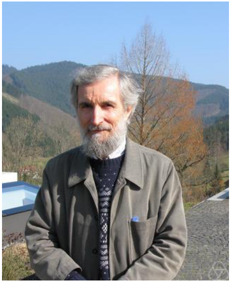
# Quelques éléments caractéristiques de la théorie des types de Martin-Löf

G. Wallet

Laboratoire de Mathematiques, Image et Applications
Université de La Rochelle

Journées bisontines
de didactique et d'épistémologie
le 16 et le 17 avril 2015

# Per Martin-Löf



Per Martin-Löf est un logicien, philosophe et mathématicien suédois né en 1942. Elève de Andrey Kolmogorov, il est internationalement reconnu pour ses travaux en fondement des probabilités, statistiques, logique mathématique et informatique mais aussi en philosophie de la logique.

# Actualité de la théorie des types de Martin-Löf

- La théorie des types de Martin-Löf ($\mathcal{T}$ dans la suite) est apparue en 1972 et depuis, elle n'a cessé d'être modifiée et enrichie tout conservant l'essentiel de ses traits.
- La fonction initiale de $\mathcal{T}$ est d'être un fondement formel pour les mathématiques constructives, de même que ZFC est un fondement formel pour les mathématiques classiques.
- L'un des titres de gloire de $\mathcal{T}$ est d'être le cadre théorique qui a permis de concevoir les assistants de preuves pour les mathématiques comme le langage Coq.
- Enfin, $\mathcal{T}$ est l'objet d'un regain d'intérêt du fait de la découverte récente d'un étonnant lien structurel entre elle et la théorie abstraite de l'homotopie. Cela conduit à un nouveau fondement pour les mathématiques classiques et constructives : Univalent Fondations of Mathematics proposées par V. Voevodsky, T. Coquand, S. Awodey.

# Actualité de la théorie des types de Martin-Löf

- La théorie des types de Martin-Löf ($\mathcal{T}$ dans la suite) est apparue en 1972 et depuis, elle n'a cessé d'être modifiée et enrichie tout conservant l'essentiel de ses traits.
- La fonction initiale de $\mathcal{T}$ est d'être un fondement formel pour les mathématiques constructives, de même que ZFC est un fondement formel pour les mathématiques classiques.
- L'un des titres de gloire de $\mathcal{T}$ est d'être le cadre théorique qui a permis de concevoir les assistants de preuves pour les mathématiques comme le langage Coq.
- Enfin, $\mathcal{T}$ est l'objet d'un regain d'intérêt du fait de la découverte récente d'un étonnant lien structurel entre elle et la théorie abstraite de l'homotopie. Cela conduit à un nouveau fondement pour les mathématiques classiques et constructives : Univalent Fondations of Mathematics proposées par V. Voevodsky, T. Coquand, S. Awodey.

# Actualité de la théorie des types de Martin-Löf

- La théorie des types de Martin-Löf ($\mathcal{T}$ dans la suite) est apparue en 1972 et depuis, elle n'a cessé d'être modifiée et enrichie tout conservant l'essentiel de ses traits.
- La fonction initiale de $\mathcal{T}$ est d'être un fondement formel pour les mathématiques constructives, de même que ZFC est un fondement formel pour les mathématiques classiques.
- L'un des titres de gloire de $\mathcal{T}$ est d'être le cadre théorique qui a permis de concevoir les assistants de preuves pour les mathématiques comme le langage Coq.
- Enfin, $\mathcal{T}$ est l'objet d'un regain d'intérêt du fait de la découverte récente d'un étonnant lien structurel entre elle et la théorie abstraite de l'homotopie. Cela conduit à un nouveau fondement pour les mathématiques classiques et constructives : Univalent Fondations of Mathematics proposées par V. Voevodsky, T. Coquand, S. Awodey.

# Actualité de la théorie des types de Martin-Löf

- La théorie des types de Martin-Löf ($\mathcal{T}$ dans la suite) est apparue en 1972 et depuis, elle n'a cessé d'être modifiée et enrichie tout conservant l'essentiel de ses traits.
- La fonction initiale de $\mathcal{T}$ est d'être un fondement formel pour les mathématiques constructives, de même que ZFC est un fondement formel pour les mathématiques classiques.
- L'un des titres de gloire de $\mathcal{T}$ est d'être le cadre théorique qui a permis de concevoir les assistants de preuves pour les mathématiques comme le langage Coq.
- Enfin, $\mathcal{T}$ est l'objet d'un regain d'intérêt du fait de la découverte récente d'un étonnant lien structurel entre elle et la théorie abstraite de l'homotopie. Cela conduit à un nouveau fondement pour les mathématiques classiques et constructives : Univalent Fondations of Mathematics proposées par V. Voevodsky, T. Coquand, S. Awodey.

# Actualité de la théorie des types de Martin-Löf

- La théorie des types de Martin-Löf ($\mathcal{T}$ dans la suite) est apparue en 1972 et depuis, elle n'a cessé d'être modifiée et enrichie tout conservant l'essentiel de ses traits.
- La fonction initiale de $\mathcal{T}$ est d'être un fondement formel pour les mathématiques constructives, de même que ZFC est un fondement formel pour les mathématiques classiques.
- L'un des titres de gloire de $\mathcal{T}$ est d'être le cadre théorique qui a permis de concevoir les assistants de preuves pour les mathématiques comme le langage Coq.
- Enfin, $\mathcal{T}$ est l'objet d'un regain d'intérêt du fait de la découverte récente d'un étonnant lien structurel entre elle et la théorie abstraite de l'homotopie. Cela conduit à un nouveau fondement pour les mathématiques classiques et constructives : Univalent Fondations of Mathematics proposées par V. Voevodsky, T. Coquand, S. Awodey.

# Plan de l'exposé

# Plan de l'exposé

1. Proposition, jugement et preuve
   - Syntaxe et sens
   - Proposition et vérité
   - Jugement et preuve
2. La théorie intuitionniste des types $\mathcal{T}$
   - Type et jugement dans $\mathcal{T}$
   - La place de la logique dans $\mathcal{T}$
   - Le traitement de l'égalité dans $\mathcal{T}$

# Plan de l'exposé

1. Proposition, jugement et preuve
   - Syntaxe et sens
   - Proposition et vérité
   - Jugement et preuve
2. La théorie intuitionniste des types $\mathcal{T}$
   - Type et jugement dans $\mathcal{T}$
   - La place de la logique dans $\mathcal{T}$
   - Le traitement de l'égalité dans $\mathcal{T}$

- Dans cette section, on se propose de présenter le travail de clarification philosophique que Martin-Löf a fait à propos de notions les plus basiques intervenant dans un langage formel portant sur les mathématiques.
- La question posée est de savoir comment on donne du sens à des entités syntaxiques dans un langage formel.
- La position de Martin-Löf est intuitionniste en ce qu'elle prône la primauté absolue du sens sur toute autre considération.
- Mais cette position se démarque de celle de Brouwer en ce qu'elle reconnait le caractère indispensable de la médiation d'un langage : l'accès à des objets mathématiques se fait nécessairement par l'intermédiaire d'un langage.

- Dans cette section, on se propose de présenter le travail de clarification philosophique que Martin-Löf a fait à propos de notions les plus basiques intervenant dans un langage formel portant sur les mathématiques.
- La question posée est de savoir comment on donne du sens à des entités syntaxiques dans un langage formel.
- La position de Martin-Löf est intuitionniste en ce qu'elle prône la primauté absolue du sens sur toute autre considération.
- Mais cette position se démarque de celle de Brouwer en ce qu'elle reconnait le caractère indispensable de la médiation d'un langage : l'accès à des objets mathématiques se fait nécessairement par l'intermédiaire d'un langage.

- Dans cette section, on se propose de présenter le travail de clarification philosophique que Martin-Löf a fait à propos de notions les plus basiques intervenant dans un langage formel portant sur les mathématiques.
- La question posée est de savoir comment on donne du sens à des entités syntaxiques dans un langage formel.
- La position de Martin-Löf est intuitionniste en ce qu'elle prône la primauté absolue du sens sur toute autre considération.
- Mais cette position se démarque de celle de Brouwer en ce qu'elle reconnait le caractère indispensable de la médiation d'un langage : l'accès à des objets mathématiques se fait nécessairement par l'intermédiaire d'un langage.

- Dans cette section, on se propose de présenter le travail de clarification philosophique que Martin-Löf a fait à propos de notions les plus basiques intervenant dans un langage formel portant sur les mathématiques.
- La question posée est de savoir comment on donne du sens à des entités syntaxiques dans un langage formel.
- La position de Martin-Löf est intuitionniste en ce qu'elle prône la primauté absolue du sens sur toute autre considération.
- Mais cette position se démarque de celle de Brouwer en ce qu'elle reconnait le caractère indispensable de la médiation d'un langage : l'accès à des objets mathématiques se fait nécessairement par l'intermédiaire d'un langage.

- Dans cette section, on se propose de présenter le travail de clarification philosophique que Martin-Löf a fait à propos de notions les plus basiques intervenant dans un langage formel portant sur les mathématiques.
- La question posée est de savoir comment on donne du sens à des entités syntaxiques dans un langage formel.
- La position de Martin-Löf est intuitionniste en ce qu'elle prône la primauté absolue du sens sur toute autre considération.
- Mais cette position se démarque de celle de Brouwer en ce qu'elle reconnait le caractère indispensable de la médiation d'un langage : l'accès à des objets mathématiques se fait nécessairement par l'intermédiaire d'un langage.

- Pour exprimer un objet mathématique, on fait usage d'une expression dans un langage. On dit que l'objet mathématique est l'interprétation de l'expression linguistique considérée.
- L'expression est une entité linguistique qui est en elle-même un objet.
- L'opération d'attribution d'un objet mathématique à une expression linguistique peut être considérée comme une opération de traduction d'un langage, celui des objets linguistiques, dans celui des objets mathématiques.
- A propos du même assemblage de symboles, on peut voir un objet mathématique ou un objet linguistique. Ce n'est qu'une question de point de vue de celui qui observe cet assemblage. Cette dualité ontologique est parfois utilisée dans la pratique des mathématiques.

- Pour exprimer un objet mathématique, on fait usage d'une expression dans un langage. On dit que l'objet mathématique est l'interprétation de l'expression linguistique considérée.
- L'expression est une entité linguistique qui est en elle-même un objet.
- L'opération d'attribution d'un objet mathématique à une expression linguistique peut être considérée comme une opération de traduction d'un langage, celui des objets linguistiques, dans celui des objets mathématiques.
- A propos du même assemblage de symboles, on peut voir un objet mathématique ou un objet linguistique. Ce n'est qu'une question de point de vue de celui qui observe cet assemblage. Cette dualité ontologique est parfois utilisée dans la pratique des mathématiques.

- Pour exprimer un objet mathématique, on fait usage d'une expression dans un langage. On dit que l'objet mathématique est l'interprétation de l'expression linguistique considérée.
- L'expression est une entité linguistique qui est en elle-même un objet.
- L'opération d'attribution d'un objet mathématique à une expression linguistique peut être considérée comme une opération de traduction d'un langage, celui des objets linguistiques, dans celui des objets mathématiques.
- A propos du même assemblage de symboles, on peut voir un objet mathématique ou un objet linguistique. Ce n'est qu'une question de point de vue de celui qui observe cet assemblage. Cette dualité ontologique est parfois utilisée dans la pratique des mathématiques.

- Pour exprimer un objet mathématique, on fait usage d'une expression dans un langage. On dit que l'objet mathématique est l'interprétation de l'expression linguistique considérée.
- L'expression est une entité linguistique qui est en elle-même un objet.
- L'opération d'attribution d'un objet mathématique à une expression linguistique peut être considérée comme une opération de traduction d'un langage, celui des objets linguistiques, dans celui des objets mathématiques.
- A propos du même assemblage de symboles, on peut voir un objet mathématique ou un objet linguistique. Ce n'est qu'une question de point de vue de celui qui observe cet assemblage. Cette dualité ontologique est parfois utilisée dans la pratique des mathématiques.

- Pour exprimer un objet mathématique, on fait usage d'une expression dans un langage. On dit que l'objet mathématique est l'interprétation de l'expression linguistique considérée.
- L'expression est une entité linguistique qui est en elle-même un objet.
- L'opération d'attribution d'un objet mathématique à une expression linguistique peut être considérée comme une opération de traduction d'un langage, celui des objets linguistiques, dans celui des objets mathématiques.
- A propos du même assemblage de symboles, on peut voir un objet mathématique ou un objet linguistique. Ce n'est qu'une question de point de vue de celui qui observe cet assemblage. Cette dualité ontologique est parfois utilisée dans la pratique des mathématiques.

- Mais lorsque l'on considère les notions les plus basiques d'un langage (formalisé ou non), l'attribution de sens ne peut pas se faire sur le mode de la traduction.
- Pour éclairer ce point, il faut entrer dans une entreprise d'une toute autre nature : une entreprise philosophique ou phénoménologique.
- C'est ce qu'a fait Martin-Löf à propos des notions basiques de la logique. Ce sont les notions de proposition, de vérité d'une proposition, de jugement et de preuve d'un jugement.

- Mais lorsque l'on considère les notions les plus basiques d'un langage (formalisé ou non), l'attribution de sens ne peut pas se faire sur le mode de la traduction.
- Pour éclairer ce point, il faut entrer dans une entreprise d'une toute autre nature : une entreprise philosophique ou phénoménologique.
- C'est ce qu'a fait Martin-Löf à propos des notions basiques de la logique. Ce sont les notions de proposition, de vérité d'une proposition, de jugement et de preuve d'un jugement.

- Mais lorsque l'on considère les notions les plus basiques d'un langage (formalisé ou non), l'attribution de sens ne peut pas se faire sur le mode de la traduction.
- Pour éclairer ce point, il faut entrer dans une entreprise d'une toute autre nature : une entreprise philosophique ou phénoménologique.
- C'est ce qu'a fait Martin-Löf à propos des notions basiques de la logique. Ce sont les notions de proposition, de vérité d'une proposition, de jugement et de preuve d'un jugement.

- Mais lorsque l'on considère les notions les plus basiques d'un langage (formalisé ou non), l'attribution de sens ne peut pas se faire sur le mode de la traduction.
- Pour éclairer ce point, il faut entrer dans une entreprise d'une toute autre nature : une entreprise philosophique ou phénoménologique.
- C'est ce qu'a fait Martin-Löf à propos des notions basiques de la logique. Ce sont les notions de proposition, de vérité d'une proposition, de jugement et de preuve d'un jugement.

# Plan de l'exposé

- Dans les mathématiques, le genre de choses que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont identifiées par les logiciens comme les propositions.
- Dans les mathématiques classiques, les entités qui correspondent aux propositions sont les formules mais ces dernières ne sont que des objets syntaxiques.
- Au contraire, l'intuitionnisme préfère mettre en avant le sens. Par exemple :
  - D'après Heyting, une proposition exprime une attente, une intention.
  - Pour Kolmogorov, une proposition exprime un problème, une tâche.

- Dans les mathématiques, le genre de choses que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont identifiées par les logiciens comme les propositions.
- Dans les mathématiques classiques, les entités qui correspondent aux propositions sont les formules mais ces dernières ne sont que des objets syntaxiques.
- Au contraire, l'intuitionnisme préfère mettre en avant le sens. Par exemple :
  - D'après Heyting, une proposition exprime une attente, une intention.
  - Pour Kolmogorov, une proposition exprime un problème, une tâche.

- Dans les mathématiques, le genre de choses que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont identifiées par les logiciens comme les propositions.
- Dans les mathématiques classiques, les entités qui correspondent aux propositions sont les formules mais ces dernières ne sont que des objets syntaxiques.
- Au contraire, l'intuitionnisme préfère mettre en avant le sens. Par exemple :
  - D'après Heyting, une proposition exprime une attente, une intention.
  - Pour Kolmogorov, une proposition exprime un problème, une tâche.

- Dans les mathématiques, le genre de choses que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont identifiées par les logiciens comme les propositions.
- Dans les mathématiques classiques, les entités qui correspondent aux propositions sont les formules mais ces dernières ne sont que des objets syntaxiques.
- Au contraire, l'intuitionnisme préfère mettre en avant le sens. Par exemple :
  - D'après Heyting, une proposition exprime une attente, une intention.
  - Pour Kolmogorov, une proposition exprime un problème, une tâche.

- Dans les mathématiques, le genre de choses que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont identifiées par les logiciens comme les propositions.
- Dans les mathématiques classiques, les entités qui correspondent aux propositions sont les formules mais ces dernières ne sont que des objets syntaxiques.
- Au contraire, l'intuitionnisme préfère mettre en avant le sens. Par exemple :
  - D'après Heyting, une proposition exprime une attente, une intention.
  - Pour Kolmogorov, une proposition exprime un problème, une tâche.

- Dans les mathématiques, le genre de choses que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont identifiées par les logiciens comme les propositions.
- Dans les mathématiques classiques, les entités qui correspondent aux propositions sont les formules mais ces dernières ne sont que des objets syntaxiques.
- Au contraire, l'intuitionnisme préfère mettre en avant le sens. Par exemple :
  - D'après Heyting, une proposition exprime une attente, une intention.
  - Pour Kolmogorov, une proposition exprime un problème, une tâche.

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x) A(x)$
  - $(\forall x) A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x) A(x)$
  - $(\forall x) A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

Des exemples de propositions que l'on rencontre dans la pratique des mathématiques :

- la proposition absurde : $\perp$
- Sachant que $A$ et $B$ sont des propositions :
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \Rightarrow B$
  - $(\exists x)A(x)$
  - $(\forall x)A(x)$
- Des propositions arithmétiques :
  - $(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$
  - $\neg(\exists x \in \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ (l'un des axiomes de Peano)

# Qu'est-ce qu'une proposition ?

- Voici une réponse générale qui pourrait satisfaire tout autant les tenants de la logique classique (Wittgenstein, Frege) et ceux de la logique intuitionniste (Heyting, Kolmogorov) :
  - L'explication d'une proposition est donnée par l'expression de ces conditions de vérité.
- C'est au niveau de la définition de ces conditions de vérité que se fait la différence entre le point de vue classique et le point de vue intuitionniste :
  - La logique classique postule que toute proposition est d'emblée affectée d'une valeur de vérité : pour toute proposition $A$, la proposition $A \vee \neg A$ est vraie (principe du tiers exclu).
  - L'intuitionnisme rejette le tiers exclu et pose qu'une proposition n'est vraie que si l'on en possède une preuve.
- Tout ce qui précède date des années 30. L'un des apports de Martin-Löf consiste à adapter au cadre intuitionniste une idée de Gentzen.

# Qu'est-ce qu'une proposition ?

- Voici une réponse générale qui pourrait satisfaire tout autant les tenants de la logique classique (Wittgenstein, Frege) et ceux de la logique intuitionniste (Heyting, Kolmogorov) :
  - L'explication d'une proposition est donnée par l'expression de ces conditions de vérité.
- C'est au niveau de la définition de ces conditions de vérité que se fait la différence entre le point de vue classique et le point de vue intuitionniste :
  - La logique classique postule que toute proposition est d'emblée affectée d'une valeur de vérité : pour toute proposition $A$, la proposition $A \vee \neg A$ est vraie (principe du tiers exclu).
  - L'intuitionnisme rejette le tiers exclu et pose qu'une proposition n'est vraie que si l'on en possède une preuve.
- Tout ce qui précède date des années 30. L'un des apports de Martin-Löf consiste à adapter au cadre intuitionniste une idée de Gentzen.

# Qu'est-ce qu'une proposition ?

- Voici une réponse générale qui pourrait satisfaire tout autant les tenants de la logique classique (Wittgenstein, Frege) et ceux de la logique intuitionniste (Heyting, Kolmogorov) :
  - L'explication d'une proposition est donnée par l'expression de ces conditions de vérité.
- C'est au niveau de la définition de ces conditions de vérité que se fait la différence entre le point de vue classique et le point de vue intuitionniste :
  - La logique classique postule que toute proposition est d'emblée affectée d'une valeur de vérité : pour toute proposition $A$, la proposition $A \vee \neg A$ est vraie (principe du tiers exclu).
  - L'intuitionnisme rejette le tiers exclu et pose qu'une proposition n'est vraie que si l'on en possède une preuve.
- Tout ce qui précède date des années 30. L'un des apports de Martin-Löf consiste à adapter au cadre intuitionniste une idée de Gentzen.

# Qu'est-ce qu'une proposition ?

- Voici une réponse générale qui pourrait satisfaire tout autant les tenants de la logique classique (Wittgenstein, Frege) et ceux de la logique intuitionniste (Heyting, Kolmogorov) :
  - L'explication d'une proposition est donnée par l'expression de ces conditions de vérité.
- C'est au niveau de la définition de ces conditions de vérité que se fait la différence entre le point de vue classique et le point de vue intuitionniste :
  - La logique classique postule que toute proposition est d'emblée affectée d'une valeur de vérité : pour toute proposition $A$, la proposition $A \vee \neg A$ est vraie (principe du tiers exclu).
  - L'intuitionnisme rejette le tiers exclu et pose qu'une proposition n'est vraie que si l'on en possède une preuve.
- Tout ce qui précède date des années 30. L'un des apports de Martin-Löf consiste à adapter au cadre intuitionniste une idée de Gentzen.

# Qu'est-ce qu'une proposition ?

- Voici une réponse générale qui pourrait satisfaire tout autant les tenants de la logique classique (Wittgenstein, Frege) et ceux de la logique intuitionniste (Heyting, Kolmogorov) :
  - L'explication d'une proposition est donnée par l'expression de ces conditions de vérité.
- C'est au niveau de la définition de ces conditions de vérité que se fait la différence entre le point de vue classique et le point de vue intuitionniste :
  - La logique classique postule que toute proposition est d'emblée affectée d'une valeur de vérité : pour toute proposition $A$, la proposition $A \vee \neg A$ est vraie (principe du tiers exclu).
  - L'intuitionnisme rejette le tiers exclu et pose qu'une proposition n'est vraie que si l'on en possède une preuve.
- Tout ce qui précède date des années 30. L'un des apports de Martin-Löf consiste à adapter au cadre intuitionniste une idée de Gentzen.

# Qu'est-ce qu'une proposition ?

- Voici une réponse générale qui pourrait satisfaire tout autant les tenants de la logique classique (Wittgenstein, Frege) et ceux de la logique intuitionniste (Heyting, Kolmogorov) :
  - L'explication d'une proposition est donnée par l'expression de ces conditions de vérité.
- C'est au niveau de la définition de ces conditions de vérité que se fait la différence entre le point de vue classique et le point de vue intuitionniste :
  - La logique classique postule que toute proposition est d'emblée affectée d'une valeur de vérité : pour toute proposition $A$, la proposition $A \vee \neg A$ est vraie (principe du tiers exclu).
  - L'intuitionnisme rejette le tiers exclu et pose qu'une proposition n'est vraie que si l'on en possède une preuve.
- Tout ce qui précède date des années 30. L'un des apports de Martin-Löf consiste à adapter au cadre intuitionniste une idée de Gentzen.

# Qu'est-ce qu'une proposition ?

- Voici une réponse générale qui pourrait satisfaire tout autant les tenants de la logique classique (Wittgenstein, Frege) et ceux de la logique intuitionniste (Heyting, Kolmogorov) :
  - L'explication d'une proposition est donnée par l'expression de ces conditions de vérité.
- C'est au niveau de la définition de ces conditions de vérité que se fait la différence entre le point de vue classique et le point de vue intuitionniste :
  - La logique classique postule que toute proposition est d'emblée affectée d'une valeur de vérité : pour toute proposition $A$, la proposition $A \vee \neg A$ est vraie (principe du tiers exclu).
  - L'intuitionnisme rejette le tiers exclu et pose qu'une proposition n'est vraie que si l'on en possède une preuve.
- Tout ce qui précède date des années 30. L'un des apports de Martin-Löf consiste à adapter au cadre intuitionniste une idée de Gentzen.

# Les règles de Gentzen

- Gerhard Gentzen (1909-1945, grand mathématicien et logicien allemand lourdement compromis avec le nazisme) a suggéré que le sens des constantes logiques est donné par les règles dites d'introduction.
- En fait, il a introduit des règles duales, les règles d'introduction et les règles d'élimination, qui régissent l'utilisation des constantes logiques. Par exemple, la règle d'introduction pour $\wedge$ est :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

alors que les règles d'éliminations pour cette même constante sont :

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \text{et} \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

# Les règles de Gentzen

- Gerhard Gentzen (1909-1945, grand mathématicien et logicien allemand lourdement compromis avec le nazisme) a suggéré que le sens des constantes logiques est donné par les règles dites d'introduction.
- En fait, il a introduit des règles duales, les règles d'introduction et les règles d'élimination, qui régissent l'utilisation des constantes logiques. Par exemple, la règle d'introduction pour $\wedge$ est :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

alors que les règles d'éliminations pour cette même constante sont :

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \text{et} \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

# Les règles de Gentzen

- Gerhard Gentzen (1909-1945, grand mathématicien et logicien allemand lourdement compromis avec le nazisme) a suggéré que le sens des constantes logiques est donné par les règles dites d'introduction.
- En fait, il a introduit des règles duales, les règles d'introduction et les règles d'élimination, qui régissent l'utilisation des constantes logiques. Par exemple, la règle d'introduction pour $\wedge$ est :

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

alors que les règles d'éliminations pour cette même constante sont :

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \text{et} \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

- Avec Martin-Löf, on modifie un peu ces règles, ce qui donne pour la $\wedge$-introduction :
$$\frac{A \text{ vrai} \quad B \text{ vrai}}{A \wedge B \text{ vrai}}$$
- que l'on précise en introduisant les preuves :
$$\frac{a \text{ preuve de } A \quad b \text{ preuve de } B}{(a, b) \text{ preuve de } A \wedge B}$$
- Ainsi précisées, les règles d'introduction donnent pour chaque constante logique la forme de ses preuves canoniques. Par exemple, une preuve canonique d'une proposition $A \wedge B$ est de la forme $(a, b)$ où $a$ est une preuve de $A$ et $b$ une preuve de $B$.
- Pour Martin-Löf, le sens d'une constante logique est expliqué (est explicité) par la forme de ses preuves canoniques. Ceci se généralise à toute proposition.

- Avec Martin-Löf, on modifie un peu ces règles, ce qui donne pour la $\wedge$-introduction :

$$\frac{A \text{ vrai} \quad B \text{ vrai}}{A \wedge B \text{ vrai}}$$

- que l'on précise en introduisant les preuves :

$$\frac{a \text{ preuve de } A \quad b \text{ preuve de } B}{(a, b) \text{ preuve de } A \wedge B}$$

- Ainsi précisées, les règles d'introduction donnent pour chaque constante logique la forme de ses preuves canoniques. Par exemple, une preuve canonique d'une proposition $A \wedge B$ est de la forme $(a, b)$ où $a$ est une preuve de $A$ et $b$ une preuve de $B$.
- Pour Martin-Löf, le sens d'une constante logique est expliqué (est explicité) par la forme de ses preuves canoniques. Ceci se généralise à toute proposition.

- Avec Martin-Löf, on modifie un peu ces règles, ce qui donne pour la $\wedge$-introduction :

$$\frac{A \text{ vrai} \quad B \text{ vrai}}{A \wedge B \text{ vrai}}$$

- que l'on précise en introduisant les preuves :

$$\frac{a \text{ preuve de } A \quad b \text{ preuve de } B}{(a, b) \text{ preuve de } A \wedge B}$$

- Ainsi précisées, les règles d'introduction donnent pour chaque constante logique la forme de ses preuves canoniques. Par exemple, une preuve canonique d'une proposition $A \wedge B$ est de la forme $(a, b)$ où $a$ est une preuve de $A$ et $b$ une preuve de $B$.
- Pour Martin-Löf, le sens d'une constante logique est expliqué (est explicité) par la forme de ses preuves canoniques. Ceci se généralise à toute proposition.

- Avec Martin-Löf, on modifie un peu ces règles, ce qui donne pour la $\wedge$-introduction :

$$\frac{A \text{ vrai} \quad B \text{ vrai}}{A \wedge B \text{ vrai}}$$

- que l'on précise en introduisant les preuves :

$$\frac{a \text{ preuve de } A \quad b \text{ preuve de } B}{(a, b) \text{ preuve de } A \wedge B}$$

- Ainsi précisées, les règles d'introduction donnent pour chaque constante logique la forme de ses preuves canoniques. Par exemple, une preuve canonique d'une proposition $A \wedge B$ est de la forme $(a, b)$ où $a$ est une preuve de $A$ et $b$ une preuve de $B$.
- Pour Martin-Löf, le sens d'une constante logique est expliqué (est explicité) par la forme de ses preuves canoniques. Ceci se généralise à toute proposition.

- Avec Martin-Löf, on modifie un peu ces règles, ce qui donne pour la $\wedge$-introduction :

$$\frac{A \text{ vrai} \quad B \text{ vrai}}{A \wedge B \text{ vrai}}$$

- que l'on précise en introduisant les preuves :

$$\frac{a \text{ preuve de } A \quad b \text{ preuve de } B}{(a, b) \text{ preuve de } A \wedge B}$$

- Ainsi précisées, les règles d'introduction donnent pour chaque constante logique la forme de ses preuves canoniques. Par exemple, une preuve canonique d'une proposition $A \wedge B$ est de la forme $(a, b)$ où $a$ est une preuve de $A$ et $b$ une preuve de $B$.
- Pour Martin-Löf, le sens d'une constante logique est expliqué (est explicité) par la forme de ses preuves canoniques. Ceci se généralise à toute proposition.

# Plan de l'exposé

# La notion de jugement

- L'étude précédente a permis de donner un sens précis à une assertion de la forme la proposition $A$ est vraie en montrant que la notion de preuve (d'une proposition) est conceptuellement première relativement à celle de vérité (de cette même proposition).
- Dans la terminologie utilisée par Martin-Löf et sans doute dérivée de Kant, l'assertion la proposition $A$ est vraie est un jugement.
- La notion de jugement est si basique qu'il est impossible de la réduire à d'autres notions qui seraient encore plus basiques.
- Tout ce que l'on peut faire est de montrer que cette notion est la même que d'autres exprimées par d'autres mots.

# La notion de jugement

- L'étude précédente a permis de donner un sens précis à une assertion de la forme la proposition $A$ est vraie en montrant que la notion de preuve (d'une proposition) est conceptuellement première relativement à celle de vérité (de cette même proposition).
- Dans la terminologie utilisée par Martin-Löf et sans doute dérivée de Kant, l'assertion la proposition $A$ est vraie est un jugement.
- La notion de jugement est si basique qu'il est impossible de la réduire à d'autres notions qui seraient encore plus basiques.
- Tout ce que l'on peut faire est de montrer que cette notion est la même que d'autres exprimées par d'autres mots.

# La notion de jugement

- L'étude précédente a permis de donner un sens précis à une assertion de la forme la proposition $A$ est vraie en montrant que la notion de preuve (d'une proposition) est conceptuellement première relativement à celle de vérité (de cette même proposition).
- Dans la terminologie utilisée par Martin-Löf et sans doute dérivée de Kant, l'assertion la proposition $A$ est vraie est un jugement.
- La notion de jugement est si basique qu'il est impossible de la réduire à d'autres notions qui seraient encore plus basiques.
- Tout ce que l'on peut faire est de montrer que cette notion est la même que d'autres exprimées par d'autres mots.

# La notion de jugement

- L'étude précédente a permis de donner un sens précis à une assertion de la forme la proposition $A$ est vraie en montrant que la notion de preuve (d'une proposition) est conceptuellement première relativement à celle de vérité (de cette même proposition).
- Dans la terminologie utilisée par Martin-Löf et sans doute dérivée de Kant, l'assertion la proposition $A$ est vraie est un jugement.
- La notion de jugement est si basique qu'il est impossible de la réduire à d'autres notions qui seraient encore plus basiques.
- Tout ce que l'on peut faire est de montrer que cette notion est la même que d'autres exprimées par d'autres mots.

# La notion de jugement

- L'étude précédente a permis de donner un sens précis à une assertion de la forme la proposition $A$ est vraie en montrant que la notion de preuve (d'une proposition) est conceptuellement première relativement à celle de vérité (de cette même proposition).
- Dans la terminologie utilisée par Martin-Löf et sans doute dérivée de Kant, l'assertion la proposition $A$ est vraie est un jugement.
- La notion de jugement est si basique qu'il est impossible de la réduire à d'autres notions qui seraient encore plus basiques.
- Tout ce que l'on peut faire est de montrer que cette notion est la même que d'autres exprimées par d'autres mots.

# Qu'est-ce qu'un jugement ?

- Pour Martin-Löf, la notion de jugement s'éclaire quand on la voit dans le cadre d'une structure générale constituée d'un acte dirigé et de l'objet vers lequel est dirigé cet acte.
- Il existe de nombreuses espèces d'actes dirigés vers des objets appropriés : l'acte de douter, l'acte de souhaiter, l'acte de craindre,etc.
- Pour la notion de jugement, la structure est celle d'un d'acte de connaissance dirigé vers un objet de la connaissance. Précisément :
  - La preuve d'un jugement est l'acte de la connaissance.
  - Le jugement qui est prouvé est l'objet de la connaissance.
- Autrement dit : la preuve d'un jugement est l'acte de comprendre, de saisir et le jugement est ce qui est compris, saisi.

# Qu'est-ce qu'un jugement ?

- Pour Martin-Löf, la notion de jugement s'éclaire quand on la voit dans le cadre d'une structure générale constituée d'un acte dirigé et de l'objet vers lequel est dirigé cet acte.
- Il existe de nombreuses espèces d'actes dirigés vers des objets appropriés : l'acte de douter, l'acte de souhaiter, l'acte de craindre,etc.
- Pour la notion de jugement, la structure est celle d'un d'acte de connaissance dirigé vers un objet de la connaissance. Précisément :
  - La preuve d'un jugement est l'acte de la connaissance.
  - Le jugement qui est prouvé est l'objet de la connaissance.
- Autrement dit : la preuve d'un jugement est l'acte de comprendre, de saisir et le jugement est ce qui est compris, saisi.

# Qu'est-ce qu'un jugement ?

- Pour Martin-Löf, la notion de jugement s'éclaire quand on la voit dans le cadre d'une structure générale constituée d'un acte dirigé et de l'objet vers lequel est dirigé cet acte.
- Il existe de nombreuses espèces d'actes dirigés vers des objets appropriés : l'acte de douter, l'acte de souhaiter, l'acte de craindre,etc.
- Pour la notion de jugement, la structure est celle d'un d'acte de connaissance dirigé vers un objet de la connaissance. Précisément :
  - La preuve d'un jugement est l'acte de la connaissance.
  - Le jugement qui est prouvé est l'objet de la connaissance.
- Autrement dit : la preuve d'un jugement est l'acte de comprendre, de saisir et le jugement est ce qui est compris, saisi.

# Qu'est-ce qu'un jugement ?

- Pour Martin-Löf, la notion de jugement s'éclaire quand on la voit dans le cadre d'une structure générale constituée d'un acte dirigé et de l'objet vers lequel est dirigé cet acte.
- Il existe de nombreuses espèces d'actes dirigés vers des objets appropriés : l'acte de douter, l'acte de souhaiter, l'acte de craindre,etc.
- Pour la notion de jugement, la structure est celle d'un d'acte de connaissance dirigé vers un objet de la connaissance. Précisément :
  - La preuve d'un jugement est l'acte de la connaissance.
  - Le jugement qui est prouvé est l'objet de la connaissance.
- Autrement dit : la preuve d'un jugement est l'acte de comprendre, de saisir et le jugement est ce qui est compris, saisi.

# Qu'est-ce qu'un jugement ?

- Pour Martin-Löf, la notion de jugement s'éclaire quand on la voit dans le cadre d'une structure générale constituée d'un acte dirigé et de l'objet vers lequel est dirigé cet acte.
- Il existe de nombreuses espèces d'actes dirigés vers des objets appropriés : l'acte de douter, l'acte de souhaiter, l'acte de craindre,etc.
- Pour la notion de jugement, la structure est celle d'un d'acte de connaissance dirigé vers un objet de la connaissance. Précisément :
    - La preuve d'un jugement est l'acte de la connaissance.
    - Le jugement qui est prouvé est l'objet de la connaissance.
- Autrement dit : la preuve d'un jugement est l'acte de comprendre, de saisir et le jugement est ce qui est compris, saisi.

# Qu'est-ce qu'un jugement ?

- Pour Martin-Löf, la notion de jugement s'éclaire quand on la voit dans le cadre d'une structure générale constituée d'un acte dirigé et de l'objet vers lequel est dirigé cet acte.
- Il existe de nombreuses espèces d'actes dirigés vers des objets appropriés : l'acte de douter, l'acte de souhaiter, l'acte de craindre,etc.
- Pour la notion de jugement, la structure est celle d'un d'acte de connaissance dirigé vers un objet de la connaissance. Précisément :
  - La preuve d'un jugement est l'acte de la connaissance.
  - Le jugement qui est prouvé est l'objet de la connaissance.
- Autrement dit : la preuve d'un jugement est l'acte de comprendre, de saisir et le jugement est ce qui est compris, saisi.

# Qu'est-ce qu'un jugement ?

- Pour Martin-Löf, la notion de jugement s'éclaire quand on la voit dans le cadre d'une structure générale constituée d'un acte dirigé et de l'objet vers lequel est dirigé cet acte.
- Il existe de nombreuses espèces d'actes dirigés vers des objets appropriés : l'acte de douter, l'acte de souhaiter, l'acte de craindre,etc.
- Pour la notion de jugement, la structure est celle d'un d'acte de connaissance dirigé vers un objet de la connaissance. Précisément :
  - La preuve d'un jugement est l'acte de la connaissance.
  - Le jugement qui est prouvé est l'objet de la connaissance.
- Autrement dit : la preuve d'un jugement est l'acte de comprendre, de saisir et le jugement est ce qui est compris, saisi.

# validité d'une preuve

- Du fait que l'on fait des erreurs, non seulement dans la vie courante mais aussi dans l'activité mathématique et cela à tous les niveaux, se pose la notion de validité d'une preuve (d'un jugement).
- Il n'y a aucun moyen, aucune méthode de s'assurer de manière certaine et définitive, qu'une preuve réellement prouve son résultat :
  si une telle méthode existait, il suffirait de l'employer systématiquement pour rejeter les fausses preuves et ne conserver que celles qui sont valides.
- Tout ce que l'on peut faire, c'est de mener des discussions et des analyses de manière à renforcer ou au contraire mettre en doute l'évidence d'une preuve.

# validité d'une preuve

- Du fait que l'on fait des erreurs, non seulement dans la vie courante mais aussi dans l'activité mathématique et cela à tous les niveaux, se pose la notion de validité d'une preuve (d'un jugement).
- Il n'y a aucun moyen, aucune méthode de s'assurer de manière certaine et définitive, qu'une preuve réellement prouve son résultat :
  si une telle méthode existait, il suffirait de l'employer systématiquement pour rejeter les fausses preuves et ne conserver que celles qui sont valides.
- Tout ce que l'on peut faire, c'est de mener des discussions et des analyses de manière à renforcer ou au contraire mettre en doute l'évidence d'une preuve.

# validité d'une preuve

- Du fait que l'on fait des erreurs, non seulement dans la vie courante mais aussi dans l'activité mathématique et cela à tous les niveaux, se pose la notion de validité d'une preuve (d'un jugement).
- Il n'y a aucun moyen, aucune méthode de s'assurer de manière certaine et définitive, qu'une preuve réellement prouve son résultat :
  si une telle méthode existait, il suffirait de l'employer systématiquement pour rejeter les fausses preuves et ne conserver que celles qui sont valides.
- Tout ce que l'on peut faire, c'est de mener des discussions et des analyses de manière à renforcer ou au contraire mettre en doute l'évidence d'une preuve.

# validité d'une preuve

- Du fait que l'on fait des erreurs, non seulement dans la vie courante mais aussi dans l'activité mathématique et cela à tous les niveaux, se pose la notion de validité d'une preuve (d'un jugement).
- Il n'y a aucun moyen, aucune méthode de s'assurer de manière certaine et définitive, qu'une preuve réellement prouve son résultat :
  si une telle méthode existait, il suffirait de l'employer systématiquement pour rejeter les fausses preuves et ne conserver que celles qui sont valides.
- Tout ce que l'on peut faire, c'est de mener des discussions et des analyses de manière à renforcer ou au contraire mettre en doute l'évidence d'une preuve.

- La notion de validité d'une preuve est la plus fondamentale de celle qui ont été présentées : il n'y a aucune notion qui la précède dans l'ordre conceptuel.
- Dire d'un preuve qu'elle est valide, c'est dire que c'est une vraie preuve (sur le même mode que l'on parlerait d'un vrai pain...).
- Il ne faut pas confondre :
  - la notion de vérité d'une proposition (se dit d'une proposition dont on connait une preuve canonique) qui est une propriété mathématique,
  - la notion de validité de la preuve d'un jugement (se dit lorsque la preuve est considérée incontestable) qui est une forme de vérité métaphysique.

- La notion de validité d'une preuve est la plus fondamentale de celle qui ont été présentées : il n'y a aucune notion qui la précède dans l'ordre conceptuel.
- Dire d'un preuve qu'elle est valide, c'est dire que c'est une vraie preuve (sur le même mode que l'on parlerait d'un vrai pain...).
- Il ne faut pas confondre :
  - la notion de vérité d'une proposition (se dit d'une proposition dont on connait une preuve canonique) qui est une propriété mathématique,
  - la notion de validité de la preuve d'un jugement (se dit lorsque la preuve est considérée incontestable) qui est une forme de vérité métaphysique.

- La notion de validité d'une preuve est la plus fondamentale de celle qui ont été présentées : il n'y a aucune notion qui la précède dans l'ordre conceptuel.
- Dire d'un preuve qu'elle est valide, c'est dire que c'est une vraie preuve (sur le même mode que l'on parlerait d'un vrai pain...).
- Il ne faut pas confondre :
  - la notion de vérité d'une proposition (se dit d'une proposition dont on connait une preuve canonique) qui est une propriété mathématique,
  - la notion de validité de la preuve d'un jugement (se dit lorsque la preuve est considérée incontestable) qui est une forme de vérité métaphysique.

- La notion de validité d'une preuve est la plus fondamentale de celle qui ont été présentées : il n'y a aucune notion qui la précède dans l'ordre conceptuel.
- Dire d'un preuve qu'elle est valide, c'est dire que c'est une vraie preuve (sur le même mode que l'on parlerait d'un vrai pain...).
- Il ne faut pas confondre :
  - la notion de vérité d'une proposition (se dit d'une proposition dont on connait une preuve canonique) qui est une propriété mathématique,
  - la notion de validité de la preuve d'un jugement (se dit lorsque la preuve est considérée incontestable) qui est une forme de vérité métaphysique.

- La notion de validité d'une preuve est la plus fondamentale de celle qui ont été présentées : il n'y a aucune notion qui la précède dans l'ordre conceptuel.
- Dire d'un preuve qu'elle est valide, c'est dire que c'est une vraie preuve (sur le même mode que l'on parlerait d'un vrai pain...).
- Il ne faut pas confondre :
  - la notion de vérité d'une proposition (se dit d'une proposition dont on connait une preuve canonique) qui est une propriété mathématique,
  - la notion de validité de la preuve d'un jugement (se dit lorsque la preuve est considérée incontestable) qui est une forme de vérité métaphysique.

- La notion de validité d'une preuve est la plus fondamentale de celle qui ont été présentées : il n'y a aucune notion qui la précède dans l'ordre conceptuel.
- Dire d'un preuve qu'elle est valide, c'est dire que c'est une vraie preuve (sur le même mode que l'on parlerait d'un vrai pain...).
- Il ne faut pas confondre :
  - la notion de vérité d'une proposition (se dit d'une proposition dont on connait une preuve canonique) qui est une propriété mathématique,
  - la notion de validité de la preuve d'un jugement (se dit lorsque la preuve est considérée incontestable) qui est une forme de vérité métaphysique.

# Plan de l'exposé

# Types et objets d'un type

- Dans $\mathcal{T}$, la notion de base est celle de type. En première approximation, un type peut être vu comme un ensemble.
- Dire que $A$ est un type, noté $(A \ \ \mathrm{type})$, signifie que :
  - On a une notion d'objet de type $A$. Cela se fait au moyen d'un d'une définition inductive des objets canoniques de type $A$ obtenue à l'aide de constructeurs intrinsèquement attachés à $A$.
    Notation : $a : A$.
  - On a une notion d'égalité des objets de type $A$.
    Notation : $a = b : A$.
- En fait la définition des objets canoniques d'un type $A$ se fait à l'aide de règles d'introduction. D'après la philosophie de Martin-Löf, ce sont elles qui donnent le sens du type considéré.
- De manière duale, pour chaque type $A$, on a des règles d'élimination qui permettent de définir des fonctions sur le type considéré.

# Types et objets d'un type

- Dans $\mathcal{T}$, la notion de base est celle de type. En première approximation, un type peut être vu comme un ensemble.
- Dire que $A$ est un type, noté $(A \ \ \mathrm{type})$, signifie que :
  - On a une notion d'objet de type $A$. Cela se fait au moyen d'un d'une définition inductive des objets canoniques de type $A$ obtenue à l'aide de constructeurs intrinsèquement attachés à $A$.
    Notation : $a : A$.
  - On a une notion d'égalité des objets de type $A$.
    Notation : $a = b : A$.
- En fait la définition des objets canoniques d'un type $A$ se fait à l'aide de règles d'introduction. D'après la philosophie de Martin-Löf, ce sont elles qui donnent le sens du type considéré.
- De manière duale, pour chaque type $A$, on a des règles d'élimination qui permettent de définir des fonctions sur le type considéré.

# Types et objets d'un type

- Dans $\mathcal{T}$, la notion de base est celle de type. En première approximation, un type peut être vu comme un ensemble.
- Dire que $A$ est un type, noté $(A \;\; \mathrm{type})$, signifie que :
  - On a une notion d'objet de type $A$. Cela se fait au moyen d'un d'une définition inductive des objets canoniques de type $A$ obtenue à l'aide de constructeurs intrinsèquement attachés à $A$.
    Notation : $a : A$.
  - On a une notion d'égalité des objets de type $A$.
    Notation : $a = b : A$.
- En fait la définition des objets canoniques d'un type $A$ se fait à l'aide de règles d'introduction. D'après la philosophie de Martin-Löf, ce sont elles qui donnent le sens du type considéré.
- De manière duale, pour chaque type $A$, on a des règles d'élimination qui permettent de définir des fonctions sur le type considéré.

# Types et objets d'un type

- Dans $\mathcal{T}$, la notion de base est celle de type. En première approximation, un type peut être vu comme un ensemble.
- Dire que $A$ est un type, noté ($A \;\; \mathrm{type}$), signifie que :
  - On a une notion d'objet de type $A$. Cela se fait au moyen d'un d'une définition inductive des objets canoniques de type $A$ obtenue à l'aide de constructeurs intrinsèquement attachés à $A$.
    Notation : $a : A$.
  - On a une notion d'égalité des objets de type $A$.
    Notation : $a = b : A$.
- En fait la définition des objets canoniques d'un type $A$ se fait à l'aide de règles d'introduction. D'après la philosophie de Martin-Löf, ce sont elles qui donnent le sens du type considéré.
- De manière duale, pour chaque type $A$, on a des règles d'élimination qui permettent de définir des fonctions sur le type considéré.

# Types et objets d'un type

- Dans $\mathcal{T}$, la notion de base est celle de type. En première approximation, un type peut être vu comme un ensemble.
- Dire que $A$ est un type, noté $(A \ \ \mathrm{type})$, signifie que :
  - On a une notion d'objet de type $A$. Cela se fait au moyen d'un d'une définition inductive des objets canoniques de type $A$ obtenue à l'aide de constructeurs intrinsèquement attachés à $A$.
    Notation : $a : A$.
  - On a une notion d'égalité des objets de type $A$.
    Notation : $a = b : A$.
- En fait la définition des objets canoniques d'un type $A$ se fait à l'aide de règles d'introduction. D'après la philosophie de Martin-Löf, ce sont elles qui donnent le sens du type considéré.
- De manière duale, pour chaque type $A$, on a des règles d'élimination qui permettent de définir des fonctions sur le type considéré.

# Types et objets d'un type

- Dans $\mathcal{T}$, la notion de base est celle de type. En première approximation, un type peut être vu comme un ensemble.
- Dire que $A$ est un type, noté ($A$ type), signifie que :
  - On a une notion d'objet de type $A$. Cela se fait au moyen d'un d'une définition inductive des objets canoniques de type $A$ obtenue à l'aide de constructeurs intrinsèquement attachés à $A$.
    Notation : $a : A$.
  - On a une notion d'égalité des objets de type $A$.
    Notation : $a = b : A$.
- En fait la définition des objets canoniques d'un type $A$ se fait à l'aide de règles d'introduction. D'après la philosophie de Martin-Löf, ce sont elles qui donnent le sens du type considéré.
- De manière duale, pour chaque type $A$, on a des règles d'élimination qui permettent de définir des fonctions sur le type considéré.

# Types et objets d'un type

- Dans $\mathcal{T}$, la notion de base est celle de type. En première approximation, un type peut être vu comme un ensemble.
- Dire que $A$ est un type, noté ($A \;\; \mathrm{type}$), signifie que :
  - On a une notion d'objet de type $A$. Cela se fait au moyen d'un d'une définition inductive des objets canoniques de type $A$ obtenue à l'aide de constructeurs intrinsèquement attachés à $A$.
    Notation : $a : A$.
  - On a une notion d'égalité des objets de type $A$.
    Notation : $a = b : A$.
- En fait la définition des objets canoniques d'un type $A$ se fait à l'aide de règles d'introduction. D'après la philosophie de Martin-Löf, ce sont elles qui donnent le sens du type considéré.
- De manière duale, pour chaque type $A$, on a des règles d'élimination qui permettent de définir des fonctions sur le type considéré.

# Les jugements

- La théorie $\mathcal{T}$ est un système formel qui permet de dériver (de démontrer) des propriétés mathématiques (des théorèmes) appelées des jugements.
- Exemples de jugements : $(\mathbb{N}\ \text{type})\ ,\ (0 : \mathbb{N})\ ,\ (1 : \mathbb{N})$ où 1 est défini comme $S(0)$.
- Puisqu'un jugement est démontré, cela n'a pas de sens de le nier, ou de l'utiliser dans une construction logique hypothétique.
- Par exemple, l'assertion suivante

$$\neg(0 : \mathbb{N})$$

n'a aucun sens dans $\mathcal{T}$.

# Les jugements

- La théorie $\mathcal{T}$ est un système formel qui permet de dériver (de démontrer) des propriétés mathématiques (des théorèmes) appelées des jugements.
- Exemples de jugements : $(\mathbb{N}\ \mathrm{type})$ , $(0 : \mathbb{N})$ , $(1 : \mathbb{N})$ où 1 est défini comme $S(0)$.
- Puisqu'un jugement est démontré, cela n'a pas de sens de le nier, ou de l'utiliser dans une construction logique hypothétique.
- Par exemple, l'assertion suivante

$$\neg(0 : \mathbb{N})$$

n'a aucun sens dans $\mathcal{T}$.

# Les jugements

- La théorie $\mathcal{T}$ est un système formel qui permet de dériver (de démontrer) des propriétés mathématiques (des théorèmes) appelées des jugements.
- Exemples de jugements : $(\mathbb{N}\ \mathrm{type})\ ,\ (0 : \mathbb{N})\ ,\ (1 : \mathbb{N})$ où 1 est défini comme $S(0)$.
- Puisqu'un jugement est démontré, cela n'a pas de sens de le nier, ou de l'utiliser dans une construction logique hypothétique.
- Par exemple, l'assertion suivante

$$\neg(0 : \mathbb{N})$$

n'a aucun sens dans $\mathcal{T}$.

# Les jugements

- La théorie $\mathcal{T}$ est un système formel qui permet de dériver (de démontrer) des propriétés mathématiques (des théorèmes) appelées des jugements.
- Exemples de jugements : $(\mathbb{N}\ \text{type})\ ,\ (0 : \mathbb{N})\ ,\ (1 : \mathbb{N})$ où 1 est défini comme $S(0)$.
- Puisqu'un jugement est démontré, cela n'a pas de sens de le nier, ou de l'utiliser dans une construction logique hypothétique.
- Par exemple, l'assertion suivante

$$\neg(0 : \mathbb{N})$$

n'a aucun sens dans $\mathcal{T}$.

# Les jugements

- La théorie $\mathcal{T}$ est un système formel qui permet de dériver (de démontrer) des propriétés mathématiques (des théorèmes) appelées des jugements.
- Exemples de jugements : $(\mathbb{N}\ \mathrm{type})\ ,\ (0 : \mathbb{N})\ ,\ (1 : \mathbb{N})$ où 1 est défini comme $S(0)$.
- Puisqu'un jugement est démontré, cela n'a pas de sens de le nier, ou de l'utiliser dans une construction logique hypothétique.
- Par exemple, l'assertion suivante

$$\neg(0 : \mathbb{N})$$

n'a aucun sens dans $\mathcal{T}$.

# Le type $\mathbb{N}$

- Le prototype des types dans $\mathcal{T}$ est le type $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Le type $\mathbb{N}$ est défini par la donnée de deux constructeurs $0$ et $\mathrm{S}$ et des règles d'introductions :
  1. $0 : \mathbb{N}$,
  2. Du jugement $(x : \mathbb{N})$ on déduit le jugement $(\mathrm{S}(x) : \mathbb{N})$.
- Les objets définis par l'application de ces règles d'introduction sont les objets canoniques de type $\mathbb{N}$ :

$$0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots$$

  Ce sont eux qui donnent le sens du type $\mathbb{N}$.
- Sur le type $\mathbb{N}$, la règle d'élimination est une forme très générale de récursivité.

# Le type $\mathbb{N}$

- Le prototype des types dans $\mathcal{T}$ est le type $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Le type $\mathbb{N}$ est défini par la donnée de deux constructeurs $0$ et $\mathrm{S}$ et des règles d'introductions :
  1. $0 : \mathbb{N}$,
  2. Du jugement $(x : \mathbb{N})$ on déduit le jugement $(\mathrm{S}(x) : \mathbb{N})$.
- Les objets définis par l'application de ces règles d'introduction sont les objets canoniques de type $\mathbb{N}$ :

$$0,\ S(0),\ S(S(0)),\ S(S(S(0))),\ldots$$

  Ce sont eux qui donnent le sens du type $\mathbb{N}$.
- Sur le type $\mathbb{N}$, la règle d'élimination est une forme très générale de récursivité.

# Le type $\mathbb{N}$

- Le prototype des types dans $\mathcal{T}$ est le type $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Le type $\mathbb{N}$ est défini par la donnée de deux constructeurs $0$ et $\mathrm{S}$ et des règles d'introductions :
  1. $0 : \mathbb{N}$,
  2. Du jugement $(x : \mathbb{N})$ on déduit le jugement $(\mathrm{S}(x) : \mathbb{N})$.
- Les objets définis par l'application de ces règles d'introduction sont les objets canoniques de type $\mathbb{N}$ :

$$0,\ S(0),\ S(S(0)),\ S(S(S(0))),\ldots$$

  Ce sont eux qui donnent le sens du type $\mathbb{N}$.
- Sur le type $\mathbb{N}$, la règle d'élimination est une forme très générale de récursivité.

# Le type $\mathbb{N}$

- Le prototype des types dans $\mathcal{T}$ est le type $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Le type $\mathbb{N}$ est défini par la donnée de deux constructeurs $0$ et $\mathrm{S}$ et des règles d'introductions :
  1. $0 : \mathbb{N}$,
  2. Du jugement $(x : \mathbb{N})$ on déduit le jugement $(\mathrm{S}(x) : \mathbb{N})$.
- Les objets définis par l'application de ces règles d'introduction sont les objets canoniques de type $\mathbb{N}$ :

$$0,\ S(0),\ S(S(0)),\ S(S(S(0))), \ldots$$

  Ce sont eux qui donnent le sens du type $\mathbb{N}$.
- Sur le type $\mathbb{N}$, la règle d'élimination est une forme très générale de récursivité.

# Le type $\mathbb{N}$

- Le prototype des types dans $\mathcal{T}$ est le type $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Le type $\mathbb{N}$ est défini par la donnée de deux constructeurs $0$ et $\mathrm{S}$ et des règles d'introductions :
  1. $0 : \mathbb{N}$,
  2. Du jugement $(x : \mathbb{N})$ on déduit le jugement $(\mathrm{S}(x) : \mathbb{N})$.
- Les objets définis par l'application de ces règles d'introduction sont les objets canoniques de type $\mathbb{N}$ :

$$0,\ S(0),\ S(S(0)),\ S(S(S(0))), \ldots$$

  Ce sont eux qui donnent le sens du type $\mathbb{N}$.
- Sur le type $\mathbb{N}$, la règle d'élimination est une forme très générale de récursivité.

# Le type $\mathbb{N}$

- Le prototype des types dans $\mathcal{T}$ est le type $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Le type $\mathbb{N}$ est défini par la donnée de deux constructeurs $0$ et $\mathrm{S}$ et des règles d'introductions :
  1. $0 : \mathbb{N}$,
  2. Du jugement $(x : \mathbb{N})$ on déduit le jugement $(\mathrm{S}(x) : \mathbb{N})$.
- Les objets définis par l'application de ces règles d'introduction sont les objets canoniques de type $\mathbb{N}$ :

$$0,\ S(0),\ S(S(0)),\ S(S(S(0))),\ldots$$

  Ce sont eux qui donnent le sens du type $\mathbb{N}$.
- Sur le type $\mathbb{N}$, la règle d'élimination est une forme très générale de récursivité.

# Le type $\mathbb{N}$

- Le prototype des types dans $\mathcal{T}$ est le type $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Le type $\mathbb{N}$ est défini par la donnée de deux constructeurs $0$ et $\mathrm{S}$ et des règles d'introductions :
  1. $0 : \mathbb{N}$,
  2. Du jugement $(x : \mathbb{N})$ on déduit le jugement $(\mathrm{S}(x) : \mathbb{N})$.
- Les objets définis par l'application de ces règles d'introduction sont les objets canoniques de type $\mathbb{N}$ :

  $$0,\ S(0),\ S(S(0)),\ S(S(S(0))),\ldots$$

  Ce sont eux qui donnent le sens du type $\mathbb{N}$.
- Sur le type $\mathbb{N}$, la règle d'élimination est une forme très générale de récursivité.

# D'autres types

- Comme dans la théorie des ensembles, on a un type vide.

  $$\emptyset \quad \mathrm{type}$$

  C'est le type qui n'a pas d'objets canoniques.
- On dispose d'opérations qui, à partir de types donnés permettent d'en construire d'autres.
- Par exemple, étant donnés deux types $A$ et $B$, on peut définir :
  - Le type $A \to B$ des fonctions de $A$ dans $B$ dont les éléments canoniques sont de la forme $(\lambda x)b(x)$ où $b(x)$ désigne un objet de $B$ dépendant d'un paramètre $x$ qui est un objet quelconque de $A$.
  - Le type produit $A \times B$ dont les éléments canoniques sont les $(a, b)$ pour $(a : A)$ et $(b : B)$.
  - La somme disjointe $A + B$ dont les objets canoniques sont de la forme $\mathrm{inl}(a)$ pour $(a : A)$ ou $\mathrm{inr}(b)$ pour $(b : B)$.

# D'autres types

- Comme dans la théorie des ensembles, on a un type vide.
$$\emptyset \quad \text{type}$$
C'est le type qui n'a pas d'objets canoniques.
- On dispose d'opérations qui, à partir de types donnés permettent d'en construire d'autres.
- Par exemple, étant donnés deux types $A$ et $B$, on peut définir :
  - Le type $A \to B$ des fonctions de $A$ dans $B$ dont les éléments canoniques sont de la forme $(\lambda x)b(x)$ où $b(x)$ désigne un objet de $B$ dépendant d'un paramètre $x$ qui est un objet quelconque de $A$.
  - Le type produit $A \times B$ dont les éléments canoniques sont les $(a, b)$ pour $(a : A)$ et $(b : B)$.
  - La somme disjointe $A + B$ dont les objets canoniques sont de la forme $\mathrm{inl}(a)$ pour $(a : A)$ ou $\mathrm{inr}(b)$ pour $(b : B)$.

# D'autres types

- Comme dans la théorie des ensembles, on a un type vide.

  $$\emptyset \quad \mathrm{type}$$

  C'est le type qui n'a pas d'objets canoniques.
- On dispose d'opérations qui, à partir de types donnés permettent d'en construire d'autres.
- Par exemple, étant donnés deux types $A$ et $B$, on peut définir :
  - Le type $A \to B$ des fonctions de $A$ dans $B$ dont les éléments canoniques sont de la forme $(\lambda x)b(x)$ où $b(x)$ désigne un objet de $B$ dépendant d'un paramètre $x$ qui est un objet quelconque de $A$.
  - Le type produit $A \times B$ dont les éléments canoniques sont les $(a, b)$ pour $(a : A)$ et $(b : B)$.
  - La somme disjointe $A + B$ dont les objets canoniques sont de la forme $\mathrm{inl}(a)$ pour $(a : A)$ ou $\mathrm{inr}(b)$ pour $(b : B)$.

# D'autres types

- Comme dans la théorie des ensembles, on a un type vide.
  $$\emptyset \quad \text{type}$$
  C'est le type qui n'a pas d'objets canoniques.
- On dispose d'opérations qui, à partir de types donnés permettent d'en construire d'autres.
- Par exemple, étant donnés deux types $A$ et $B$, on peut définir :
  - Le type $A \to B$ des fonctions de $A$ dans $B$ dont les éléments canoniques sont de la forme $(\lambda x)b(x)$ où $b(x)$ désigne un objet de $B$ dépendant d'un paramètre $x$ qui est un objet quelconque de $A$.
  - Le type produit $A \times B$ dont les éléments canoniques sont les $(a, b)$ pour $(a : A)$ et $(b : B)$.
  - La somme disjointe $A + B$ dont les objets canoniques sont de la forme $\mathrm{inl}(a)$ pour $(a : A)$ ou $\mathrm{inr}(b)$ pour $(b : B)$.

# D'autres types

- Comme dans la théorie des ensembles, on a un type vide.
  $$\emptyset \quad \text{type}$$
  C'est le type qui n'a pas d'objets canoniques.
- On dispose d'opérations qui, à partir de types donnés permettent d'en construire d'autres.
- Par exemple, étant donnés deux types $A$ et $B$, on peut définir :
  - Le type $A \to B$ des fonctions de $A$ dans $B$ dont les éléments canoniques sont de la forme $(\lambda x)b(x)$ où $b(x)$ désigne un objet de $B$ dépendant d'un paramètre $x$ qui est un objet quelconque de $A$.
  - Le type produit $A \times B$ dont les éléments canoniques sont les $(a, b)$ pour $(a : A)$ et $(b : B)$.
  - La somme disjointe $A + B$ dont les objets canoniques sont de la forme $\mathrm{inl}(a)$ pour $(a : A)$ ou $\mathrm{inr}(b)$ pour $(b : B)$.

# D'autres types

- Comme dans la théorie des ensembles, on a un type vide.
  $$\emptyset \quad \text{type}$$
  C'est le type qui n'a pas d'objets canoniques.
- On dispose d'opérations qui, à partir de types donnés permettent d'en construire d'autres.
- Par exemple, étant donnés deux types $A$ et $B$, on peut définir :
  - Le type $A \to B$ des fonctions de $A$ dans $B$ dont les éléments canoniques sont de la forme $(\lambda x)b(x)$ où $b(x)$ désigne un objet de $B$ dépendant d'un paramètre $x$ qui est un objet quelconque de $A$.
  - Le type produit $A \times B$ dont les éléments canoniques sont les $(a, b)$ pour $(a : A)$ et $(b : B)$.
  - La somme disjointe $A + B$ dont les objets canoniques sont de la forme $\mathrm{inl}(a)$ pour $(a : A)$ ou $\mathrm{inr}(b)$ pour $(b : B)$.

# D'autres types

- Comme dans la théorie des ensembles, on a un type vide.
  $$\emptyset \quad \text{type}$$
  C'est le type qui n'a pas d'objets canoniques.
- On dispose d'opérations qui, à partir de types donnés permettent d'en construire d'autres.
- Par exemple, étant donnés deux types $A$ et $B$, on peut définir :
  - Le type $A \to B$ des fonctions de $A$ dans $B$ dont les éléments canoniques sont de la forme $(\lambda x)b(x)$ où $b(x)$ désigne un objet de $B$ dépendant d'un paramètre $x$ qui est un objet quelconque de $A$.
  - Le type produit $A \times B$ dont les éléments canoniques sont les $(a, b)$ pour $(a : A)$ et $(b : B)$.
  - La somme disjointe $A + B$ dont les objets canoniques sont de la forme $\mathrm{inl}(a)$ pour $(a : A)$ ou $\mathrm{inr}(b)$ pour $(b : B)$.

# Jugements, types et objets dépendants

- L'une des originalités de $\mathcal{T}$ est l'introduction à la base de cette théorie la notion de jugement dépendant : c'est un jugement qui est obtenu sous certaines conditions ou hypothèses.
Exemple : $x^2 + 1 : \mathbb{N} \quad [x : \mathbb{N}]$.
- Les hypothèses sont représentées par la notion de contexte. La forme générale d'un contexte est
$[x_1 : A_1 \ , \ x_2 : A_2(x_1) \ , \ldots , \ x_n : A_n(x_1, \ldots, x_{n-1})]$
- Dire d'un jugement qu'il est dépendant du contexte précédent c'est dire que ce jugement dépend de variables $x_1, \ldots, x_n$ astreintes aux conditions exprimées par ce contexte.
- Un type (*resp.* un objet d'un type donné) est dépendant lorsque le jugement qui introduit ce type (*resp.* cet objet) est lui-même dépendant.

# Jugements, types et objets dépendants

- L'une des originalités de $\mathcal{T}$ est l'introduction à la base de cette théorie la notion de jugement dépendant : c'est un jugement qui est obtenu sous certaines conditions ou hypothèses.
  Exemple : $x^2 + 1 : \mathbb{N} \quad [x : \mathbb{N}]$.
- Les hypothèses sont représentées par la notion de contexte. La forme générale d'un contexte est
  $[x_1 : A_1 \ , \ x_2 : A_2(x_1) \ , \ldots , \ x_n : A_n(x_1, \ldots , x_{n-1})]$
- Dire d'un jugement qu'il est dépendant du contexte précédent c'est dire que ce jugement dépend de variables $x_1, \ldots , x_n$ astreintes aux conditions exprimées par ce contexte.
- Un type (*resp.* un objet d'un type donné) est dépendant lorsque le jugement qui introduit ce type (*resp.* cet objet) est lui-même dépendant.

# Jugements, types et objets dépendants

- L'une des originalités de $\mathcal{T}$ est l'introduction à la base de cette théorie la notion de jugement dépendant : c'est un jugement qui est obtenu sous certaines conditions ou hypothèses.
  Exemple : $x^2 + 1 : \mathbb{N}$ $[x : \mathbb{N}]$.
- Les hypothèses sont représentées par la notion de contexte. La forme générale d'un contexte est
  $[x_1 : A_1 \ , \ x_2 : A_2(x_1) \ , \ldots , \ x_n : A_n(x_1, \ldots , x_{n-1})]$
- Dire d'un jugement qu'il est dépendant du contexte précédent c'est dire que ce jugement dépend de variables $x_1, \ldots , x_n$ astreintes aux conditions exprimées par ce contexte.
- Un type (*resp.* un objet d'un type donné) est dépendant lorsque le jugement qui introduit ce type (*resp.* cet objet) est lui-même dépendant.

# Jugements, types et objets dépendants

- L'une des originalités de $\mathcal{T}$ est l'introduction à la base de cette théorie la notion de jugement dépendant : c'est un jugement qui est obtenu sous certaines conditions ou hypothèses.
  Exemple : $x^2 + 1 : \mathbb{N} \quad [x : \mathbb{N}]$.
- Les hypothèses sont représentées par la notion de contexte. La forme générale d'un contexte est
  $[x_1 : A_1 \ , \ x_2 : A_2(x_1) \ , \dots , \ x_n : A_n(x_1, \dots , x_{n-1})]$
- Dire d'un jugement qu'il est dépendant du contexte précédent c'est dire que ce jugement dépend de variables $x_1, \dots , x_n$ astreintes aux conditions exprimées par ce contexte.
- Un type (*resp.* un objet d'un type donné) est dépendant lorsque le jugement qui introduit ce type (*resp.* cet objet) est lui-même dépendant.

# Jugements, types et objets dépendants

- L'une des originalités de $\mathcal{T}$ est l'introduction à la base de cette théorie la notion de jugement dépendant : c'est un jugement qui est obtenu sous certaines conditions ou hypothèses.
  Exemple : $x^2 + 1 : \mathbb{N} \quad [x : \mathbb{N}]$.
- Les hypothèses sont représentées par la notion de contexte. La forme générale d'un contexte est
  $[x_1 : A_1 \; , \; x_2 : A_2(x_1) \; , \ldots , \; x_n : A_n(x_1, \ldots, x_{n-1})]$
- Dire d'un jugement qu'il est dépendant du contexte précédent c'est dire que ce jugement dépend de variables $x_1, \ldots, x_n$ astreintes aux conditions exprimées par ce contexte.
- Un type (*resp.* un objet d'un type donné) est dépendant lorsque le jugement qui introduit ce type (*resp.* cet objet) est lui-même dépendant.

# Jugements, types et objets dépendants

- L'une des originalités de $\mathcal{T}$ est l'introduction à la base de cette théorie la notion de jugement dépendant : c'est un jugement qui est obtenu sous certaines conditions ou hypothèses.
  Exemple : $x^2 + 1 : \mathbb{N} \quad [x : \mathbb{N}]$.
- Les hypothèses sont représentées par la notion de contexte. La forme générale d'un contexte est
  $[x_1 : A_1 \ , \ x_2 : A_2(x_1) \ , \ldots , \ x_n : A_n(x_1, \ldots, x_{n-1})]$
- Dire d'un jugement qu'il est dépendant du contexte précédent c'est dire que ce jugement dépend de variables $x_1, \ldots, x_n$ astreintes aux conditions exprimées par ce contexte.
- Un type (*resp.* un objet d'un type donné) est dépendant lorsque le jugement qui introduit ce type (*resp.* cet objet) est lui-même dépendant.

# Jugements, types et objets dépendants

- L'une des originalités de $\mathcal{T}$ est l'introduction à la base de cette théorie la notion de jugement dépendant : c'est un jugement qui est obtenu sous certaines conditions ou hypothèses.
  Exemple : $x^2 + 1 : \mathbb{N} \quad [x : \mathbb{N}]$.
- Les hypothèses sont représentées par la notion de contexte. La forme générale d'un contexte est
  $[x_1 : A_1 \ , \ x_2 : A_2(x_1) \ , \ldots , \ x_n : A_n(x_1, \ldots , x_{n-1})]$
- Dire d'un jugement qu'il est dépendant du contexte précédent c'est dire que ce jugement dépend de variables $x_1, \ldots , x_n$ astreintes aux conditions exprimées par ce contexte.
- Un type (*resp.* un objet d'un type donné) est dépendant lorsque le jugement qui introduit ce type (*resp.* cet objet) est lui-même dépendant.

# Plan de l'exposé

# Les propositions dans $\mathcal{T}$

- On a vu dans la partie précédente que les entités que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont les propositions. Exemple : $(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$.
- Habituellement, les propositions sont des énoncés du langage mathématiques et en ce sens elles sont extérieures au monde des objets dont parlent le langage.
- A ce niveau, la théorie $\mathcal{T}$ opère un renversement complet : les propositions sont identifiées à des types.
- C'est le principe des propositions en tant que types qui est la manifestation au niveau de $\mathcal{T}$ de la correspondance de Curry-Howard.
- Quelles sont les raisons de cette identification a priori surprenante ?

# Les propositions dans $\mathcal{T}$

- On a vu dans la partie précédente que les entités que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont les propositions. Exemple : $(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$.
- Habituellement, les propositions sont des énoncés du langage mathématiques et en ce sens elles sont extérieures au monde des objets dont parlent le langage.
- A ce niveau, la théorie $\mathcal{T}$ opère un renversement complet : les propositions sont identifiées à des types.
- C'est le principe des propositions en tant que types qui est la manifestation au niveau de $\mathcal{T}$ de la correspondance de Curry-Howard.
- Quelles sont les raisons de cette identification a priori surprenante ?

# Les propositions dans $\mathcal{T}$

- On a vu dans la partie précédente que les entités que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont les propositions. Exemple : $(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$.
- Habituellement, les propositions sont des énoncés du langage mathématiques et en ce sens elles sont extérieures au monde des objets dont parlent le langage.
- A ce niveau, la théorie $\mathcal{T}$ opère un renversement complet : les propositions sont identifiées à des types.
- C'est le principe des propositions en tant que types qui est la manifestation au niveau de $\mathcal{T}$ de la correspondance de Curry-Howard.
- Quelles sont les raisons de cette identification a priori surprenante ?

# Les propositions dans $\mathcal{T}$

- On a vu dans la partie précédente que les entités que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont les propositions. Exemple : $(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$.
- Habituellement, les propositions sont des énoncés du langage mathématiques et en ce sens elles sont extérieures au monde des objets dont parlent le langage.
- A ce niveau, la théorie $\mathcal{T}$ opère un renversement complet : les propositions sont identifiées à des types.
- C'est le principe des propositions en tant que types qui est la manifestation au niveau de $\mathcal{T}$ de la correspondance de Curry-Howard.
- Quelles sont les raisons de cette identification a priori surprenante ?

# Les propositions dans $\mathcal{T}$

- On a vu dans la partie précédente que les entités que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont les propositions. Exemple : $(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$.
- Habituellement, les propositions sont des énoncés du langage mathématiques et en ce sens elles sont extérieures au monde des objets dont parlent le langage.
- A ce niveau, la théorie $\mathcal{T}$ opère un renversement complet : les propositions sont identifiées à des types.
- C'est le principe des propositions en tant que types qui est la manifestation au niveau de $\mathcal{T}$ de la correspondance de Curry-Howard.
- Quelles sont les raisons de cette identification a priori surprenante ?

# Les propositions dans $\mathcal{T}$

- On a vu dans la partie précédente que les entités que l'on peut nier et que l'on peut combiner avec les constantes logiques sont les propositions. Exemple : $(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$.
- Habituellement, les propositions sont des énoncés du langage mathématiques et en ce sens elles sont extérieures au monde des objets dont parlent le langage.
- A ce niveau, la théorie $\mathcal{T}$ opère un renversement complet : les propositions sont identifiées à des types.
- C'est le principe des propositions en tant que types qui est la manifestation au niveau de $\mathcal{T}$ de la correspondance de Curry-Howard.
- Quelles sont les raisons de cette identification a priori surprenante ?

# proposition=type ?

- Du point de vue intuitionniste, ce qui compte pour comprendre, pour identifier une proposition, ce sont ses preuves canoniques.
- Ce que sont les preuves canoniques d'une proposition est explicité par les règles d'introduction de la proposition de façon analogue à ce qui se passe pour les objets canoniques d'un type.
- Précisément, si on identifie chaque proposition à la classe de ses preuves, on voit que du point de vue intuitionniste, les constantes logiques correspondent exactement aux opérations de constructions de types propres à $\mathcal{T}$.
- Un exemple : la proposition $A \Rightarrow B$ est du point de vue intuitionniste la classe des fonctions de $A$ dans $B$, ce qui correspond exactement à la construction du type $A \to B$.

## proposition=type ?

- Du point de vue intuitionniste, ce qui compte pour comprendre, pour identifier une proposition, ce sont ses preuves canoniques.
- Ce que sont les preuves canoniques d'une proposition est explicité par les règles d'introduction de la proposition de façon analogue à ce qui se passe pour les objets canoniques d'un type.
- Précisément, si on identifie chaque proposition à la classe de ses preuves, on voit que du point de vue intuitionniste, les constantes logiques correspondent exactement aux opérations de constructions de types propres à $\mathcal{T}$.
- Un exemple : la proposition $A \Rightarrow B$ est du point de vue intuitionniste la classe des fonctions de $A$ dans $B$, ce qui correspond exactement à la construction du type $A \rightarrow B$.

# proposition=type ?

- Du point de vue intuitionniste, ce qui compte pour comprendre, pour identifier une proposition, ce sont ses preuves canoniques.
- Ce que sont les preuves canoniques d'une proposition est explicité par les règles d'introduction de la proposition de façon analogue à ce qui se passe pour les objets canoniques d'un type.
- Précisément, si on identifie chaque proposition à la classe de ses preuves, on voit que du point de vue intuitionniste, les constantes logiques correspondent exactement aux opérations de constructions de types propres à $\mathcal{T}$.
- Un exemple : la proposition $A \Rightarrow B$ est du point de vue intuitionniste la classe des fonctions de $A$ dans $B$, ce qui correspond exactement à la construction du type $A \rightarrow B$.

# proposition=type ?

- Du point de vue intuitionniste, ce qui compte pour comprendre, pour identifier une proposition, ce sont ses preuves canoniques.
- Ce que sont les preuves canoniques d'une proposition est explicité par les règles d'introduction de la proposition de façon analogue à ce qui se passe pour les objets canoniques d'un type.
- Précisément, si on identifie chaque proposition à la classe de ses preuves, on voit que du point de vue intuitionniste, les constantes logiques correspondent exactement aux opérations de constructions de types propres à $\mathcal{T}$.
- Un exemple : la proposition $A \Rightarrow B$ est du point de vue intuitionniste la classe des fonctions de $A$ dans $B$, ce qui correspond exactement à la construction du type $A \to B$.

# proposition=type ?

- Du point de vue intuitionniste, ce qui compte pour comprendre, pour identifier une proposition, ce sont ses preuves canoniques.
- Ce que sont les preuves canoniques d'une proposition est explicité par les règles d'introduction de la proposition de façon analogue à ce qui se passe pour les objets canoniques d'un type.
- Précisément, si on identifie chaque proposition à la classe de ses preuves, on voit que du point de vue intuitionniste, les constantes logiques correspondent exactement aux opérations de constructions de types propres à $\mathcal{T}$.
- Un exemple : la proposition $A \Rightarrow B$ est du point de vue intuitionniste la classe des fonctions de $A$ dans $B$, ce qui correspond exactement à la construction du type $A \to B$.

- Il est ainsi possible d'identifier chaque proposition $A$ à un type noté lui aussi $A$. Il faut comprendre que dire que $p : A$, c'est dire que $p$ est une preuve de la proposition $A$. Lorsqu'un type $A$ est identifié à une proposition, on dit que les objets de type $A$ sont les objets-preuves de $A$.
- La proposition absurde $\perp$ s'identifie naturellement au type vide $\emptyset$. On en déduit que la négation $\neg A$, qui est la proposition $A \Rightarrow \perp$, s'identifie au type $A \rightarrow \emptyset$.
- Autre exemple avec la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ :

elle se développe en $\quad A \Rightarrow ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$

qui s'identifie au type $\quad A \rightarrow ((A \rightarrow \emptyset) \rightarrow \emptyset)$

qui possède l'objet $\quad (\lambda x)((\lambda f)f(x))$

- Il est ainsi possible d'identifier chaque proposition $A$ à un type noté lui aussi $A$. Il faut comprendre que dire que $p : A$, c'est dire que $p$ est une preuve de la proposition $A$. Lorsqu'un type $A$ est identifié à une proposition, on dit que les objets de type $A$ sont les objets-preuves de $A$.
- La proposition absurde $\perp$ s'identifie naturellement au type vide $\emptyset$. On en déduit que la négation $\neg A$, qui est la proposition $A \Rightarrow \perp$, s'identifie au type $A \to \emptyset$.
- Autre exemple avec la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ :

elle se développe en $\quad A \Rightarrow ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$

qui s'identifie au type $\quad A \to ((A \to \emptyset) \to \emptyset)$

qui possède l'objet $\quad (\lambda x)((\lambda f)f(x))$

- Il est ainsi possible d'identifier chaque proposition $A$ à un type noté lui aussi $A$. Il faut comprendre que dire que $p : A$, c'est dire que $p$ est une preuve de la proposition $A$. Lorsqu'un type $A$ est identifié à une proposition, on dit que les objets de type $A$ sont les objets-preuves de $A$.
- La proposition absurde $\perp$ s'identifie naturellement au type vide $\emptyset$. On en déduit que la négation $\neg A$, qui est la proposition $A \Rightarrow \perp$, s'identifie au type $A \to \emptyset$.
- Autre exemple avec la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ :

elle se développe en $\quad A \Rightarrow ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$

qui s'identifie au type $\quad A \to ((A \to \emptyset) \to \emptyset)$

qui possède l'objet $\quad (\lambda x)((\lambda f)f(x))$

- Il est ainsi possible d'identifier chaque proposition $A$ à un type noté lui aussi $A$. Il faut comprendre que dire que $p : A$, c'est dire que $p$ est une preuve de la proposition $A$. Lorsqu'un type $A$ est identifié à une proposition, on dit que les objets de type $A$ sont les objets-preuves de $A$.
- La proposition absurde $\perp$ s'identifie naturellement au type vide $\emptyset$. On en déduit que la négation $\neg A$, qui est la proposition $A \Rightarrow \perp$, s'identifie au type $A \to \emptyset$.
- Autre exemple avec la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ :

elle se développe en $A \Rightarrow ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$

qui s'identifie au type $A \to ((A \to \emptyset) \to \emptyset)$

qui possède l'objet $(\lambda x)((\lambda f)f(x))$

- Il est ainsi possible d'identifier chaque proposition $A$ à un type noté lui aussi $A$. Il faut comprendre que dire que $p : A$, c'est dire que $p$ est une preuve de la proposition $A$. Lorsqu'un type $A$ est identifié à une proposition, on dit que les objets de type $A$ sont les objets-preuves de $A$.
- La proposition absurde $\perp$ s'identifie naturellement au type vide $\emptyset$. On en déduit que la négation $\neg A$, qui est la proposition $A \Rightarrow \perp$, s'identifie au type $A \to \emptyset$.
- Autre exemple avec la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ :

elle se développe en $\quad A \Rightarrow ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$

qui s'identifie au type $\quad A \to ((A \to \emptyset) \to \emptyset)$

qui possède l'objet $\quad (\lambda x)((\lambda f) f(x))$

- Il est ainsi possible d'identifier chaque proposition $A$ à un type noté lui aussi $A$. Il faut comprendre que dire que $p : A$, c'est dire que $p$ est une preuve de la proposition $A$. Lorsqu'un type $A$ est identifié à une proposition, on dit que les objets de type $A$ sont les objets-preuves de $A$.
- La proposition absurde $\perp$ s'identifie naturellement au type vide $\emptyset$. On en déduit que la négation $\neg A$, qui est la proposition $A \Rightarrow \perp$, s'identifie au type $A \to \emptyset$.
- Autre exemple avec la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ :

elle se développe en $\quad A \Rightarrow ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$

qui s'identifie au type $\quad A \to ((A \to \emptyset) \to \emptyset)$

qui possède l'objet $\quad (\lambda x)((\lambda f)f(x))$

- Il est ainsi possible d'identifier chaque proposition $A$ à un type noté lui aussi $A$. Il faut comprendre que dire que $p : A$, c'est dire que $p$ est une preuve de la proposition $A$. Lorsqu'un type $A$ est identifié à une proposition, on dit que les objets de type $A$ sont les objets-preuves de $A$.
- La proposition absurde $\perp$ s'identifie naturellement au type vide $\emptyset$. On en déduit que la négation $\neg A$, qui est la proposition $A \Rightarrow \perp$, s'identifie au type $A \to \emptyset$.
- Autre exemple avec la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ :

elle se développe en $\quad A \Rightarrow ((A \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp)$

qui s'identifie au type $\quad A \to ((A \to \emptyset) \to \emptyset)$

qui possède l'objet $\quad (\lambda x)((\lambda f)f(x))$

# Vérité d'une proposition

- Une proposition $A$ est vraie si on en connait un objet-preuve. Cela revient à dire que, vu comme un type, $A$ est habité (constructivement non vide).
- Par exemple, la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ est vraie car on lui a trouvé l'élément (l'objet-preuve) $(\lambda x)((\lambda f)f(x))$.
- L'affirmation qu'une proposition $B$ est vraie est une forme faible de jugement dont la forme complète est $b : B$ où $b$ est un objet-preuve explicite. Exemple d'un tel jugement :

$$(\lambda x)((\lambda f)f(x)) \ : (A \ \Rightarrow \neg(\neg A))$$

- On peut montrer que la proposition $\neg(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ est vraie. Mais pour cela, il faut préciser ce qu'est l'égalité dans $\mathcal{T}$.

# Vérité d'une proposition

- Une proposition $A$ est vraie si on en connait un objet-preuve. Cela revient à dire que, vu comme un type, $A$ est habité (constructivement non vide).
- Par exemple, la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ est vraie car on lui a trouvé l'élément (l'objet-preuve) $(\lambda x)((\lambda f)f(x))$.
- L'affirmation qu'une proposition $B$ est vraie est une forme faible de jugement dont la forme complète est $b : B$ où $b$ est un objet-preuve explicite. Exemple d'un tel jugement :

$$(\lambda x)((\lambda f)f(x)) \ : (A \ \Rightarrow \neg(\neg A))$$

- On peut montrer que la proposition $\neg(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ est vraie. Mais pour cela, il faut préciser ce qu'est l'égalité dans $\mathcal{T}$.

# Vérité d'une proposition

- Une proposition $A$ est vraie si on en connait un objet-preuve. Cela revient à dire que, vu comme un type, $A$ est habité (constructivement non vide).
- Par exemple, la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ est vraie car on lui a trouvé l'élément (l'objet-preuve) $(\lambda x)((\lambda f)f(x))$.
- L'affirmation qu'une proposition $B$ est vraie est une forme faible de jugement dont la forme complète est $b : B$ où $b$ est un objet-preuve explicite. Exemple d'un tel jugement :

$$(\lambda x)((\lambda f)f(x)) \ : (A \ \Rightarrow \neg(\neg A))$$

- On peut montrer que la proposition $\neg(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ est vraie. Mais pour cela, il faut préciser ce qu'est l'égalité dans $\mathcal{T}$.

# Vérité d'une proposition

- Une proposition $A$ est vraie si on en connait un objet-preuve. Cela revient à dire que, vu comme un type, $A$ est habité (constructivement non vide).
- Par exemple, la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ est vraie car on lui a trouvé l'élément (l'objet-preuve) $(\lambda x)((\lambda f)f(x))$.
- L'affirmation qu'une proposition $B$ est vraie est une forme faible de jugement dont la forme complète est $b : B$ où $b$ est un objet-preuve explicite. Exemple d'un tel jugement :

$$(\lambda x)((\lambda f)f(x)) \ : (A \ \Rightarrow \neg(\neg A))$$

- On peut montrer que la proposition $\neg(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ est vraie. Mais pour cela, il faut préciser ce qu'est l'égalité dans $\mathcal{T}$.

# Vérité d'une proposition

- Une proposition $A$ est vraie si on en connait un objet-preuve. Cela revient à dire que, vu comme un type, $A$ est habité (constructivement non vide).
- Par exemple, la proposition $A \Rightarrow \neg(\neg A)$ est vraie car on lui a trouvé l'élément (l'objet-preuve) $(\lambda x)((\lambda f)f(x))$.
- L'affirmation qu'une proposition $B$ est vraie est une forme faible de jugement dont la forme complète est $b : B$ où $b$ est un objet-preuve explicite. Exemple d'un tel jugement :

$$(\lambda x)((\lambda f)f(x)) \ : (A \ \Rightarrow \neg(\neg A))$$

- On peut montrer que la proposition $\neg(\exists x : \mathbb{N})\ (0 = \mathrm{S}(x))$ est vraie. Mais pour cela, il faut préciser ce qu'est l'égalité dans $\mathcal{T}$.

# Plan de l'exposé

# Deux notions d'égalité dans $\mathcal{T}$

- Habituellement, l'égalité est conçue comme une notion primitive transparente et sans mystère.
- Dans $\mathcal{T}$, l'égalité se scinde en deux notions dotées de statuts et de modes de fonctionnement radicalement différents.
- A première vue, le mathématicien peut n'y voir qu'une contrainte formelle supplémentaire, source de difficultés et de lourdeurs dans l'élaboration des preuves.
- Si elle n'est pas dénuée de fondements, cette première réaction est trompeuse : en fait, cette caractéristique de $\mathcal{T}$ se révèle être la source d'une richesse expressive étonnante :
  - La très récente théorie homotopique des types de Voevodsky est basée sur elle.
  - De même pour la théorie des types nonstandard initiée par Martin-Löf et sur laquelle je travaille actuellement.

# Deux notions d'égalité dans $\mathcal{T}$

- Habituellement, l'égalité est conçue comme une notion primitive transparente et sans mystère.
- Dans $\mathcal{T}$, l'égalité se scinde en deux notions dotées de statuts et de modes de fonctionnement radicalement différents.
- A première vue, le mathématicien peut n'y voir qu'une contrainte formelle supplémentaire, source de difficultés et de lourdeurs dans l'élaboration des preuves.
- Si elle n'est pas dénuée de fondements, cette première réaction est trompeuse : en fait, cette caractéristique de $\mathcal{T}$ se révèle être la source d'une richesse expressive étonnante :
  - La très récente théorie homotopique des types de Voevodsky est basée sur elle.
  - De même pour la théorie des types nonstandard initiée par Martin-Löf et sur laquelle je travaille actuellement.

# Deux notions d'égalité dans $\mathcal{T}$

- Habituellement, l'égalité est conçue comme une notion primitive transparente et sans mystère.
- Dans $\mathcal{T}$, l'égalité se scinde en deux notions dotées de statuts et de modes de fonctionnement radicalement différents.
- A première vue, le mathématicien peut n'y voir qu'une contrainte formelle supplémentaire, source de difficultés et de lourdeurs dans l'élaboration des preuves.
- Si elle n'est pas dénuée de fondements, cette première réaction est trompeuse : en fait, cette caractéristique de $\mathcal{T}$ se révèle être la source d'une richesse expressive étonnante :
  - La très récente théorie homotopique des types de Voevodsky est basée sur elle.
  - De même pour la théorie des types nonstandard initiée par Martin-Löf et sur laquelle je travaille actuellement.

# Deux notions d'égalité dans $\mathcal{T}$

- Habituellement, l'égalité est conçue comme une notion primitive transparente et sans mystère.
- Dans $\mathcal{T}$, l'égalité se scinde en deux notions dotées de statuts et de modes de fonctionnement radicalement différents.
- A première vue, le mathématicien peut n'y voir qu'une contrainte formelle supplémentaire, source de difficultés et de lourdeurs dans l'élaboration des preuves.
- Si elle n'est pas dénuée de fondements, cette première réaction est trompeuse : en fait, cette caractéristique de $\mathcal{T}$ se révèle être la source d'une richesse expressive étonnante :
  - La très récente théorie homotopique des types de Voevodsky est basée sur elle.
  - De même pour la théorie des types nonstandard initiée par Martin-Löf et sur laquelle je travaille actuellement.

# Deux notions d'égalité dans $\mathcal{T}$

- Habituellement, l'égalité est conçue comme une notion primitive transparente et sans mystère.
- Dans $\mathcal{T}$, l'égalité se scinde en deux notions dotées de statuts et de modes de fonctionnement radicalement différents.
- A première vue, le mathématicien peut n'y voir qu'une contrainte formelle supplémentaire, source de difficultés et de lourdeurs dans l'élaboration des preuves.
- Si elle n'est pas dénuée de fondements, cette première réaction est trompeuse : en fait, cette caractéristique de $\mathcal{T}$ se révèle être la source d'une richesse expressive étonnante :
  - La très récente théorie homotopique des types de Voevodsky est basée sur elle.
  - De même pour la théorie des types nonstandard initiée par Martin-Löf et sur laquelle je travaille actuellement.

# Deux notions d'égalité dans $\mathcal{T}$

- Habituellement, l'égalité est conçue comme une notion primitive transparente et sans mystère.
- Dans $\mathcal{T}$, l'égalité se scinde en deux notions dotées de statuts et de modes de fonctionnement radicalement différents.
- A première vue, le mathématicien peut n'y voir qu'une contrainte formelle supplémentaire, source de difficultés et de lourdeurs dans l'élaboration des preuves.
- Si elle n'est pas dénuée de fondements, cette première réaction est trompeuse : en fait, cette caractéristique de $\mathcal{T}$ se révèle être la source d'une richesse expressive étonnante :
  - La très récente théorie homotopique des types de Voevodsky est basée sur elle.
  - De même pour la théorie des types nonstandard initiée par Martin-Löf et sur laquelle je travaille actuellement.

# Deux notions d'égalité dans $\mathcal{T}$

- Habituellement, l'égalité est conçue comme une notion primitive transparente et sans mystère.
- Dans $\mathcal{T}$, l'égalité se scinde en deux notions dotées de statuts et de modes de fonctionnement radicalement différents.
- A première vue, le mathématicien peut n'y voir qu'une contrainte formelle supplémentaire, source de difficultés et de lourdeurs dans l'élaboration des preuves.
- Si elle n'est pas dénuée de fondements, cette première réaction est trompeuse : en fait, cette caractéristique de $\mathcal{T}$ se révèle être la source d'une richesse expressive étonnante :
  - La très récente théorie homotopique des types de Voevodsky est basée sur elle.
  - De même pour la théorie des types nonstandard initiée par Martin-Löf et sur laquelle je travaille actuellement.

# L'égalité par définition

- L'égalité définitionnelle ou égalité par définition est la forme d'égalité qui intervient dans les jugements. Chaque type est doté d'une égalité définitionnelle.
  Notation : $a = b : A$.
- Un cas simple mais significatif d'égalité définitionnelle : lorsque l'on introduit un nom pour un objet préalablement construit. Par exemple :

$$f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

  On en déduit que

$$f(2) = 2^2 : \mathbb{N}$$

- En ce sens, tout texte de mathématiques est truffé d'égalités définitionnelles. Jusqu'à Martin-Löf, personne n'avait accordé la moindre importance à ces égalités définitionnelles.

# L'égalité par définition

- L'égalité définitionnelle ou égalité par définition est la forme d'égalité qui intervient dans les jugements. Chaque type est doté d'une égalité définitionnelle.
  Notation : $a = b : A$.
- Un cas simple mais significatif d'égalité définitionnelle : lorsque l'on introduit un nom pour un objet préalablement construit. Par exemple :
  $$f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
  On en déduit que
  $$f(2) = 2^2 : \mathbb{N}$$
- En ce sens, tout texte de mathématiques est truffé d'égalités définitionnelles. Jusqu'à Martin-Löf, personne n'avait accordé la moindre importance à ces égalités définitionnelles.

# L'égalité par définition

- L'égalité définitionnelle ou égalité par définition est la forme d'égalité qui intervient dans les jugements. Chaque type est doté d'une égalité définitionnelle.
  Notation : $a = b : A$.
- Un cas simple mais significatif d'égalité définitionnelle : lorsque l'on introduit un nom pour un objet préalablement construit. Par exemple :
  $$f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
  On en déduit que
  $$f(2) = 2^2 : \mathbb{N}$$
- En ce sens, tout texte de mathématiques est truffé d'égalités définitionnelles. Jusqu'à Martin-Löf, personne n'avait accordé la moindre importance à ces égalités définitionnelles.

# L'égalité par définition

- L'égalité définitionnelle ou égalité par définition est la forme d'égalité qui intervient dans les jugements. Chaque type est doté d'une égalité définitionnelle.
  Notation : $a = b : A$.
- Un cas simple mais significatif d'égalité définitionnelle : lorsque l'on introduit un nom pour un objet préalablement construit. Par exemple :

$$f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

On en déduit que

$$f(2) = 2^2 : \mathbb{N}$$

- En ce sens, tout texte de mathématiques est truffé d'égalités définitionnelles. Jusqu'à Martin-Löf, personne n'avait accordé la moindre importance à ces égalités définitionnelles.

# L'égalité par définition

- L'égalité définitionnelle ou égalité par définition est la forme d'égalité qui intervient dans les jugements. Chaque type est doté d'une égalité définitionnelle.
  Notation : $a = b : A$.
- Un cas simple mais significatif d'égalité définitionnelle : lorsque l'on introduit un nom pour un objet préalablement construit. Par exemple :

$$f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

  On en déduit que

$$f(2) = 2^2 : \mathbb{N}$$

- En ce sens, tout texte de mathématiques est truffé d'égalités définitionnelles. Jusqu'à Martin-Löf, personne n'avait accordé la moindre importance à ces égalités définitionnelles.

# L'égalité par définition

- L'égalité définitionnelle ou égalité par définition est la forme d'égalité qui intervient dans les jugements. Chaque type est doté d'une égalité définitionnelle.
  Notation : $a = b : A$.
- Un cas simple mais significatif d'égalité définitionnelle : lorsque l'on introduit un nom pour un objet préalablement construit. Par exemple :
  $$f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
  On en déduit que
  $$f(2) = 2^2 : \mathbb{N}$$
- En ce sens, tout texte de mathématiques est truffé d'égalités définitionnelles. Jusqu'à Martin-Löf, personne n'avait accordé la moindre importance à ces égalités définitionnelles.

# L'égalité définitionnelle

- On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par une induction de sorte que

$$\begin{cases} x + 0 & = & x : \mathbb{N} \\ x + S(y) & = & S(x + y) : \mathbb{N} \end{cases}$$

- Cet exemple illustre l'autre source d'égalités définitionnelles qui sont les règles de calcul associées à la structure inductive de chaque type.

# L'égalité définitionnelle

- On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par une induction de sorte que

$$\begin{cases} x + 0 & = & x : \mathbb{N} \\ x + S(y) & = & S(x+y) : \mathbb{N} \end{cases}$$

- Cet exemple illustre l'autre source d'égalités définitionnelles qui sont les règles de calcul associées à la structure inductive de chaque type.

# L'égalité définitionnelle

- On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par une induction de sorte que

$$\begin{cases} x+0 & = & x : \mathbb{N} \\ x+S(y) & = & S(x+y) : \mathbb{N} \end{cases}$$

- Cet exemple illustre l'autre source d'égalités définitionnelles qui sont les règles de calcul associées à la structure inductive de chaque type.

D'après Martin-Löf l'égalité définitionnelle est une relation entre des expressions linguistiques et non pas entre les objets que dénotent ces expressions, objets qui sont les mêmes.

De plus, il a énoncé la caractérisation suivante

### Caractérisation de l'égalité définitionnelle

L'égalité définitionnelle est caractérisée de manière unique par les 3 principes suivants :

1. L'attribution d'un nom à une expression est une égalité définitionnelle.
2. L'égalité définitionnelle est préservée par substitution.
3. L'égalité définitionnelle est réflexive, symétrique et transitive.

D'après Martin-Löf l'égalité définitionnelle est une relation entre des expressions linguistiques et non pas entre les objets que dénotent ces expressions, objets qui sont les mêmes.

De plus, il a énoncé la caractérisation suivante

**Caractérisation de l'égalité définitionnelle**

L'égalité définitionnelle est caractérisée de manière unique par les 3 principes suivants :

1. L'attribution d'un nom à une expression est une égalité définitionnelle.
2. L'égalité définitionnelle est préservée par substitution.
3. L'égalité définitionnelle est réflexive, symétrique et transitive.

D'après Martin-Löf l'égalité définitionnelle est une relation entre des expressions linguistiques et non pas entre les objets que dénotent ces expressions, objets qui sont les mêmes.

De plus, il a énoncé la caractérisation suivante

### Caractérisation de l'égalité définitionnelle

L'égalité définitionnelle est caractérisée de manière unique par les 3 principes suivants :

1. L'attribution d'un nom à une expression est une égalité définitionnelle.
2. L'égalité définitionnelle est préservée par substitution.
3. L'égalité définitionnelle est réflexive, symétrique et transitive.

D'après Martin-Löf l'égalité définitionnelle est une relation entre des expressions linguistiques et non pas entre les objets que dénotent ces expressions, objets qui sont les mêmes.

De plus, il a énoncé la caractérisation suivante

**Caractérisation de l'égalité définitionnelle**

L'égalité définitionnelle est caractérisée de manière unique par les 3 principes suivants :

1. L'attribution d'un nom à une expression est une égalité définitionnelle.
2. L'égalité définitionnelle est préservée par substitution.
3. L'égalité définitionnelle est réflexive, symétrique et transitive.

D'après Martin-Löf l'égalité définitionnelle est une relation entre des expressions linguistiques et non pas entre les objets que dénotent ces expressions, objets qui sont les mêmes.

De plus, il a énoncé la caractérisation suivante

### Caractérisation de l'égalité définitionnelle

L'égalité définitionnelle est caractérisée de manière unique par les 3 principes suivants :

1. L'attribution d'un nom à une expression est une égalité définitionnelle.
2. L'égalité définitionnelle est préservée par substitution.
3. L'égalité définitionnelle est réflexive, symétrique et transitive.

D'après Martin-Löf l'égalité définitionnelle est une relation entre des expressions linguistiques et non pas entre les objets que dénotent ces expressions, objets qui sont les mêmes.

De plus, il a énoncé la caractérisation suivante

**Caractérisation de l'égalité définitionnelle**

L'égalité définitionnelle est caractérisée de manière unique par les 3 principes suivants :

1. L'attribution d'un nom à une expression est une égalité définitionnelle.
2. L'égalité définitionnelle est préservée par substitution.
3. L'égalité définitionnelle est réflexive, symétrique et transitive.

# Une égalité inadaptée aux propositions

- Puisque l'égalité définitionnelle est un jugement, elle ne peut pas être utilisée comme ingrédients des propositions.
- Par exemple, une fois que j'introduis le nom $f$ par l'égalité définitionnelle $f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nier cette égalité a un drôle de sens, quelque chose du genre : je ne donne pas le nom $f$ à la fonction $(\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$...
- Plus important : il n'est pas possible en général d'appliquer un raisonnement par récurrence sur une égalité définitionnelle.
- Par exemple, dans les mathématiques classiques, on montre facilement par récurrence que $n = S^n(0)$ pour tout entier naturel $n$. Ce raisonnement ne peut pas se transposer avec l'égalité définitionnelle : il n'est pas possible d'établir le jugement $n = S^n(0) : \mathbb{N}$ dépendant du contexte $[n : \mathbb{N}]$.

# Une égalité inadaptée aux propositions

- Puisque l'égalité définitionnelle est un jugement, elle ne peut pas être utilisée comme ingrédients des propositions.
- Par exemple, une fois que j'introduis le nom $f$ par l'égalité définitionnelle $f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nier cette égalité a un drôle de sens, quelque chose du genre : je ne donne pas le nom $f$ à la fonction $(\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$...
- Plus important : il n'est pas possible en général d'appliquer un raisonnement par récurrence sur une égalité définitionnelle.
- Par exemple, dans les mathématiques classiques, on montre facilement par récurrence que $n = S^n(0)$ pour tout entier naturel $n$. Ce raisonnement ne peut pas se transposer avec l'égalité définitionnelle : il n'est pas possible d'établir le jugement $n = S^n(0) : \mathbb{N}$ dépendant du contexte $[n : \mathbb{N}]$.

# Une égalité inadaptée aux propositions

- Puisque l'égalité définitionnelle est un jugement, elle ne peut pas être utilisée comme ingrédients des propositions.
- Par exemple, une fois que j'introduis le nom $f$ par l'égalité définitionnelle $f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nier cette égalité a un drôle de sens, quelque chose du genre : je ne donne pas le nom $f$ à la fonction $(\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$...
- Plus important : il n'est pas possible en général d'appliquer un raisonnement par récurrence sur une égalité définitionnelle.
- Par exemple, dans les mathématiques classiques, on montre facilement par récurrence que $n = S^n(0)$ pour tout entier naturel $n$. Ce raisonnement ne peut pas se transposer avec l'égalité définitionnelle : il n'est pas possible d'établir le jugement $n = S^n(0) : \mathbb{N}$ dépendant du contexte $[n : \mathbb{N}]$.

# Une égalité inadaptée aux propositions

- Puisque l'égalité définitionnelle est un jugement, elle ne peut pas être utilisée comme ingrédients des propositions.
- Par exemple, une fois que j'introduis le nom $f$ par l'égalité définitionnelle $f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nier cette égalité a un drôle de sens, quelque chose du genre : je ne donne pas le nom $f$ à la fonction $(\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$...
- Plus important : il n'est pas possible en général d'appliquer un raisonnement par récurrence sur une égalité définitionnelle.
- Par exemple, dans les mathématiques classiques, on montre facilement par récurrence que $n = S^n(0)$ pour tout entier naturel $n$. Ce raisonnement ne peut pas se transposer avec l'égalité définitionnelle : il n'est pas possible d'établir le jugement $n = S^n(0) : \mathbb{N}$ dépendant du contexte $[n : \mathbb{N}]$.

# Une égalité inadaptée aux propositions

- Puisque l'égalité définitionnelle est un jugement, elle ne peut pas être utilisée comme ingrédients des propositions.
- Par exemple, une fois que j'introduis le nom $f$ par l'égalité définitionnelle $f = (\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nier cette égalité a un drôle de sens, quelque chose du genre : je ne donne pas le nom $f$ à la fonction $(\lambda x)x^2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$...
- Plus important : il n'est pas possible en général d'appliquer un raisonnement par récurrence sur une égalité définitionnelle.
- Par exemple, dans les mathématiques classiques, on montre facilement par récurrence que $n = S^n(0)$ pour tout entier naturel $n$. Ce raisonnement ne peut pas se transposer avec l'égalité définitionnelle : il n'est pas possible d'établir le jugement $n = S^n(0) : \mathbb{N}$ dépendant du contexte $[n : \mathbb{N}]$.

# L'égalité propositionnelle

- On introduit une nouvelle égalité dans $\mathcal{T}$ : l'égalité propositionnelle.
- Cette égalité est définie comme un nouveau type dépendant de 3 données. Chaque fois que l'on se donne un type $A$ et deux objets $a, b$ de type $A$, on dispose d'un nouveau type (ou proposition si on préfère)

$$(a =_A b) \quad \text{type}$$

- Quels sont les objets canoniques de ce type ? Ils sont donnés par la règle d'introduction : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$, on déduit un élément $\mathrm{refl}(a)$ tel que $\mathrm{refl}(a) : (a =_A b)$.
- Ce qui précède peut se dire ainsi : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$ on peut déduire la vérité de l'égalité propositionnelle $(a =_A b)$ puisque $\mathrm{refl}(a)$ est un objet-preuve.

# L'égalité propositionnelle

- On introduit une nouvelle égalité dans $\mathcal{T}$ : l'égalité propositionnelle.
- Cette égalité est définie comme un nouveau type dépendant de 3 données. Chaque fois que l'on se donne un type $A$ et deux objets $a, b$ de type $A$, on dispose d'un nouveau type (ou proposition si on préfère)

$$(a =_A b) \ \ \mathrm{type}$$

- Quels sont les objets canoniques de ce type ? Ils sont donnés par la règle d'introduction : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$, on déduit un élément $\mathrm{refl}(a)$ tel que $\mathrm{refl}(a) : (a =_A b)$.
- Ce qui précède peut se dire ainsi : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$ on peut déduire la vérité de l'égalité propositionnelle $(a =_A b)$ puisque $\mathrm{refl}(a)$ est un objet-preuve.

# L'égalité propositionnelle

- On introduit une nouvelle égalité dans $\mathcal{T}$ : l'égalité propositionnelle.
- Cette égalité est définie comme un nouveau type dépendant de 3 données. Chaque fois que l'on se donne un type $A$ et deux objets $a, b$ de type $A$, on dispose d'un nouveau type (ou proposition si on préfère)

$$(a =_A b) \quad \text{type}$$

- Quels sont les objets canoniques de ce type ? Ils sont donnés par la règle d'introduction : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$, on déduit un élément $\mathrm{refl}(a)$ tel que $\mathrm{refl}(a) : (a =_A b)$.
- Ce qui précède peut se dire ainsi : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$ on peut déduire la vérité de l'égalité propositionnelle $(a =_A b)$ puisque $\mathrm{refl}(a)$ est un objet-preuve.

# L'égalité propositionnelle

- On introduit une nouvelle égalité dans $\mathcal{T}$ : l'égalité propositionnelle.
- Cette égalité est définie comme un nouveau type dépendant de 3 données. Chaque fois que l'on se donne un type $A$ et deux objets $a, b$ de type $A$, on dispose d'un nouveau type (ou proposition si on préfère)

$$(a =_A b) \ \ \mathrm{type}$$

- Quels sont les objets canoniques de ce type ? Ils sont donnés par la règle d'introduction : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$, on déduit un élément $\mathrm{refl}(a)$ tel que $\mathrm{refl}(a) : (a =_A b)$.
- Ce qui précède peut se dire ainsi : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$ on peut déduire la vérité de l'égalité propositionnelle $(a =_A b)$ puisque $\mathrm{refl}(a)$ est un objet-preuve.

# L'égalité propositionnelle

- On introduit une nouvelle égalité dans $\mathcal{T}$ : l'égalité propositionnelle.
- Cette égalité est définie comme un nouveau type dépendant de 3 données. Chaque fois que l'on se donne un type $A$ et deux objets $a, b$ de type $A$, on dispose d'un nouveau type (ou proposition si on préfère)

$$(a =_A b) \ \ \mathrm{type}$$

- Quels sont les objets canoniques de ce type ? Ils sont donnés par la règle d'introduction : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$, on déduit un élément $\mathrm{refl}(a)$ tel que $\mathrm{refl}(a) : (a =_A b)$.
- Ce qui précède peut se dire ainsi : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$ on peut déduire la vérité de l'égalité propositionnelle $(a =_A b)$ puisque $\mathrm{refl}(a)$ est un objet-preuve.

# L'égalité propositionnelle

- On introduit une nouvelle égalité dans $\mathcal{T}$ : l'égalité propositionnelle.
- Cette égalité est définie comme un nouveau type dépendant de 3 données. Chaque fois que l'on se donne un type $A$ et deux objets $a, b$ de type $A$, on dispose d'un nouveau type (ou proposition si on préfère)

$$(a =_A b) \;\; \mathrm{type}$$

- Quels sont les objets canoniques de ce type ? Ils sont donnés par la règle d'introduction : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$, on déduit un élément $\mathrm{refl}(a)$ tel que $\mathrm{refl}(a) : (a =_A b)$.
- Ce qui précède peut se dire ainsi : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$ on peut déduire la vérité de l'égalité propositionnelle $(a =_A b)$ puisque $\mathrm{refl}(a)$ est un objet-preuve.

# L'égalité propositionnelle

- On introduit une nouvelle égalité dans $\mathcal{T}$ : l'égalité propositionnelle.
- Cette égalité est définie comme un nouveau type dépendant de 3 données. Chaque fois que l'on se donne un type $A$ et deux objets $a, b$ de type $A$, on dispose d'un nouveau type (ou proposition si on préfère)

$$(a =_A b) \ \ \mathrm{type}$$

- Quels sont les objets canoniques de ce type ? Ils sont donnés par la règle d'introduction : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$, on déduit un élément $\mathrm{refl}(a)$ tel que $\mathrm{refl}(a) : (a =_A b)$.
- Ce qui précède peut se dire ainsi : de l'égalité définitionnelle $(a = b : A)$ on peut déduire la vérité de l'égalité propositionnelle $(a =_A b)$ puisque $\mathrm{refl}(a)$ est un objet-preuve.

- Le dernier point démontré peut se résumer grossièrement par : l'égalité définitionnelle implique l'égalité propositionnelle.
- On pourrait espérer que la réciproque est valide. Il en est rien !
- On a vu que $x + 0 = x : \mathbb{N}$ ; c'est la définition même de $x + y$ qui se fait par récurrence sur la variable en 2eme position, ici $y$.
- On peut démontrer que $0 + x =_{\mathbb{N}} x$ est vraie en construisant par récurrence sur la variable $x$ un objet-preuve de cette proposition $p_x : (0 + x =_{\mathbb{N}} x)$.
  Mais il n'y a aucune raison pour que $0 + x = x : \mathbb{N}$.
- Cette absence d'équivalence entre les deux formes d'égalité est certainement troublante lorsque l'on est habitué aux facilités de la conception classique de l'égalité.

- Le dernier point démontré peut se résumer grossièrement par : l'égalité définitionnelle implique l'égalité propositionnelle.
- On pourrait espérer que la réciproque est valide. Il en est rien !
- On a vu que $x + 0 = x : \mathbb{N}$ ; c'est la définition même de $x + y$ qui se fait par récurrence sur la variable en 2eme position, ici $y$.
- On peut démontrer que $0 + x =_{\mathbb{N}} x$ est vraie en construisant par récurrence sur la variable $x$ un objet-preuve de cette proposition $p_x : (0 + x =_{\mathbb{N}} x)$.
  Mais il n'y a aucune raison pour que $0 + x = x : \mathbb{N}$.
- Cette absence d'équivalence entre les deux formes d'égalité est certainement troublante lorsque l'on est habitué aux facilités de la conception classique de l'égalité.

- Le dernier point démontré peut se résumer grossièrement par : l'égalité définitionnelle implique l'égalité propositionnelle.
- On pourrait espérer que la réciproque est valide. Il en est rien !
- On a vu que $x + 0 = x : \mathbb{N}$ ; c'est la définition même de $x + y$ qui se fait par récurrence sur la variable en 2eme position, ici $y$.
- On peut démontrer que $0 + x =_{\mathbb{N}} x$ est vraie en construisant par récurrence sur la variable $x$ un objet-preuve de cette proposition $p_x : (0 + x =_{\mathbb{N}} x)$.
  Mais il n'y a aucune raison pour que $0 + x = x : \mathbb{N}$.
- Cette absence d'équivalence entre les deux formes d'égalité est certainement troublante lorsque l'on est habitué aux facilités de la conception classique de l'égalité.

- Le dernier point démontré peut se résumer grossièrement par : l'égalité définitionnelle implique l'égalité propositionnelle.
- On pourrait espérer que la réciproque est valide. Il en est rien !
- On a vu que $x + 0 = x : \mathbb{N}$ ; c'est la définition même de $x + y$ qui se fait par récurrence sur la variable en 2eme position, ici $y$.
- On peut démontrer que $0 + x =_{\mathbb{N}} x$ est vraie en construisant par récurrence sur la variable $x$ un objet-preuve de cette proposition $p_x : (0 + x =_{\mathbb{N}} x)$.
  Mais il n'y a aucune raison pour que $0 + x = x : \mathbb{N}$.
- Cette absence d'équivalence entre les deux formes d'égalité est certainement troublante lorsque l'on est habitué aux facilités de la conception classique de l'égalité.

- Le dernier point démontré peut se résumer grossièrement par : l'égalité définitionnelle implique l'égalité propositionnelle.
- On pourrait espérer que la réciproque est valide. Il en est rien !
- On a vu que $x + 0 = x : \mathbb{N}$ ; c'est la définition même de $x + y$ qui se fait par récurrence sur la variable en 2eme position, ici $y$.
- On peut démontrer que $0 + x =_{\mathbb{N}} x$ est vraie en construisant par récurrence sur la variable $x$ un objet-preuve de cette proposition $p_x : (0 + x =_{\mathbb{N}} x)$.
  Mais il n'y a aucune raison pour que $0 + x = x : \mathbb{N}$.
- Cette absence d'équivalence entre les deux formes d'égalité est certainement troublante lorsque l'on est habitué aux facilités de la conception classique de l'égalité.

- Le dernier point démontré peut se résumer grossièrement par : l'égalité définitionnelle implique l'égalité propositionnelle.
- On pourrait espérer que la réciproque est valide. Il en est rien !
- On a vu que $x + 0 = x : \mathbb{N}$ ; c'est la définition même de $x + y$ qui se fait par récurrence sur la variable en 2eme position, ici $y$.
- On peut démontrer que $0 + x =_{\mathbb{N}} x$ est vraie en construisant par récurrence sur la variable $x$ un objet-preuve de cette proposition $p_x : (0 + x =_{\mathbb{N}} x)$.
  Mais il n'y a aucune raison pour que $0 + x = x : \mathbb{N}$.
- Cette absence d'équivalence entre les deux formes d'égalité est certainement troublante lorsque l'on est habitué aux facilités de la conception classique de l'égalité.

# Petite bibliographie

- P. Martin-Löf, *About models for intuitionistic type theory and the notion of definitional equality*. in Proceeding of the third scandinavian logic symposium, North-Holland Publishing Company, 1975.
- P. Martin-Löf, *Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof*. in Synthese, 73 (F3) :407-420 (1987).
- B. Nordström, K. Petersson and J.M. Smith, *Programming in Martin-Löf Type Theory*. Oxford University Press, 1990, épuisé, accessible en ligne à l'adresse www.cs.chalmers.se.Cs.Research./Logic
- Les développements récents sur la théorie homotopique des types et en particulier le hoTT Book sont accessibles à l'adresse http ://homotopytypetheory.org/