaysement épistémologique dans le but de modifier une conception.**

1. Participants
2. Objectifs de l'expérience
3. Déroulement de l'expérience
4. Résultats obtenus
5. Considérations finales

- Séminaire *Histoire des Mathématiques : Approches pour l'Enseignement Supérieur*, diplôme en mathématiques (2020)
- Une activité obligatoire par semaine pendant huit semaines (lecture d'articles, participation au forum et élaboration écrite)
- Les stagiaires sont titularisés en mathématiques et ont plusieurs années d'expérience en tant qu'enseignants du secondaire (14 stagiaires)

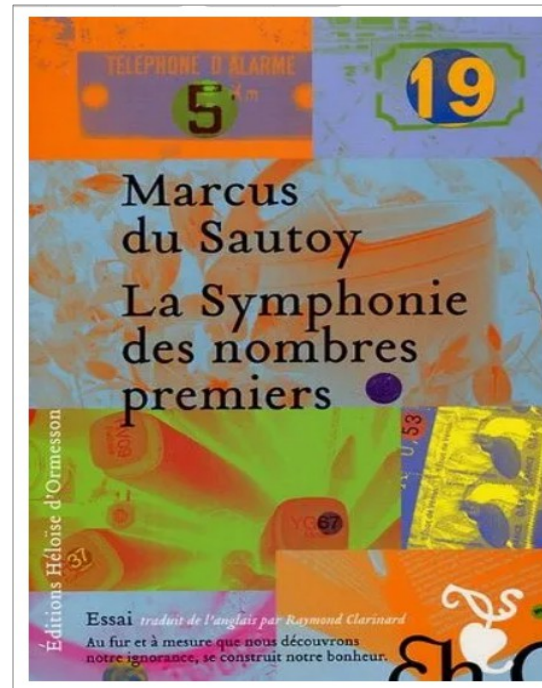
- L'objectif spécifique de cette activité est de provoquer la remise en question de la conception mentionnée.

**Guillemette (2015) affirme que grâce à l'expérience du dépaysement épistémologique, l'enseignant peut développer l'empathie pour ses élèves.**

1. Rapprocher un épisode historique du XX siècle d'un public d'enseignants des mathématiques uruguayens en exercice.
2. Expliciter l'évolution de la pensée mathématique de David Hilbert (1862-1943), où l'on peut apprécier la recherche de la justification des fondements mathématiques.
3. Présenter le contexte et la signification du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel (1906-1978), en cherchant à provoquer un *dépaysement épistémologique* par rapport à la conception mentionnée.

## Étape 1

Approche de l'épisode historique pour apprécier la position de David Hilbert par rapport aux fondements mathématiques et l'apparition du théorème d'incomplétude de Gödel.



## Étape 2

Présenter la source *Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés I*, en cherchant dégager un certain « esprit mathématique » de l'époque.

**Über formal unentscheidbare Sätze der Principia  
Mathematica und verwandter Systeme I<sup>1)</sup>.**

Von Kurt Gödel in Wien.

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfas-

**Source :** Kurt Gödel (1931, p. 173)

Le développement des mathématiques vers plus d'exactitude a conduit, comme nous les savons, à en formaliser de larges secteurs, de telle sorte que la démonstration puisse s'y effectuer uniquement au moyen de quelques règles mécaniques. Les systèmes formels les plus complets établis jusqu'à ce jour sont, d'un côté, le système des Principia Mathematica et, de l'autre, le système axiomatique de la théorie des ensembles établi par Zermelo-Fraenkel (et développée par J. von Neumann). Ces deux systèmes sont tellement larges que toutes les méthodes de démonstration utilisées aujourd'hui en mathématiques y sont formalisées, c'est-à-dire ramenées à quelques axiomes et règles d'inférence. On pourrait par conséquent supposer que ces axiomes et règles d'inférence suffisent pour décider de toute question mathématique qui pourrait s'exprimer formellement dans ces systèmes. Dans ce qui suit, nous montrerons que tel n'est pas le cas et qu'il existe au contraire dans ces deux systèmes des problèmes relativement simples concernant la théorie des entiers que l'on ne saurait trancher sur la base de ces axiomes. (Gödel, 2006, p. 53-54)

---

## 1er objectif « rapprocher l'épisode historique des stagiaires » :

[...] cela m'a fait réfléchir à la pertinence de l'histoire des mathématiques. Bien que j'aie eu connaissance de certaines de ces idées, par le biais d'un article ou d'une vidéo, je n'avais jamais lu un récit de ce type dans lequel on montre l'évolution des idées mathématiques au fil du temps et comment elles influencent différents mathématiciens, en fonction des préoccupations de l'époque. Cette perspective historique montre clairement comment les préjugés, la culture et la technologie de l'époque influencent la construction des mathématiques. (LI)

**Approche au contexte inconnu qui permet de percevoir d'autres aspects  
de la construction de la discipline**

---

## 2ème objectif « rendre explicite l'évolution de la pensée de Hilbert » :

Cette proposition [de Gödel] a ébranlé l' « édifice mathématique », car il s'est avéré que ce qui était jusqu'alors une science consolidée, cohérente et sans faille ne l'était pas. Je trouve fabuleux et étrange à la fois que l'on puisse établir une théorie exempte de contradictions mais que l'on ne puisse pas démontrer qu'il n'y a pas de contradictions au sein de cette théorie. J'ignorais tout de cette proposition et cela m'a donné envie de poursuivre la lecture pour voir comment cette histoire s'est poursuivie, quelles autres découvertes elle a générées.  
(MC)

**Réflexion sur une mathématique en évolution**

### 3ème objectif « provoquer un *dépaysement épistémologique* » :

Ma tête a explosé, c'était si dur ! Je ne suis toujours pas sûr de l'avoir bien compris [...]. Si ce qu'il a fait était révolutionnaire et controversé, dans notre propre éducation, nous continuons à étudier les mathématiques comme un structure qui repose sur des fondations solides et nous continuons à transmettre l'idée (ou du moins nous ne la nions pas) que les mathématiques expliquent tout et que tout peut être démontré sur la base d'un bon système axiomatique. (LP)

**Remise en cause de la conception**

1. Plusieurs stagiaires vivent l'expérience du *dépaysement épistémologique*.
2. Aussi activent l'empathie vers leurs élèves :

[...] en lisant ces textes, j'ai pensé à plusieurs choses à amener en classe, mais probablement par manque de temps, je ne vais pas réussir à le faire [...]. Réfléchir à l'importance des démonstrations et à leur rôle dans la classe, présenter des problèmes ouverts, font que les élèves ressentent une "incertitude" à propos des mathématiques, ce qui beaucoup d'entre nous ressentent en lisant ces documents. (ES)

[...] en lisant ces articles j'ai imaginé beaucoup de choses sur lesquelles je pourrais travailler avec mes élèves [...]. Il y a probablement très peu de choses qui peuvent être faites. Mais je pense que l'important est de changer d'avis et de penser à d'autres types d'activités avec eux. Tout comme il nous a fait réfléchir, j'imagine ce que les élèves du secondaire pourraient réfléchir si nous leur présentions certains de ces éléments. (NF)

1. Vision globale du séminaire : cette activité est celle qui les a le plus mobilisés.
2. On peut identifier les trois objectifs généraux.
3. Les stagiaires ont eu la possibilité d'utiliser l'hm comme outil d'apprentissage des mathématiques et de leur histoire → **perspective encourageant** quant à la possibilité d'intégrer l'hm dans leurs cours
4. Je ne peux pas affirmer que l'hm produit des changements mesurables, mais :
  - vivent une **remise en question** sur la nature des mathématiques
  - l'instabilité provoquée par ce questionnement induit une **activation de l'empathie** envers leurs élèves

---

## Plan de l'expose

1. La construction d'une compétence historique chez les enseignants de mathématiques.
2. Une des expériences menée avec des enseignants en exercice.
- 3. Trois articles publiés en binôme avec des enseignants de mathématiques.**

**Article 1** : La historia de la matemática en el aula (2019)

**Anné** : 1ère année de la licence prof maths en Uruguay « Geometria »

**Source historique** : Livre 1 des Éléments d'Euclide.

**Objectifs** :

- comprendre l'organisation des chapitres des Éléments
- différencier les termes définition, propositions, lemmes, postulats et notions communes.

« On cherche que le futur enseignant vive une expérience dans laquelle l'histoire des mathématiques sera ressenti non seulement comme une motivation mais aussi comme une partie de l'**apprentissage des mathématiques**, un aspect qu'il pourra prendre en compte lorsqu'il réfléchira à ses cours. »

APORTES PARA LA INCORPORACIÓN DE LA HISTORIA DE LA  
MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO

LUCÍA BESSONART, ALEJANDRO FERNÁNDEZ, JIMENA LEMES,  
CÉSAR ROQUETA, ELENA SÁNCHEZ

**Resumen**

Presentamos dos secuencias de enseñanza de la matemática para la formación de profesores elaboradas en un curso de posgrado. Pretendemos aportar a la reflexión de cómo y por qué incorporar historia de la matemática en la clase de matemática. Procuramos promover conexiones entre el conocimiento matemático y su contexto de creación. Estas conexiones pueden enriquecer el bagaje cultural de los futuros profesores.

**Palabras clave:** historia de la matemática, fuentes históricas, educación matemática, abordajes de la historia de la matemática.

**Abstract**

We present two mathematics teaching sequences for teacher training developed in a postgraduate course. We intend to contribute to the reflection of how and why to incorporate the history of mathematics in the mathematics class. We want to promote connections between mathematical knowledge and its context of creation. These connections can enrich the cultural background of prospective teachers.

**Keywords:** history of mathematics, historical sources, mathematical education, approaches of the history of mathematics.

PANORAMA INTERNACIONAL DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DOCENTE

A comienzos del siglo *xx* y en el contexto de las actividades matemáticas coordinadas a nivel internacional, algunos matemáticos como Klein y De Morgan, que se dedicaban a la investigación matemática pero también a la docencia y a la historia de la matemática, y algunos historiadores como Tannery remarcaron la importancia de una componente histórica en la educación (Barbin

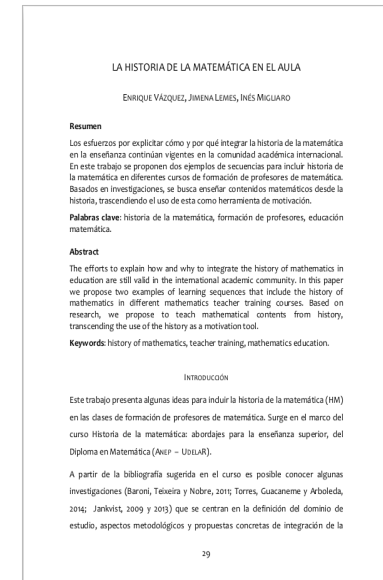
**Article 2 :** Aportes para la incorporacion de la historia de la matemática como recurso didáctico (2019)

**Anné :** 2ème année de la licence prof maths en Uruguay « Análisis matemático I »

**Source historique :** Helge von Koch, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes (1906).

**Objectifs :** « est de renforcer l'image conceptuelle des fonctions continues qui ne sont pas différentiables en un point quelconque. Selon Koch (1906), lorsque nous pensons à des courbes continues non différentiables, nous imaginons qu'elles sont différentiables sauf en certains points. La valeur didactique de l'article sur lequel se base l'une des activités est reconnue par l'auteur et concerne la réflexion sur des contre-exemples simples. »

« En faisant cette activité, il est possible que les élèves proposent que le périmètre soit infini et l'aire finie. Si c'est le cas, ils peuvent en déduire le périmètre et conclure qu'il s'agit d'une somme infinie, puis analyser les conditions que la somme doit remplir pour être convergente, et ainsi commencer à travailler avec des séries. »



### Article 3 : Apprendre matematica con fuentes primarias : una carta de Goldbach a Euler (2021)

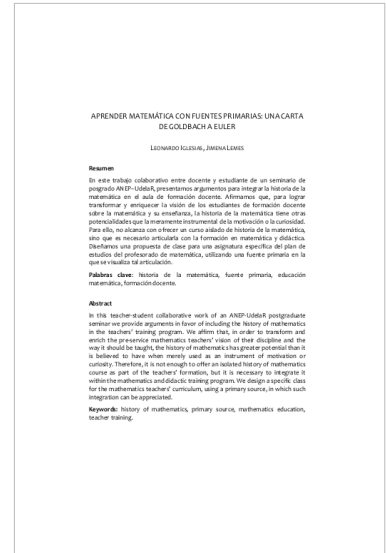
Anné : 1ère année de la licence prof maths en Uruguay « Fundamentos de matemática »

Source historique : lettre n° 51 de Goldbach à Euler (7 juin 1742)

#### Objectifs :

- comprendre ce que soulève la conjecture originale et ses formulations ultérieures (forte et faible)
- reconnaître le contexte historique dans lequel se déroule la lettre de Goldbach
- promouvoir la compréhension du processus de construction des mathématiques
- analyser l'influence des résultats mathématiques sur le développement de nouvelles idées

« L'objectif est de montrer qu'il n'y a pas de linéarité historique dans les différents développements et que les idées peuvent évoluer dans le temps. »



- Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Barbin, E. (2010). Epistemologie et histoire dans la formation mathématique. *Reperes-IREM*, 80, 74–86.
- Beltran, M., Saito, F., & Trindade, L. (2014). História da Ciência para formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 101–118. Brazil.
- Du Sautoy, M. (2007). La musique des nombres premiers : l'énigme d'un problème mathématique ouvert. Acantilado.
- Ernest, P. (1989). Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of education for teaching*, 15(1), 13-33. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0260747890150102>
- Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für mathematik und physik*, 38(1), 173-198.
- Guillemette, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers' training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 96(3), 349-365.
- Lemes, A. J. (2019). L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants : éléments pour la construction d'une compétence historique. (Thèse en didactique des mathématiques). Université de Lille, France. Récupéré sur <http://theses.fr/24518953X>

---

*Merci pour votre attention*