Journées bisontines de didactique et d'épistémologie – 4 & 5 avril 2019

Regards croisés en sciences cognitives et didactique des mathématiques sur le nombre : *le cas des fractions*

Marie-Line Gardes
Parnika Bhatia
Institut des Sciences Cognitives – UMR 5304
CNRS et Université de Lyon

Introduction

Why ?

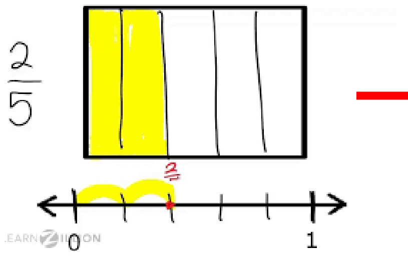
Présentation d'un jeu et d'une recherche

Développement des connaissances sur les fractions

Enseignement des fractions

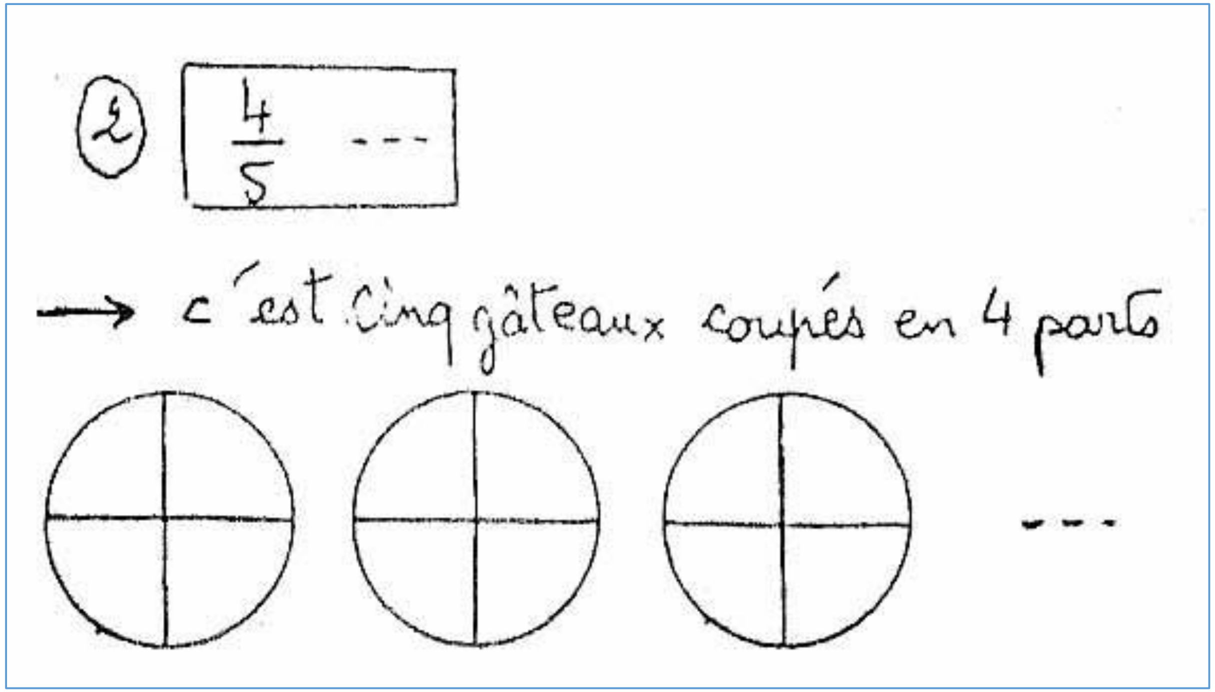
Why Fractions?

- Fractions form a crucial component of elementary and middle school mathematics.
- Foundation for algebra and higher level mathematics (Booth & Newton, 2012)
- 10 year old's fraction knowledge predicts later algebra skills and math achievement (Siegler et al., 2012)
- Difficulties with fractions might be the root cause of mathematics anxiety (Heitin, 2015)
- Children and adults struggle to understand fractions (Lipkus et al., 2001; Newton, 2008; Post et al., 1991; Reyna & Brainerd, 2008; Stigler et al., 2010).



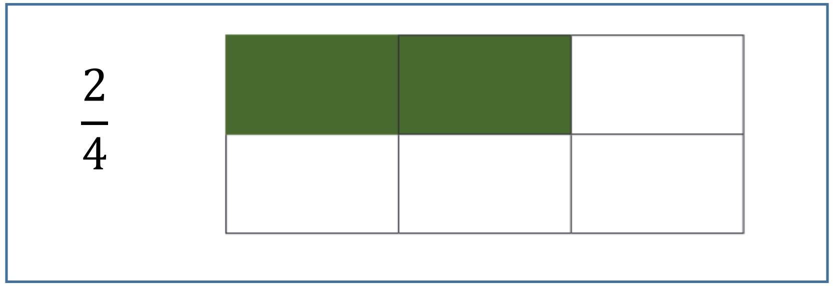
$$\frac{x^2-25}{x^2+5x} \div \frac{xy+6x-5y-30}{5x-15}$$

Des difficultés connues



$\frac{13}{7}$: est une fraction impossible puisque si tu coupes un gâteau en 7 tu ne peut prendre 13 morceaux

→ $\frac{13}{7}$ = elle est fausse



Des difficultés connues

$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{8}$ 0

$\frac{3}{6}+\frac{7}{6}+\frac{1}{6}=\frac{11}{18}$ 0

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{9}$ 0

$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{8}{12}$ 0

$\frac{5}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6}{7}$ 0

$\frac{2}{5}+\frac{11}{2}=\frac{13}{7}$ 0

$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\cancel{1}\ \cancel{2}\ ?\ \frac{1}{3}$ 1

$\frac{7}{5}-\frac{2}{5}=\frac{5}{5}$ 1

$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ 0

$\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=\frac{0}{4}$ 0

$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{1}{1}$ 0

$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ 0

$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}u$ ou $2u$ 1

$\frac{3}{6}+\frac{7}{6}+\frac{1}{6}=\frac{11}{6}u$ ou $1u+\frac{5}{6}$ 1

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}u$ 1

$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{11}{8}u$ 1

$\frac{5}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}u$ ou $1u$ ou $\frac{3}{3}u$ 0

$\frac{2}{5}+\frac{11}{2}=$? 0

Des difficultés connues

Q16. Entoure la fraction qui est la plus grande et **explique** pourquoi.

- $\frac{5}{8}$ ou $\frac{3}{8}$?

car 3 et plus petie que 5

- $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$?

car 1 et plus petit que 3 et que 2 et plus petite que quatre

- $\frac{2}{7}$ ou $\frac{5}{3}$?

car on prern le numenateur

- $\frac{5}{6}$ ou $\frac{5}{9}$?

car 9 et plus grand que 6

…et relevées dans de nombreuses évaluations externes

$\frac{1}{4}$ peut aussi s'écrire :

1 ☐ 0,25

2 ☐ 0,4

3 ☐ 1,25

4 ☐ 1,4

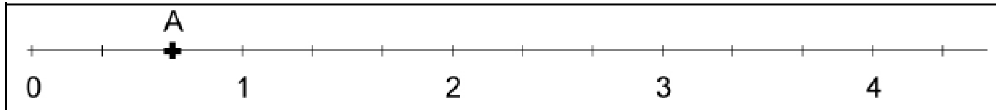
Tableau 4-10 : Distribution des réponses à l'item C1MNN030101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MNN030101	
Test 1 sept 2010	%
0 (non réponse)	2,0
Réponse 1	26,7
Réponse 2	11,5
Réponse 3	3,1
Réponse 4	54,2
9 (réponse illisible)	0,5

C1MNN030101	
Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	1,7
Réponse 1	27,3
Réponse 2	11,1
Réponse 3	3,4
Réponse 4	56,0
9 (réponse illisible)	0,5

(Chesné, 2014)

…et relevées dans de nombreuses évaluations externes



La graduation qui correspond au point A est égale à :

1 ☐ 0,2

2 ☐ $\frac{2}{3}$

3 ☐ $\frac{3}{2}$

4 ☐ 2

Tableau 4-14 : Distribution des réponses à l'item C1MNA020101 aux tests de septembre 2010 et septembre 2011 sur l'ensemble des élèves étudiés

C1MNA020101	
Test 1 sept 2010	%
0 (non réponse)	3,4
Réponse 1	55,3
Réponse 2	30,4
Réponse 3	5,6
Réponse 4	4,9
9 (réponse illisible)	0,3

C1MNA020101	
Test 1 sept 2011	%
0 (non réponse)	3,4
Réponse 1	55,0
Réponse 2	30,4
Réponse 3	6,7
Réponse 4	4,4
9 (réponse illisible)	0,5

(Chesné, 2014)

…et relevées dans de nombreuses évaluations externes

TNST Fraction Item:

Taïwan

How many different fractions are there between $^{2}/_{5}$ and $^{3}/_{5}$?

TNST Fraction Results:

	Age 12	Age 14
A. None	60	40
B. One	8	4
C. A few	6	3
D. Lots	11	35
E. No response	15	18

Item 36 (Number Concepts, Fractions)

Circle the fraction which represents the largest amount:	A $\frac{5}{6}$ B $\frac{5}{7}$ C $\frac{5}{8}$ D $\frac{5}{9}$

	USA 8	USA 10	USA 12	USA 14	Aus 8	Aus 10	Aus 12	Aus 14	Swe 10	Swe 14
Item #		7	4	4		7	4	4		5
Response %	USA 8	USA 10	USA 12	USA 14	Aus 8	Aus 10	Aus 12	Aus 14	Swe 10	Swe 14
A*		29	74	85		42	79	98		92
B		1	1	1		1	2	1		0
C		0	3	2		1	3	0		1
D		69	22	11		57	17	2		6
No Response		1	0	1		0	0	0		1

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., Farrell, B. (1997)

To conclude about difficulties with Fractions

- Whole Number Bias - misapplication of whole number concepts to fractions (Ni & Zhou, 2005)
    - Whole numbers have unique successors
    - Can be represented by a single symbol
    - Increase with multiplication and decrease with subtraction (Siegler et al., 2013)

- Fraction Arithmetic - maintaining common denominators in addition and subtraction but not in multiplication and division (Seigler et al., 2013)

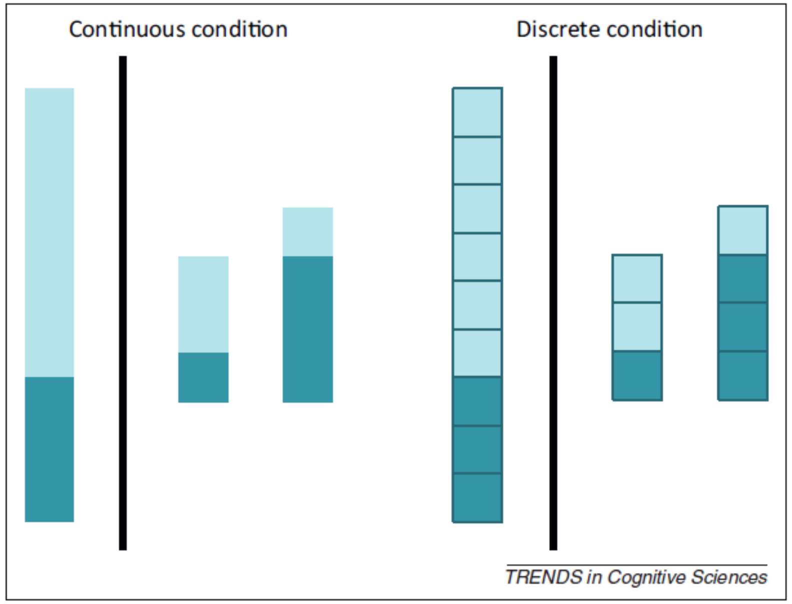
Fractions and Proportions: A Cognitive Perspective

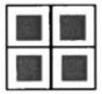
Parnika Bhatia

Development of Fraction Knowledge - Conceptual

Non- symbolic

- 6 months - Discriminate between ratios that differ by factor of 2. (McCrink & Wynn 2007)
- 3 years - Can draw analogies between ½ of square and ½ of circle (Goswami 1995)
- 4 years – Are more accurate when comparing ½ pizza to ½ chocolates than ¾ or ¼. (Singer-Freeman & Goswami, 2001; Bialystock & Codd, 2000)
- Kindergartners answer continuous condition correctly as compared to discrete (Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008; Jeong et al., 2007; Singer-Freeman & Goswami, 2001; Spinillo & Bryant, 1999; cf. Wing & Beal, 2004)

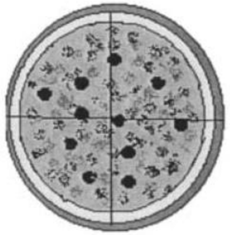




Quarters

Symbolic

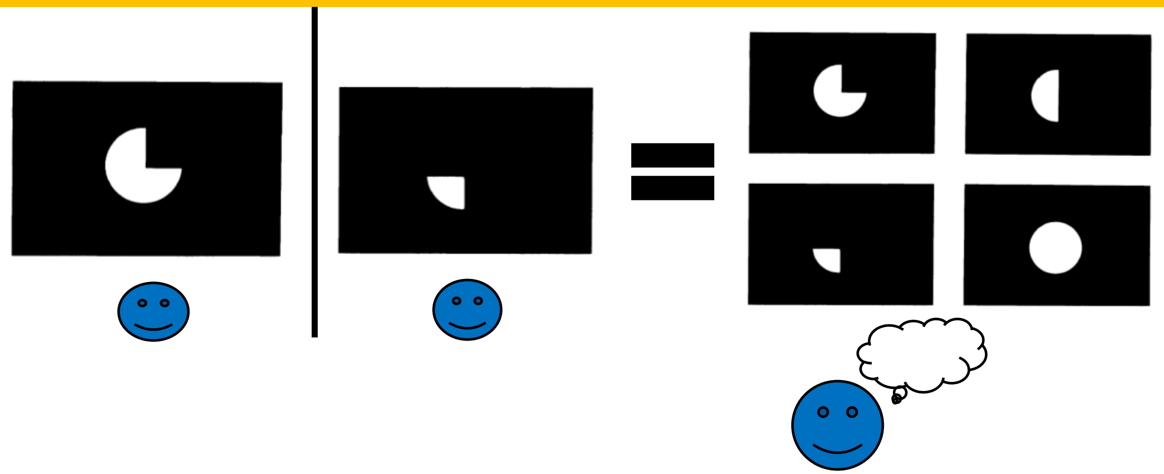
- 7 years - Understand the relation between number of sharers and objects (Wing & Beal, 2004).



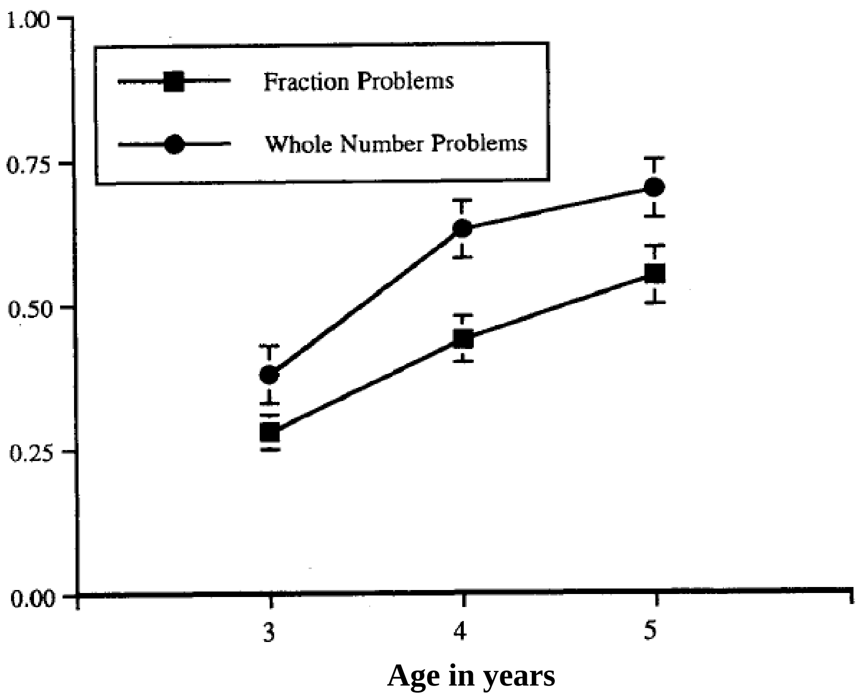
Quarters

Development of Fraction Knowledge - Procedural

Procedural Knowledge : Fluency with the four fraction arithmetic operations



- Non symbolic
  - 4 year old - accurately answer problems involving addition and subtraction of non verbal representations (Mix et al 1999)



Proportion Correct in a 4 choice task (Mix et al., 1999)

- Symbolic: Develops in school and is error prone

Bidirectional Relation between Procedural and Conceptual Knowledge

4th grade (CM1)
Procedural knowledge:
Fraction computation
Estimation
Word problem performance

⟺

5th grade (CM2)
Conceptual knowledge:
Part Whole
Magnitude Comparison
Picture Computation

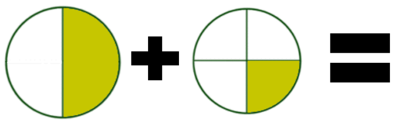
2/5 + 3/5 = ?
2 + 1/4 = ?

$\frac{99}{100}+\frac{99}{100}=$

1,
10,
100,
1000 ?

- Procedural Knowledge uniquely predicted individual differences in magnitude comparison and picture computation
- Word problem performance in fourth grade predicted later part–whole knowledge
- Word problem skills in fourth grade were associated with part whole and measurement concepts
- Fraction computation skills were predictor of growth in picture computation concepts

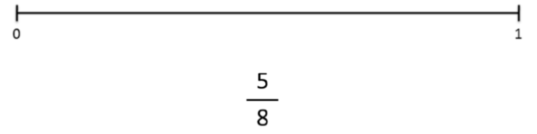
Which one is greater
$\frac{2}{9}$ **or** $\frac{4}{7}$**?**

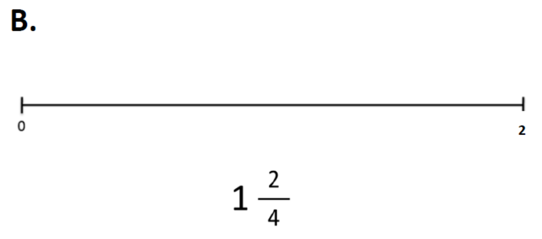


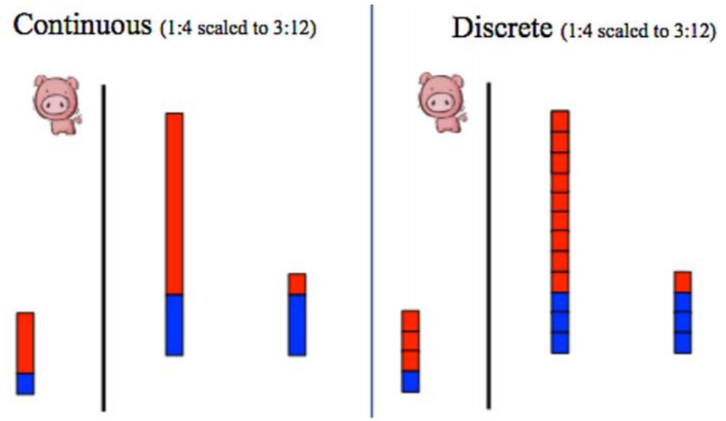
(Hecht & Vagi, 2010)

Bidirectional Relation between Procedural and Conceptual Knowledge (Cont'd)

Number Line Estimation







Shade 1/3 of the rectangle below:

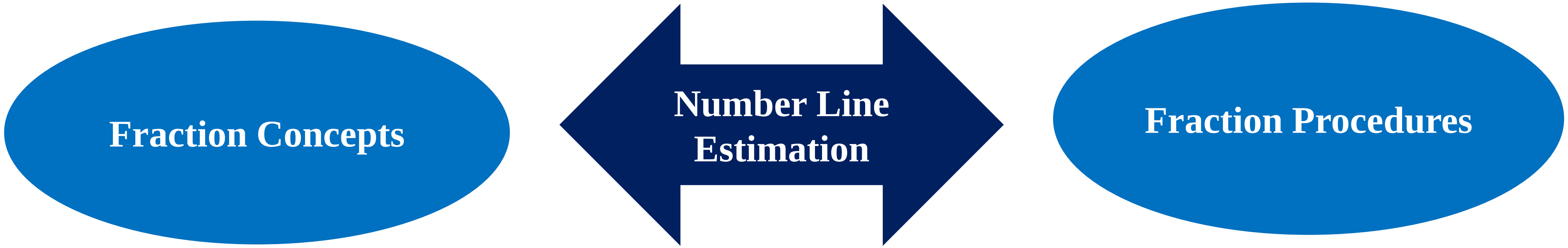
Sara painted 2/5 of a picture on Monday and 1/5 of the picture on
Tuesday. How much of the picture did she paint during both days?

- Non symbolic proportion reasoning contributes independently to students' proficiency with fraction concepts, over and above symbolic math-related
- Number Line Estimation made largest unique contribution to fraction procedures
- Number Line Estimation and attention made unique contributions to fraction concepts
- Magnitude understanding is foundational to mathematics learning

(Jordan, Rodrigues, Hansen, & Resnick, 2017)

Conclusion

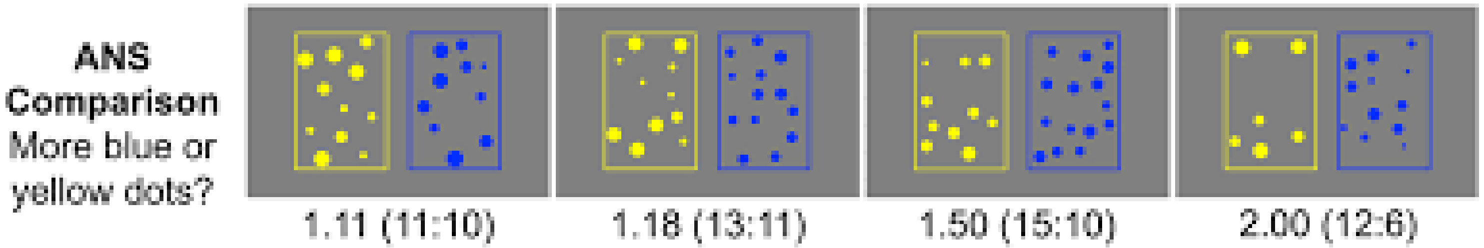
- ✓ There is a bi-directional relation between procedural and conceptual knowledge of fractions
- ✓ This relation can be leveraged through teaching concepts and procedures of fractions and whole numbers that center on number line estimation approach.
- ✓ A number line could be used to overcome multiple difficulties with fractions such as :
  - ✓ fraction equivalence (3/4 is the same as 6/8 as they are on same location of number line)
  - ✓ the inversion property of fractions (fractions with the same numerator become smaller as the denominators increase),
  - ✓ and the density of fractions (there are an infinite number of fractions between two numbers).



(Jordan, Rodrigues, Hansen, & Resnick, 2017)

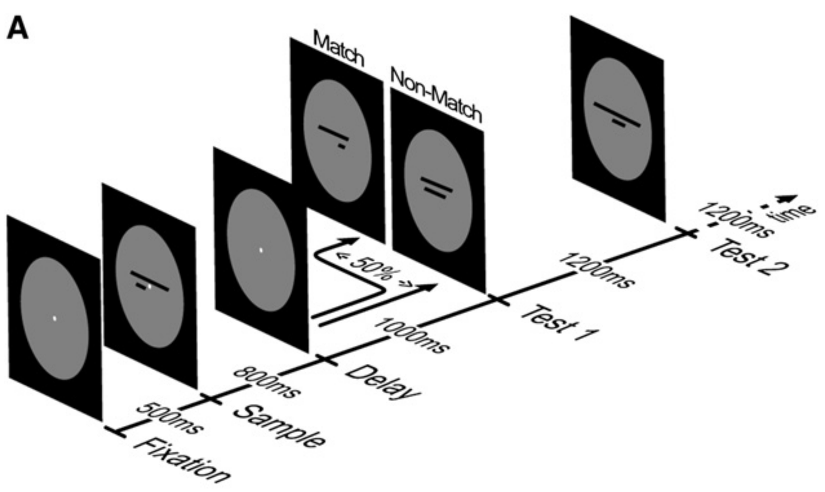
Why do we struggle in fractions? Innate Constraint Hypothesis

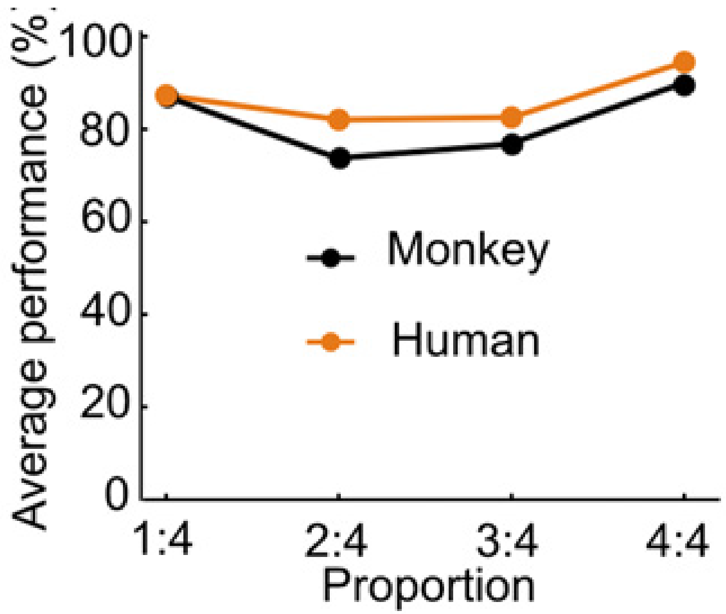
- Foundations of Numerical Cognition (Piazza, 2010) → Neuro-cognitive start up tools like:
  - Object Tracking System (OTS): Rapid and exact enumeration of small sets
  - Approximate Number System (ATS): Approximation of numerosities of larger sets
- These abilities in human are recycled to be used in formal education settings (Dehaene & Cohen, 2007; Piazza, 2010; but see DeSmedt, Noël, Gilmore, & Ansari, 2013)
- However, the ATS and OTS do not support fractions or rational numbers
- For instance, Approximate Number System (ANS) serves as precursor for supporting symbolic whole number understanding
- Human Cognitive Architecture does not support them and hence, we struggle. BUT,



NOT supporting Innate Constraint Hypothesis: Study 1

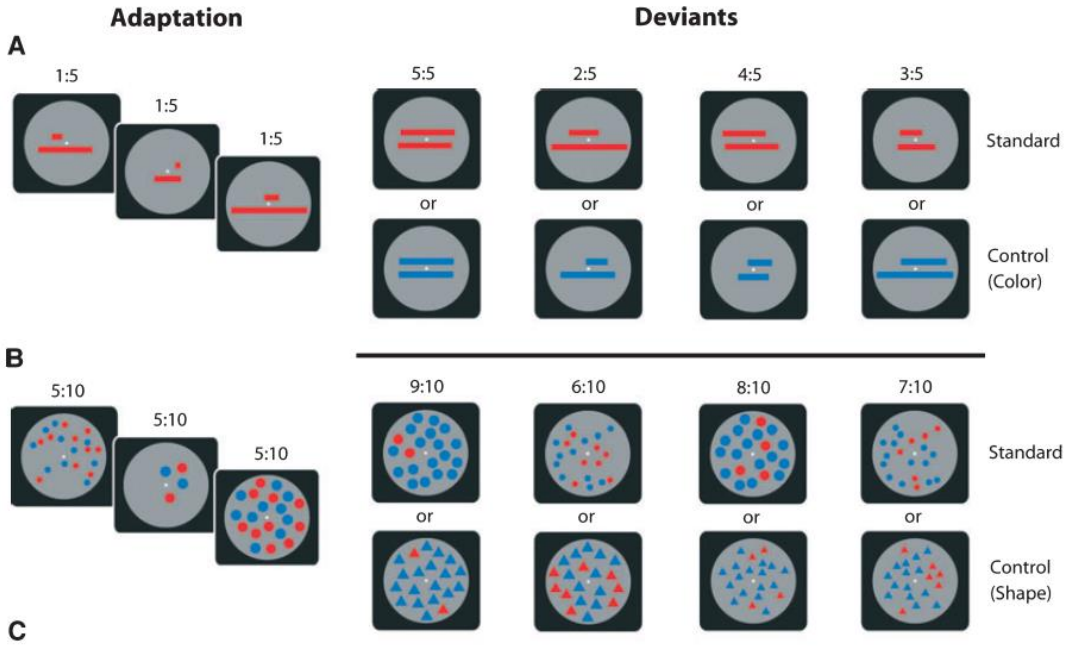
- Single cell neurophysiology: Study of electrical properties of single neurons using micro-electrodes
- Monkeys matched non symbolic line pairs of same ratios when line length differed
- "Proportion, a relational and derived quantity category, is represented in a partly overlapping magnitude coding network"
- Novel finding- Parietal neurons respond earlier than prefrontal neurons.(Vallentin & Neider, 2008)

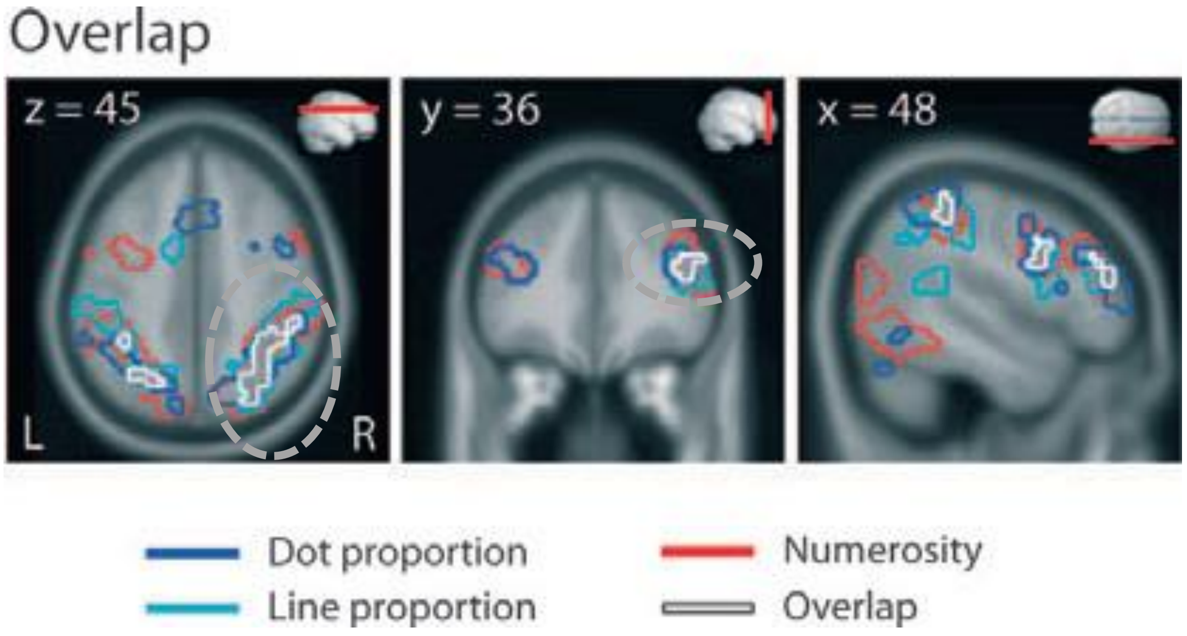




Study 2:

- Event related fMRI adaptation design (~ 15 min)
- Absence of task, non symbolic proportions automatically (implicitly) represented in the human brain
- Both numerosity and proportion are processed by the same brain areas (Parietal, prefrontal, precentral).





Jacob & Neider, 2009

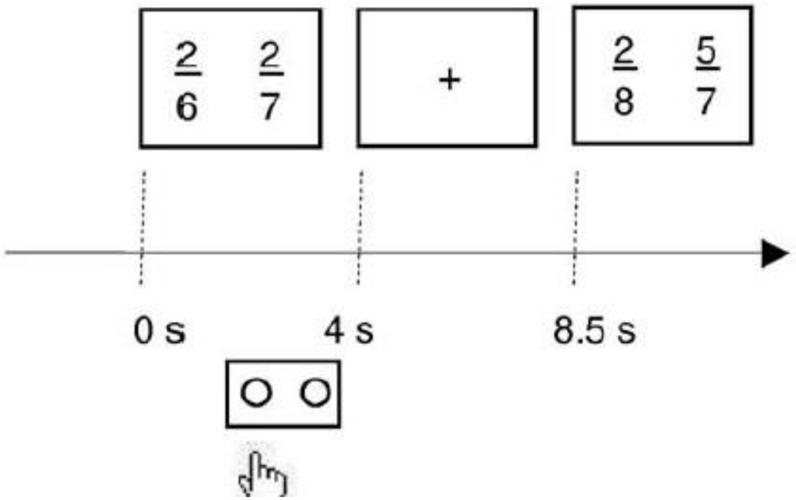
Study 3:

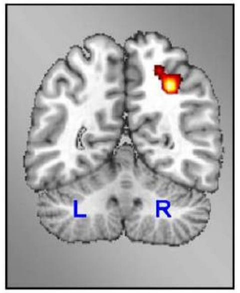
- Fraction comparison task: Behavioral and in MRI scanner

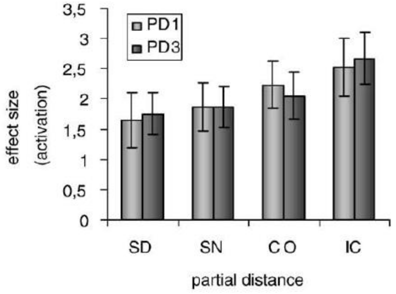
- Total distance effect between fractions present in the Intra-Parietal Sulcus- Easier the fraction- Less is the brain activation

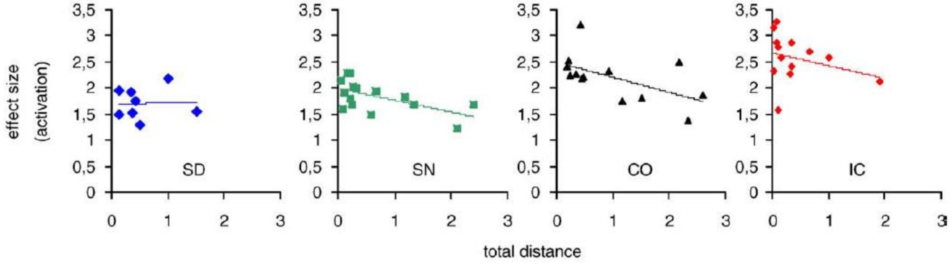
- Skilled adults process numerical value of fractions as well as the components of fractions depending on the condition.

- “Representation of fraction in the brain is based on numerical value rather than separate representation of Numerator and Denominator”







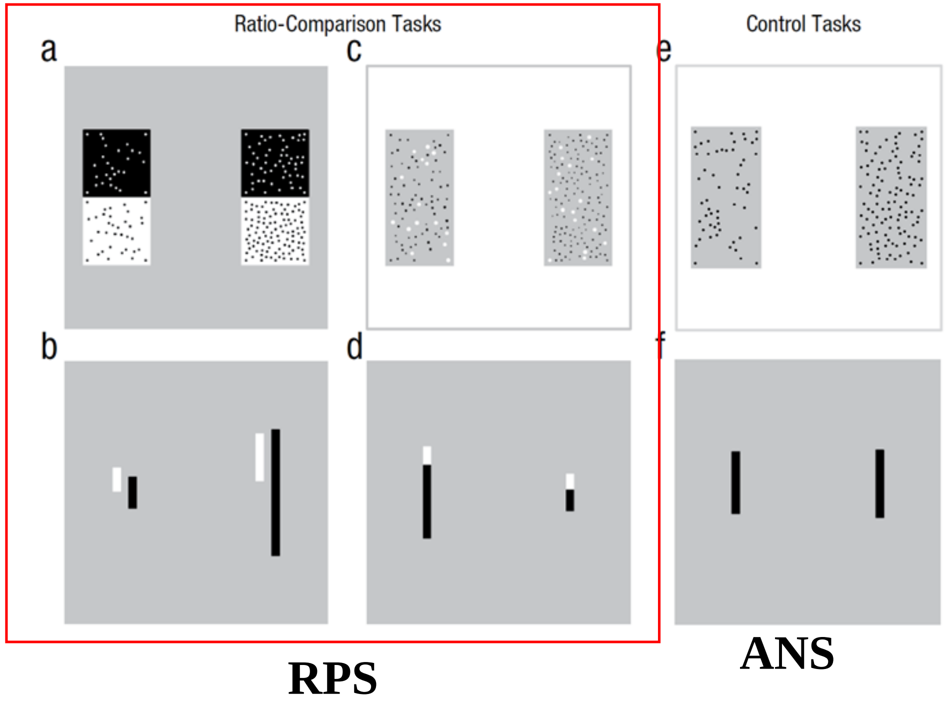


(Ischebeck, Schocke, & Delazer, 2009)

Study 4:

- RPS acuity among individuals predicts symbolic fraction ability and performance on algebra.
  - Higher RPS accuracy - Better performance on fraction knowledge and algebra
- RPS operates mostly independently of ANS (ANS acuity no longer significant when RPS added to model)

- Non-symbolic ratio magnitudes may support symbolic knowledge and hence, mathematical competence
- RPS may provide a more intuitively accessible route for promoting the critical-magnitude interpretation of fractions



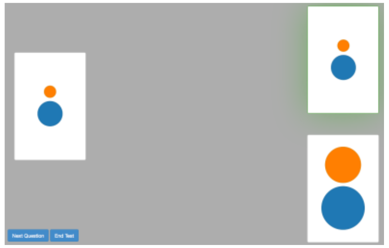
Tasks

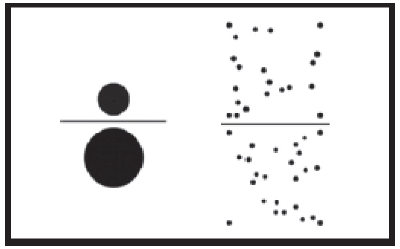
- Non-symbolic ratio comparison (predictor)
- Symbolic fraction knowledge (outcome)
  - Symbolic Fraction Comparison
  - Number Line Estimation
  - Fraction Knowledge Assessment
- Algebra (outcome)

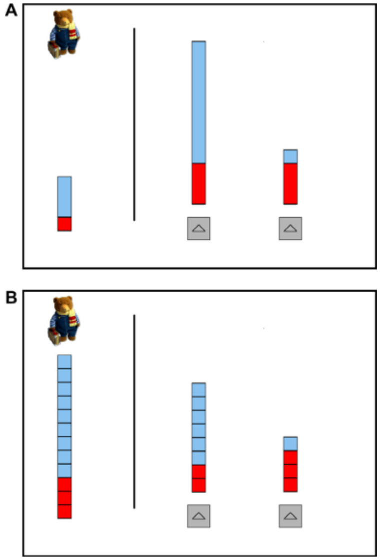
(Matthews, Lewis, & Hubbard, 2016)

Cognitive Primitive Hypothesis

- An intuitive perceptually based cognitive system for building fraction knowledge may indeed exist.
- Ratio Processing System might serve as a precursor to rational numbers
- Evidence from behavioral studies on infants, brain studies on monkeys, and adults.







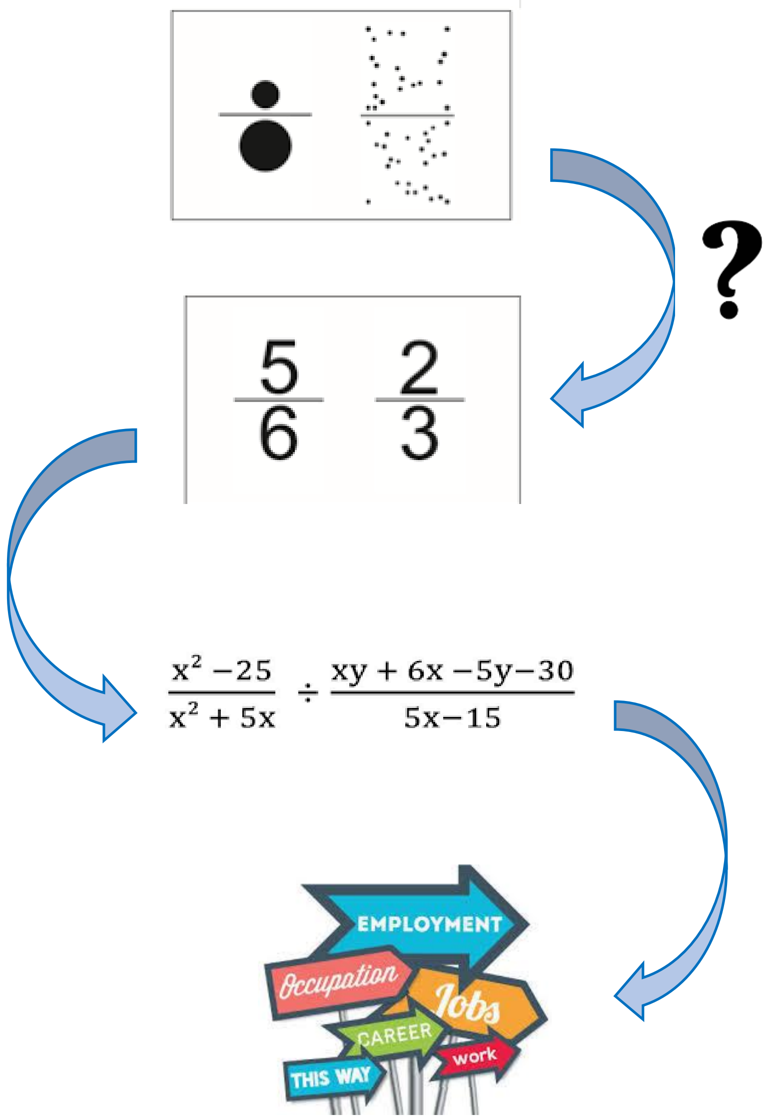
RPS and fraction concepts- HYPOTHESIS

1. Symbolic fractions and nonsymbolic ratios can be linked by both formal and informal learning experiences. These can help in fraction concepts.
2. Learners with better intrinsic RPS acuity should build more precise symbol to nonsymbol links, which promote better fraction knowledge.
3. As shown before in Jacob and Nieder's (2009) study humans process nonsymbolic ratios even when viewed passively, hence, the RPS should exert its effects on learning even when it is not an explicit pedagogical focus.

(Matthews, Lewis, & Hubbard, 2016)

Conclusion and Future Directions

- Even though there are experiments that have shown the presence of intrinsic perceptual ratio processing abilities: the presence of RPS is debatable
- For instance, in the study by Vallentin & Neider, RPS acuity in trained monkeys approximates that of adults confirming a perceptual system, however no baseline studies have been reported prior to training.
- Ultimately, additional investigation is needed to draw firm conclusions about the relations between the RPS and its relation to mathematical abilities.
- Further research on RPS and such intrinsic abilities can help us in designing effective pedagogy and instruction in schools.



Fractions and Proportions: A Didactical Perspective

Différents aspects des fractions

- Un nombre rationnel est une classe d'équivalence de couples d'entiers naturels ordonnés
- Une fraction est une representation d’un nombre rationnel

- *However, when fractions and rational numbers as applied to real-world problems are looked at from a pedagogical point of view, they take on numerous "personalities."* (Behr et al. 1992)

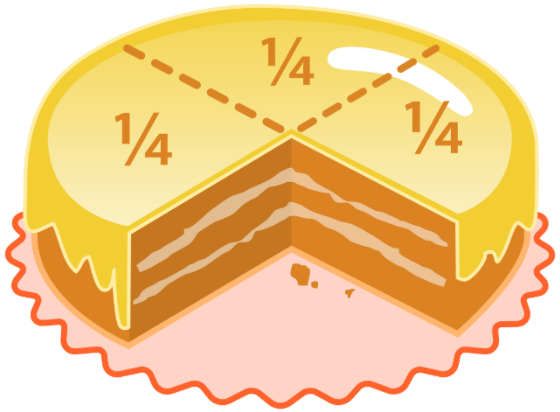
- 5 **aspects** : partie d’un tout ; mesure ; ratio ; opérateur ; quotient

- L’utilisation des fractions dans ces « *aspects* » est « *contextualisée* » et dépend de leurs représentations (parts de tartes, aires à subdiviser, collection d’objets, droite graduée, etc.) et des grandeurs en jeu (continue/discrète). (Allard, 2015)

Fraction- Partie d'un tout

- Une quantité continue ou un ensemble d'objets discrets est partitionné en un nombre de parts de taille égale.
- Fraction inférieure à 1.

$\frac{3}{4}$ d'**un** gâteau



−

- Fraction inférieure à 1
- Difficile de donner du sens à l'inverse

+

Additionner, soustraire, ordonner si les fractions se réfèrent au même tout

L'aspect le plus utilisé dans les manuels du premier degré dans plusieurs pays (Alajmi, 2012 ; Alahmadati, 2016)

Les enfants réussissent mieux les items concernant cet aspect que les items concernant les autres aspects (Alahmadati, 2016 ; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007 ; Hannula, 2003 ; Ni, 2001).

Fraction-Mesure

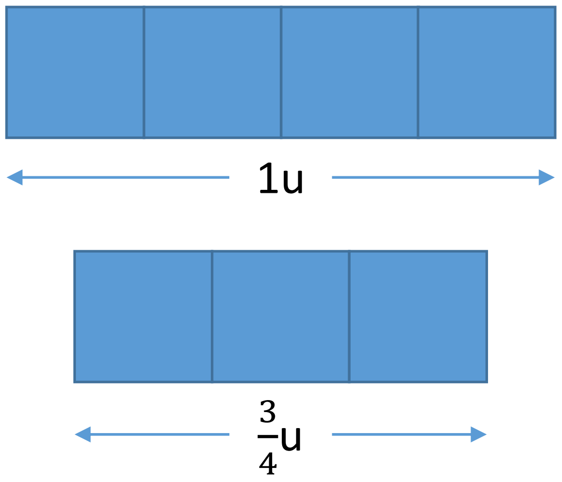
On isole une fraction simple (par exemple ¼) et on cherche à exprimer une nouvelle mesure en fonction de celle-ci : par exemple $\frac{3}{4}u = 3 \times \frac{1}{4}u$.

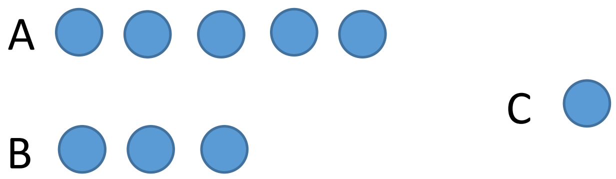
- Difficile de donner du sens à l'inverse (changement d'unité)

+ Multiplication de deux mesures mais avec changement d'unité
+ Commensuration (et donc inverse) : rapports qui mettent en relation différentes mesures

Lien avec fraction partie d'un tout
Lien avec fraction ratio

$\frac{3}{4}u$ c'est 3 fois $\frac{1}{4}$ u





$C = \frac{1}{5}A = \frac{1}{3}B$

Donc $A = \frac{5}{3}B$ et $B = \frac{3}{5}A$

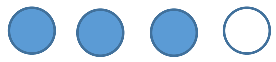
$\frac{A}{B} = \frac{5}{3}$ peut se lire A est à B ce que 5 est à 3.

Fraction-Ratio

- Un rapport de deux quantités.
- Lien étroit avec la proportionnalité

« b ième » pour la fraction –mesure
« sur » pour la fraction-ratio

3 jetons sur 4 sont bleus



La collection des voitures de Pierre est trois quarts plus grande que celle de Jean.

- *Inférieure à 1*
- *Inverse*

- Proportionnalité
- Comparer des quantités
- Comprendre la nature de la relation entre deux quantités

Lien avec la proportionnalité
Lien avec fraction mesure

Fraction-Opérateur

- La fraction opère sur une quantité.
- Le coefficient de proportionnalité dans les cas de réduction et d'agrandissement de figures peut être considéré comme un opérateur.
- Cet opérateur n'a pas de dimension et n'a pas d'unité.

¾ de 8 égal 6

Prendre les ¾ d'une collection

−

- Pas d'addition ni de soustraction
- Écriture décimale gomme les relations entre les entiers

Lien avec fraction partie-tout
Lien avec fraction-ratio
Lien avec fraction-quotient

+

- Augmentation ou diminution d'une quantité d'objets → structures multplicatives
- Inverse
- Raisonnement proportionnel
- Transition vers l'aspect quotient

Fraction-Quotient

- La fraction est le résultat d'une division.
- Fraction = nombre

$\frac{a}{b}$ c'est le nombre qui, multiplié par *b* donne *a*

¾ est le résultat de 3 divisé par 4

$\frac{3}{4}$ c'est la solution de l'équation :

$$4 \times \cdots = 3$$

Partager 3 pizzas entre 4 personnes

−

- Nécessite un travail préalable sur la multiplication et division
- Ecriture décimale

+

- Comprendre le rôle du dividende et du diviseur dans la division
- Permet d'écrire des équivalences : ½=0,5 et 2/4=0,5 donc ½=2/4
- Permet d'opérer, calculer, repérer
- Permet d'installer le statut de nombre de la fraction

Lien avec fraction partie-tout
Lien avec fraction opérateur

Liens entre les différents aspects des fractions (Kieren, 1979)

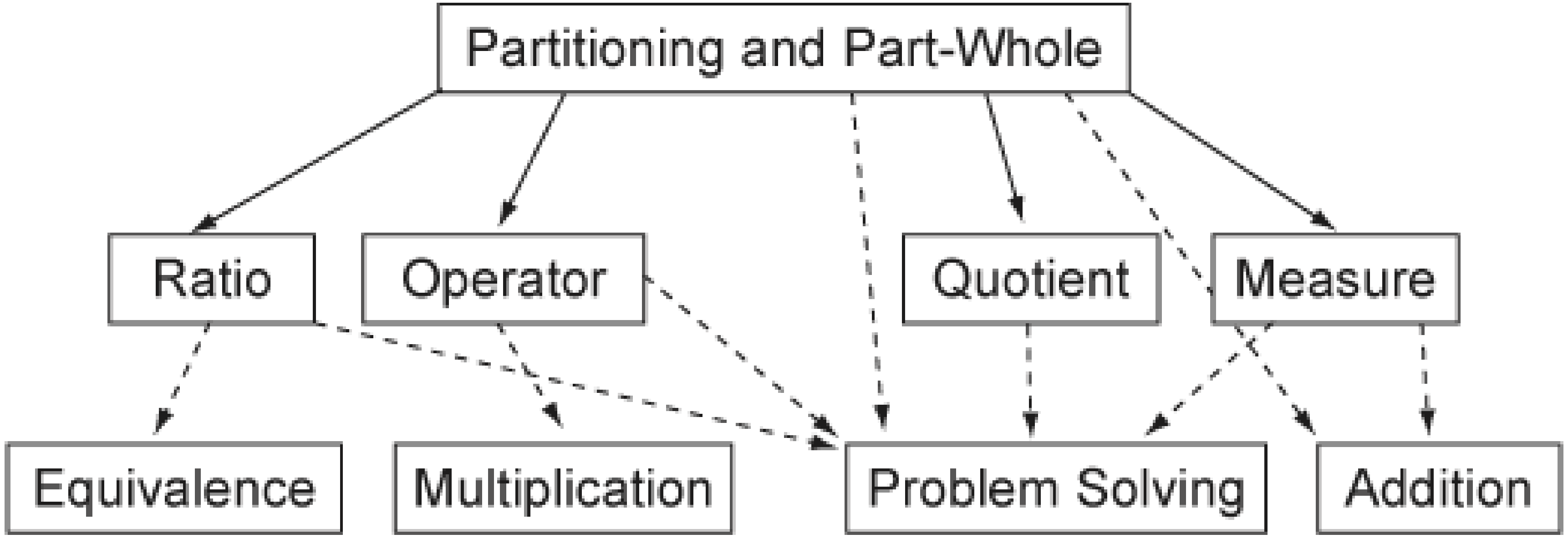
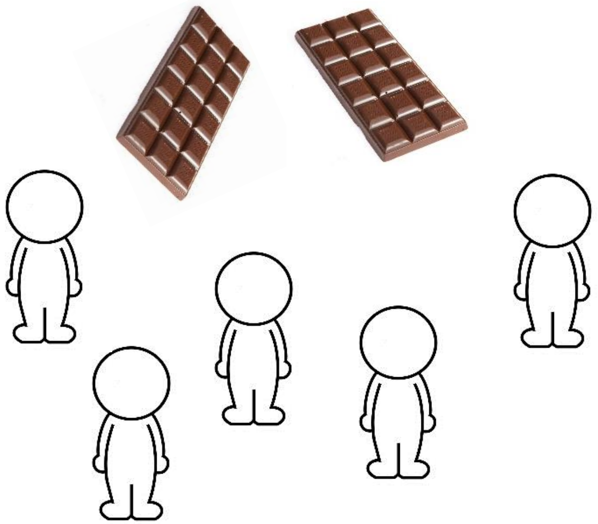


Figure 4.1 Conceptual scheme for instruction on rational numbers.

Liens entre les différents aspects des fractions (Houle, 2016)

Quotient
2 divisé par 5, on obtient le quotient 2/5.
Chaque enfant a 2/5 d'une tablette.

Partie-tout et mesure :
on partage chaque tablette en 5, chaque enfant reçoit 1/5 + 1/5 donc 2/5 d'une tablette

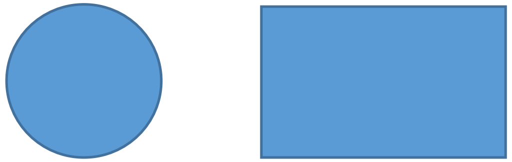


Opérateur
Une mesure initiale : 2 tablettes de chocolat, un opérateur : 1/5
et 2 × 1/5 =2/5.

Rapport :
2 tablettes pour 5 enfants = *x* tablette pour 1 enfant

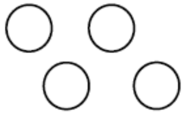
Différentes representations des fractions

Surfaces



Droite graduée

Collection d’objets



Symbolique

$$\frac{numérateur}{dénominateur}$$

Différentes representations des fractions

- Connaitre et utiliser une seule représentation limite la compréhension conceptuelle des fractions

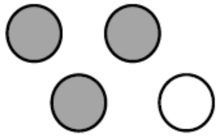
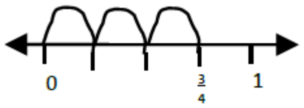
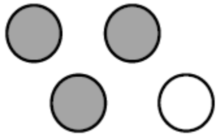
- Chaque représentation a des limites :

  - Les représentations *surface* peuvent empêcher l'apprentissage des fractions supérieures à 1 (Smith, 2002)

  - La représentation *droite numérique* "constitue un modèle difficile à manipuler pour les étudiants" (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) et placer des fractions sur la droite numérique nécessite de savoir que pour un même dénominateur, plus le numérateur est grand, plus la fraction est grande ; pour un même numérateur, plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite (Nunes, 2004).

- Il est bien établi que l'utilisation de représentations multiples améliore l'apprentissage conceptuel (Lamon, 1999; Rau, Aleven & Rummel, 2013), car les contraintes de chaque représentation peuvent être atténuées par l'exposition à d'autres.

Liens entre aspects et représentations

	Symbolic	Area/region	Number line	Sets of objects
Part-whole	3/4	 3/4 of the area is shaded	 3/4 of the number line is grey	 3/4 of the objects are shaded
Ratio	3/4	 3 out of 4 parts are shaded	 3 out of 4 parts have jumped along the number line (3 x 1/4)	 3 out of 4 objects are shaded

Des propositions d’ingénierie didactique

Travaux de Douady et Perrin-Glorian (1986)

Introduction de nouveaux nombres dans **des situations de mesure de longueur et d'aires** où les nombres entiers sont insuffisants.

Situer les nombres sur une droite graduée, ce qui permet plus facilement de les ordonner.

Situation de proportionnalité

Le produit de fractions apparaît comme la mesure de l'aire d'un rectangle.

L'écrit
conve
l'intro

Les fractions introduites comme **des mesures de longueurs**.

Travaux de Brousseau (1987)

Les écritures fractionnaires sont introduites au cours **d'une situation de comparaison de l'épaisseur de feuilles de papier.**

Utilisation dans un contexte de mesures de différentes grandeurs.

Situer les fractions décimales sur une droite graduée, en lien avec les mesures de longueur.

Le passage à l'écriture décimale s'effectue par l'introduction conventionnelle de la virgule à l'aide du table

Le pr … un
conte … ques.

La fraction par la **commensuration** c’est-à-dire la proportion de deux grandeurs de nature différente.

Des propositions de séquences

ERMEL (1997)

- construire le sens des écritures fractionnaires dans un contexte de **mesurage de longueurs de bandes**,
- de placer, sur une droite graduée, les points désignés par ces écritures,
- d'étendre à d'autres fractions, le travail sur la droite gradué,
- de privilégier les partages par 10 pour introduire les fractions décimales sur le support de la droite graduée,
- d'utiliser le tableau de numération pour introduire l'écriture à virgule.

- Comparaison des décimaux écrit sous forme décimale
- Calcul avec des décimaux

Anselmo et al. (1999) - Anselmo & Zucchetta (2018)

Séquence 1 – **Débuter avec les fractions**
Des fractions **pour mesurer** [des longeurs], un nouvel outil pour partager, fractions et graduations, écritures équivalentes, fractions décimales et nombres décimaux

Séquence 2 – **Construire le nombre décimal**
Fractions décimales, écritures décimales, fractions de surface, multiplier un décimal par un entier

Séquence 3 – **Découvrir la fraction quotient**
Division et multiplication, vers la fraction quotient, fraction-quotient

Séquence 4 – **Enrichir la multiplication**
Multiplication et longueur, multiplication et … iplication et aire

Les fractions introduites comme **des mesures de longueurs**.

Résumé

- It is a major thesis of this paper that rational numbers, from the point of view of instruction, **must be considered in all of the interpretations**. (Kieren, 1979)
- Le développement de l’interprétation de chaque fraction isolément ne conduit pas nécessairement à la compréhension des autres interprétations (Brousseau et al., 2004, Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) et pour bien comprendre les fractions, **il faut comprendre les différentes interprétations et comment elles s'articulent** (Kieren, 1979).
- **Théorie des champs conceptuels** de Vergnaud : « C’est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu’un concept acquiert du sens pour l’enfant » (Vergnaud, 1996, p. 198).

Mais **pas de consensus sur la manière d’introduire les fractions** : faut-il privilégier une interprétation, faut-il introduire les différentes interprétations simultanément ? Successivement ? Comment et quand les articuler?

→ Qu’en est-il dans l’enseignement en France ?

Préconisations actuelles des programmes en France

Introduction

Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment **pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée**. **Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel**. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes, etc. Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence. **L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales**. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en oeuvre pour les entiers) et de calcul.

Préconisations actuelles des programmes en France

Des attendus de fin de cycle 3

- Connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions additives et multiplicatives
- Connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par 1/2).
- Utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs.
- Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.
- Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs.
- Comparer deux fractions de même dénominateur.
- Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Connaître des égalités entre des fractions usuelles (exemples : 5/10 = 1/2 ; 10/100 = 1/10 ; 2/4 = 1/2)
- Utiliser des fractions pour exprimer un quotient.

Préconisations actuelles des programmes en France

Des repères de progressivité

Fractions		
Dès la **période 1** les élèves utilisent d'abord les fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs. Ils travaillent des fractions inférieures et des fractions supérieures à 1. Dès la **période 2**, les fractions décimales sont régulièrement mobilisées : elles acquièrent le statut de nombre et sont positionnées sur une droite graduée. Les élèves comparent des fractions de même dénominateur. Ils ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. Ils apprennent à écrire des fractions décimales sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1.	Dès la **période 1,** dans la continuité du CM1, les élèves étendent le registre des fractions qu'ils manipulent (en particulier $\frac{1}{1000}$) ; ils apprennent à écrire des fractions sous forme de somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.	En **période 1**, sont réactivées les fractions comme opérateurs de partage vues en CM, puis les fractions décimales en relation avec les nombres décimaux (par exemple à partir de mesures de longueurs) ; les élèves ajoutent des fractions décimales de même dénominateur. En **période 2** l'addition est étendue à des fractions de même dénominateur (inférieur ou égal à 5 et en privilégiant la vocalisation : deux cinquièmes plus un cinquième égale trois cinquièmes). En **période 3**, les élèves apprennent que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (définition du quotient de a par b).

Les élèves comparent des périmètres sans avoir recours à la mesure, **mesurent des périmètres par report d'unités et de fractions d'unités** ou par report des longueurs des côtés sur un segment de droite avec le compas.

À partir de la **période 3 (CM2)**, le symbole % est introduit dans des cas simples, en lien avec **les fractions d'une quantité** (50 % pour la moitié ; 25 % pour le quart ; 75 % pour les trois quarts ; 10 % pour le dixième).

Préconisations actuelles des programmes en France

Contenus et progression (école primaire) :

- **Étude de fractions simples** : manipulations, représentations imagées variées, équivalences simples, décomposition en « entier + rompu », additions simples

- **Etudes des fractions décimales** : représentations imagées, équivalences, décomposition en « entier + rompu », additions, écriture décimale

→ Etude des fractions pour introduire les nombres décimaux, via les fractions décimales

→ Une certaine « disparition des fractions » après l'introduction des fractions décimales

Préconisations actuelles des programmes en France

Contenus et progression (collège) :

- **Reprise de l'étude des fractions simples** : vue comme *opérateurs de partage sur des grandeurs*
- **Reprise de l'étude des fractions décimales** : notamment additions de fractions de même dénominateur (en lien avec l'étude des nombres décimaux)
- **Introduction de la fraction-quotient**

Préconisations actuelles des programmes en France

Quelle transition école-collège ? (Chambris et al., 2017)

- **École** : Fraction-partage « $\frac{a}{b}$ c'est *a b-ième* ou *a* fois 1 *b-ième* »
- **Collège** : Fraction-quotient « $\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $a \times x = b$ ou le quotient de l'entier *a* par l'entier *b* ou encore le nombre qui multiplié par *b* donne *a* ».

→ Un découpage plutôt qu'un véritable lien tissé entre les deux points de vue

→ 2 aspects centraux (partage et quotient), présence de l'aspect mesure, les autres aspects sont minoritaires : peu de place pour fraction-opérateur et pas de place explicite pour fraction-ratio

Des les manuels scolaires français (CM1-CM2)

TABLEAU 26– PRESENTATION DES SIGNIFICATIONS DE LA FRACTION LES PLUS EXPLOITEES DANS LES MANUELS SCOLAIRES DE CM1.

	Les manuels scolaires étudiés				
Les significations les plus exploitées	**O1**	**E1**	**C1**	**J1**	**T1**
Partie-tout (quantité continue)	41.84 %	22.95%	43.59%	36.24%	28.38%
Mesure	22,45%	36,07%	30,77%	15,94%	25,68%
Nombre	5,1%	15,57%	11,54%	27,54%	9,46%
Nombre sur une droite graduée	17,35%	10,66%	14,1%	0,00%	9,46%
Les significations les moins exploitées	**O1**	**E1**	**C1**	**J1**	**T1**
Opérateur	10,2%	7,38%	0,00%	8,7%	20,27%
Quotient	3,06%	4,01%	0,00%	11,59%	6,76%
Les significations absentes	**O1**	**E1**	**C1**	**J1**	**T1**
partie-tout (quantité discrète)	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Rapport	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

(Alahmadati, 2016)

Recommandations

Travaux Sciences cognitives (Siegler)

- Build on students' informal understanding of sharing and proportionality to develop initial fraction concepts.
- Help students recognize that fractions are numbers.
- Use number lines as a central representational tool from the early grades onward.
- Help students understand why procedures for computation with fractions makes sense.
- Develop students' conceptual understanding of strategies for solving ratio, rate, and proportion problems
- Professional development programs should place a high priority on improving teachers' understanding of fractions and how to teach them.

Travaux en didactique

(Chambris et. al 2017 ; Coulange & Train 2017)

- Étendre l'étude des fractions autre que simples et renforcer l'utilisation en « ième »
- Renforcer la caractérisation des quantièmes et le lien avec la division
- Renforcer point de vue opérateur : Problème du champ multiplicatif (CE2)
- Renforcer le travail sur les équivalences à partir de mesures de grandeurs
- Renforcer point de vue mesure avec la commensuration ; lien avec fraction-quotient

Un jeu vidéo didactique pour l’apprentissage des fractions

Game based Learning

- Benefits include increase in motivation, satisfaction, and reinforcement of mastery skills.
- Some video-games have shown 40% increase in learning outcomes over a lecture (Mayo, 2009)

- Interactive computer technology showed an effect on mathematics achievement in children with behavioral problems from disadvantaged backgrounds (Laffey, Espinosa, Moore, & Lodree, 2003).

- RCT on preschoolers showed the effectiveness of a number game on spatial mapping of numbers and mental calculation in children in the training group (Sella, Tressoldi, Lucangeli, & Zorzi, 2016)
- An open trial study on children with dyscalculia led to improvements on number comparison, subitizing, and subtraction tasks (Wilson, Revkin, Cohen, Cohen, & Dehaene, 2006).

- Few games on rational numbers and fewer on Fractions

Définition *jeu vidéo didactique*

- Nous appelons *jeu vidéo didactique* un jeu vidéo sérieux avec les critères suivants (Zarpas & Gardes, 2019):

  - les situations d'apprentissage et les situations de jeu sont conçues ensemble, intégrées dans un même *Game Play* ;

  - les situations d'apprentissage sont pensées à partir d'analyses didactiques *a priori* des contenus et des actions possibles du joueur.

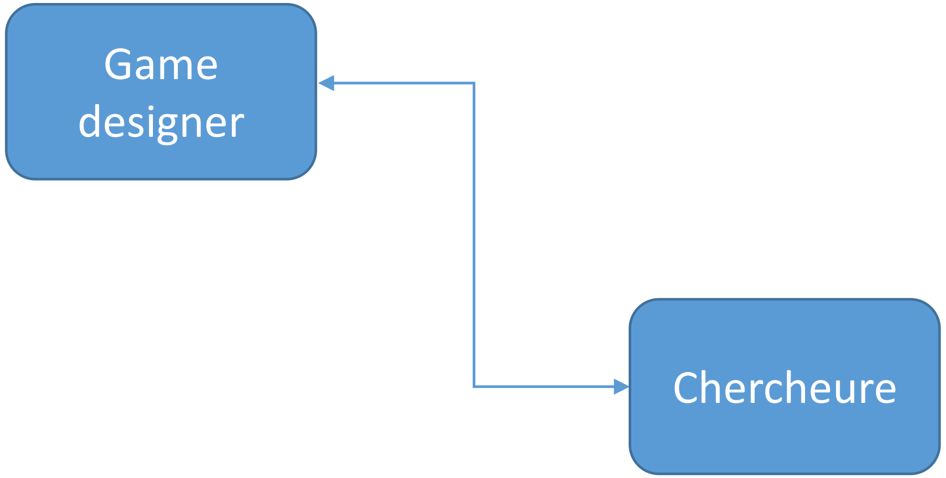
- La conception d'un tel jeu nécessite alors un travail conjoint entre un professionnel du jeu vidéo et un professionnel de l'éducation.

Maths Mathews Fractions

Elaboration du jeu

D'un point de vue didactique :

- Plusieurs aspects des fractions travaillés : *partage, mesure, quotient et opérateur / ratio*
- Plusieurs représentations utilisées : *grandeurs (longueurs, surfaces), droite graduée, collections d'objets, symbolique*
- Travailler les attendus du cycle 3



D'un point de vue ludique :

- Avancée dans le jeu via un récit
- Combattre des ennemis
- Engagement ludique

D'un point de vue ludique et didactique :

- Un équilibre entre les phases de jeu « pur » et de jeu « apprentissage »
- Une progression ludique et une progression didactique imbriquée

Présentation du jeu

- 13 modules = des situations mathématiques et ludiques
- 12 niveaux contenant chacun une dizaine de modules
- Un parcours linéaire de jeu (avec quelques modules « cachés »)
- Le calibrage des niveaux et leur articulation, la répartition et l'ordre des modules ont été élaborés en choisissant **différentes valeurs de variables** pour garantir une progression didactique et une progression dans l'ensemble du jeu.

Les situations didactiques et ludiques

Des types de tâches

- Reconstituer des disques avec des secteurs angulaires

Associer
- Associer une longueur et une fraction.
- Associer une surface et une fraction.
- Associer une fraction et un repère sur une droite graduée.

Comparer
- Ranger des fractions dans l'ordre croissant.
- Trouver une fraction équivalente.

Calculer
- Additionner deux fractions.
- Résoudre des problèmes « fraction d'une quantité »

Des compétences du cycle 3

- Faire des liens entre différentes représentations des fractions
- Utiliser des fractions pour faire des partages de grandeurs
- Utiliser des fractions pour mesurer des grandeurs
- Utiliser des fractions en tant que nombre
- Repérer des fractions sur une demi-droite graduée
- Placer des fractions sur une demi-droite graduée
- Etablir une égalité entre deux fractions simples
- Comparer deux fractions simples
- Ranger des fractions dans l'ordre croissant/décroissant
- Additionner des fractions de même dénominateur
- Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples

Un projet en cours

- **Objectif** : évaluer les effets de l'utilisation du jeu sur l'apprentissage des fractions (au cycle 3)

- **Hypothèses** :

Peut favoriser les **apprentissages** car :

1. Différents aspects et représentations des fractions ;
2. Différents types de tâches sont répétés avec feed-back immédiats ;
3. chaque élève peut avancer à son propre rythme.

Peut être un support pertinent pour l'**enseignement** des fractions car :

1. prise en charge de la progression didactique ;
2. possibilité d'apporter des aides personnalisées aux élèves sur un module spécifique.

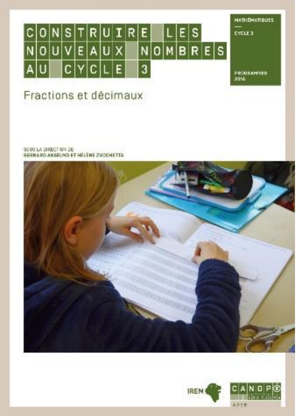
Design de l’expérimentation

- **Participants** : 2 classes de CM2 ; 2 classes de CM1 ; 2 classes de CM1-CM2
- **Deux groupes** : 1 témoin / 1 expérimental

Pré-tests

*Anxiété
*Fluence calcul
*Fractions

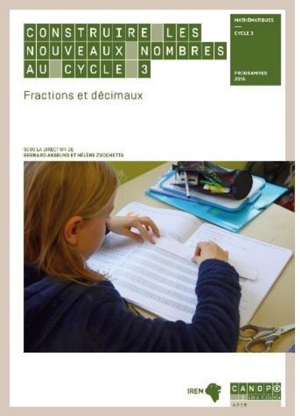
5 Séances *livre*



1 Séance *jeu*

1 Séance *Exercices*

5 Séances *livre*



3 Séances *jeu*

3 Séances *Exercices*

Post-tests

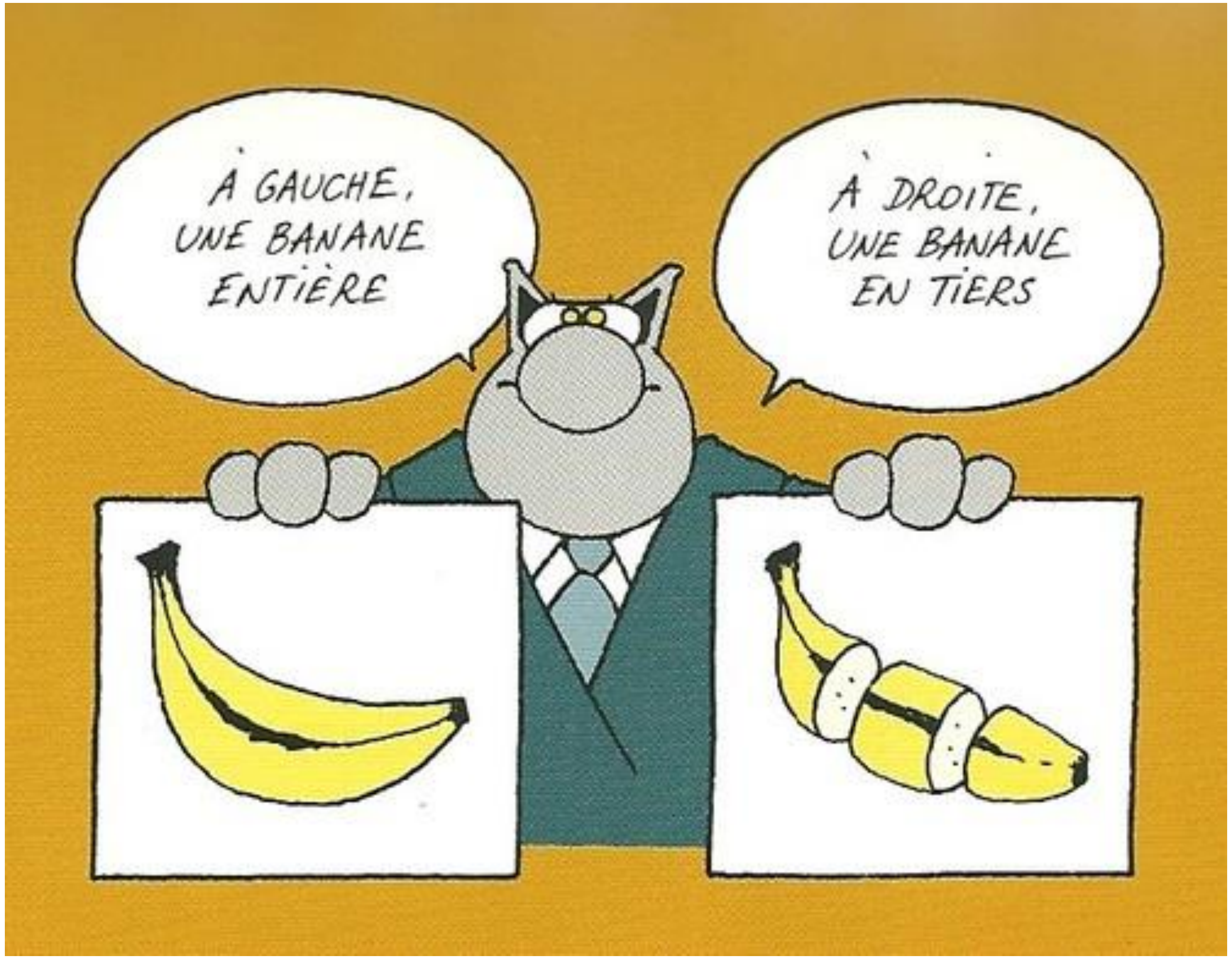
*Anxiété
*Fluence calcul
*Fractions

Séances *Décimaux*

Pré-tests

*Anxiété
*Fluence calcul
*Fractions

Résultats prévus prochainement !



Regards croisés en sciences cognitives et didactique des mathématiques sur le nombre : *le cas des fractions*

Marie-Line Gardes
Parnika Bhatia
Institut des Sciences Cognitives – UMR 5304
CNRS et Université de Lyon

Merci

Vergnaud

Un concept est un triplet composé de trois sous-ensembles C = (S, I, L)

- S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)
- I : l'ensemble des invariants sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes (le signifié)
- L : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

Etudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois.

« Considérons en premier lieu un champ conceptuel comme un ensemble de situations. Par exemple, pour le champ conceptuel des structures additives, l'ensemble des situations qui demandent une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations, et pour les structures multiplicatives, l'ensemble des situations qui demandent une multiplication, une division ou une combinaison de telles opérations. »

(Vergnaud 1990, p. 147)