Pour un meilleur fondement de la dynamique
Perspectivisme leibnizien analysé par Laurence Bouquiaux

N. Daher

Institut FEMTO-ST, Université de Franche Comté, CNRS

Préambule : Leibniz semble être l'un des très rares savants à avoir réussi à féconder ses mathématiques par sa métaphysique (G. G. Granger). Il est aussi l'un des pères de la dynamique, même si cela n'est pas vraiment connu par les physiciens. Il a une approche qualitative et métaphysique du monde sensible, (prolongeant le cadre particulier de la dynamique), que Laurence Bouquiaux a analysé finement des deux points de vue conceptuel et structurel (quant à certains points névralgiques). Cette analyse réduit l'immense distance qui sépare l'approche physique (très technique) de celles philosophique et historique.
L'absence d'encouragement de la part des autorités scientifiques en vue de passages explicites du « philosophique » au « physique » a fini par laisser croire que de tels ponts sont impraticables. Dans l'ouvrage collectif intitulé : « A quoi sert la philosophie des sciences » (PUF 2003), Etienne Klein regrette cet aveuglement et dénonce la suffisance des physiciens se proclamant être les seuls maîtres d'un savoir scientifique digne de ce nom. Il écrit : « … il semble que les philosophes des sciences ne soient ni de véritables philosophes, ni de véritables scientifiques. Ces gens-là se réfèrent-ils seulement à une méthodologie bien définie ? De loin, on constate plutôt qu'ils n'hésitent pas à braconner dans l'hétéroclite et l'arbitraire …. Les reproches de ce type sont si récurrents qu'ils ont fini, silencieusement, par s'agréger pour former une sorte de ritournelle antiphilosophique qui fait d'une prétendue *déraisonnable inefficacité* de la philosophie des sciences un élément fondateur de la doxa des laboratoires ».
E. Klein ajoute : « Faute d'avoir suffisamment réfléchi à la sémantique et à la terminologie qu'ils utilisent, les physiciens se trouvent trop souvent condamnés à énoncer des propositions qui en définitive ne sont ni claires ni nettement délimitées ». Après avoir illustré son propos sur le « sens trouble et confus » du mot « origine » induisant les confusions des discours des physiciens, il clôt son article par les phrases suivantes : « Et voilà comment des discours scientifiques, parce qu'ils n'ont pas suffisamment critiqué leur langage, en viennent parfois à nous faire prendre des vessies pour des lanternes. Trop longtemps séparées de leur philosophie, les sciences perdent en clarté et en honnêteté tout à la fois ».
Non seulement nous partageons l'analyse d'Etienne Klein quant au possible apport de la philosophie dans la clarification des concepts mais nous entendons démontrer aussi, comme l'affirme Dominique Lecourt (dans le même ouvrage), que la philosophie des sciences en acte peut être utile à la recherche elle-même et n'est pas un simple luxe de la pensée. Elle peut, selon lui, « aider à la recherche parce que sur un certain nombre de grandes questions telle l'idée d'unification en physique (il y a diverses sortes d'unifications, c'est moi qui précise)… il existe – qu'on le veuille ou non – un lien très étroit entre la façon dont on se saisit d'un problème – ce qu'on désigne comme une tournure d'esprit, ou un style de pensée – et l'option philosophique qu'on adopte ». A cela, il ajoute qu'une philosophie des sciences digne de ce nom doit s'ancrer sur les problèmes de la science en train de se faire. Instruite par l'histoire, elle doit contribuer à dégager des possibles pour l'avenir des recherches.
C'est précisément le cas du travail de Laurence Bouquiaux sur le perspectivisme leibnizien, applicable à la construction d'une réelle théorie du mouvement susceptible d'englober les différents modèles existants au sein d'une unité supérieure. Cette unification présente l'avantage d'éviter la « boue sémantique » attachée à la physique, en particulier autour de la

relativité einsteinienne, en raison de l'importation de concepts de l'électromagnétisme (qui a contribué à sa découverte) inappropriés à la dynamique en tant que telle. Elle évite aussi le « désordre épistémologique » provenant des débats et controverses résultant de la multiplicité des méthodes partielles et des points de vue isolés.

Résumé : Ce travail entend montrer comment le perspectivisme philosophique de Leibniz – tel qu'il est interprété par Laurence Bouquiaux – peut-être formalisé et appliqué à la dynamique. Cette application montre non seulement les limites du réductionnisme scientifique associé au mouvement mais aussi celles du perspectivisme physique, tel qu'il est exprimé au travers des quelques points de vue adoptés sur la dynamique qu'on rencontre chez un nombre croissant de physiciens et épistémologues, tels E. F. Taylor et J. A. Wheeler ou J. M. Lévy-Leblond et C. Comte. On montre que l'analyse fine du perspectivisme leibnizien, par Laurence Bouquiaux n'est pas uniquement une subtilité de philosophe : elle présente une contrepartie logique et structurelle tout à fait adaptée à un meilleur fondement de la dynamique moderne. Son approche rationnelle mais aussi et surtout relationnelle (où les différents points de vue sont solidaires se définissant les uns par les autres) permet la construction d'une **théorie** dynamique (caractérisée grâce à la coexistence de multiples perspectives) et non d'un simple **modèle** comme ceux fournis en physique (la dynamique relativiste dans ses différentes versions).
L'application de la démarche de Laurence Bouquiaux ravive le paradigme aristotélico-leibnizien, au travers de l'articulation du principe de raison suffisante au principe de relativité ; elle présente le précieux avantage d'allier le « pourquoi » au « comment », en fournissant aux différents résultats obtenus par les modèles dynamiques leur raison d'être et le principe d'ordre multiple et relationnel qui les sous-tend. Tout cela nécessite un changement radical de méthodologie, où le qualitatif retrouve sa priorité et sa capacité de générer du quantitatif grâce à la prise en compte de la distinction que Laurence Bouquiaux effectue entre les deux niveaux « métaphysique » et « physique ». Ce travail permet aussi de répondre à certaines questions qu'elle s'était posées, en particulier, en ce qui concerne les notions de « force primitive » et « force dérivative », de leur corrélation et de leur auto-consistance. La force primitive est montrée comme étant proprement métaphysique, transcendant toute mesure possible, mais constituant néanmoins la source à partir de laquelle jaillissent les forces dérivatives, les seules à pouvoir être dites physiques. La présente formalisation donne un sens précis à toute cette approche mettant en évidence la compatibilité et la pertinence de ces concepts pour un meilleur fondement de la dynamique.

Perspectivismes : physique et philosophique.

Depuis l'essor, à partir du 17ième siècle, de la dynamique (ancrée dans les problèmes de choc) non seulement différentes méthodes ont été développées sur le mouvement (approche newtonienne, formalisme lagrangien…) mais la conception même du mouvement – usuellement défini par la vitesse – s'est élargie : on se trouve, depuis la moitié du 20ième siècle, face à différentes manières de l'aborder ou de le définir (vitesse, rapidité …). Chaque choix est associé à une modalité de mesure spécifique (spatio-temporelle ou non) et renvoie à une méthodologie appropriée (formulation de Lagrange et Hamilton pour la vitesse, théorie des groupes pour la rapidité ...).

Toutes ces démarches ont en commun le fait de commencer par adopter un regard extérieur pour ordonner le monde de la dynamique avant d'accéder à son cœur, liant entre elles les entités qui se conservent. C'est là que se situe la différence entre le perspectivisme physique et celui philosophique de Leibniz analysé par Laurence Bouquiaux qui écrit [1] **: «ce que**

signifie le perspectivisme leibnizien, ce n'est pas la possibilité, pour un esprit, d'ordonner un monde qu'il contemple de l'extérieur, c'est l'exigence que toute substance exprime de l'intérieur l'ordre général du monde auquel elle appartient, c'est la solidarité de tous les êtres dans un monde où chacun n'est lui-même que par ses relations aux autres. »

Deux perspectivismes : fini-infini.
On voit là clairement la distance entre le perspectivisme de la physique et celui de Leibniz. Le premier reste fini : pas plus qu'une approche particulière, la juxtaposition des perspectives les unes aux autres ne permet d'atteindre l'infini. Par contre, le perspectivisme leibnizien est de par sa nature même infini puisqu'il va être constitué par un principe d'ordre multiple au travers d'une loi itérative fournissant automatiquement les différentes perspectives (même si seulement un nombre limité présente des caractéristiques singulières susceptibles d'être directement liées à la mesure).

Irréductibilité entre perspectivismes physique et philosophique.
La raison de cette irréductibilité [qui conduit à dénier à la pensée leibnizienne tout intérêt à partir du 18$^{\text{ième}}$ siècle faisant de lui un métaphysicien (au regard de la dynamique) et non un physicien] provient de l'héritage newtonien imposé par de nombreux savants et philosophes au travers d'une **formulation rationnelle** comme celle de Lagrange (formulation variationnelle) et du **cadre conceptuel** fourni principalement par Kant (formes a priori de la sensibilité).
Aucune proposition d'un travail analytique ou même d'un travail synthétique comme ceux de Taylor et Wheeler ou de Lévy-Leblond et Comte [2-4] ne recherche un principe d'ordre multiple susceptible de rassembler les différents modèles au sein d'une même théorie. Ce refus est non seulement dû à la méconnaissance de Leibniz et de son approche de la multiplicité des points de vue, mais aussi et surtout à la manière dont on définit usuellement la physique. C. Claude [qui, grâce à la théorie des groupes, a largement œuvré pour un fondement plus solide de la dynamique, usuellement fondée sur le formalisme de Lagrange et Hamilton] précise dans sa thèse **: « Faire de la physique, c'est (d'abord) élaborer progressivement des définitions précises des termes employés, en inventant des expériences où ils interviennent en relation avec des quantités mesurables ».**
La première brique est ainsi posée : « quantité mesurable ». La physique n'est pas perçue comme une structure au sein de laquelle l'ordre et l'harmonie l'emportent sur la mesure ; au contraire, c'est la mesure qui prime. Chez Leibniz, la priorité est inversée : Laurence Bouquiaux écrit (p.160) de la Ref. [5]: « La mathématique que projette – et, dans une certaine mesure, construit – Leibniz, c'est quelque chose comme la *Mathésis universalis* dont parle Descartes, quelque chose qui déborde la mathématique cartésienne… Cette *mathésis* ne se réduit pas à l'algèbre qui traite de la quantité en général. Elle concerne tout ce qui tombe sous l'imagination, pour autant que cela soit conçu distinctement. Elle ne traite pas seulement de la quantité mais aussi de la disposition des choses », avant d'ajouter : **« La notion d'ordre, pour être qualitative, n'en est pas moins, chez Leibniz, mathématiques. Dans la mathématique leibnizienne, la mesure est seconde par rapport à l'ordre. La vérité d'une figure réside dans son aspect qualitatif plus que dans son aspect quantitatif ».**

Certes, Leibniz parle là de mathématiques et non de physique mais gardons en mémoire que (pour lui) la mathématique ne prend toute sa valeur que dans son application à une physique comme il l'écrit dans une lettre à Huygens. Si la mathématique n'est pas un simple outil ou une forme compacte d'exprimer les choses mais elle détermine aussi une pensée sûre de ce qu'elle pense, il n'en reste pas moins qu'elle doit être précédée d'une métaphysique qui reste à la base de la « Mathésis universalis » de Leibniz.

Position du problème et précision sur les différents types d'approches.
Nous sommes aujourd'hui dans la même situation qu'au 17^{ième} siècle quant aux concepts sous-jacents à la structure de la dynamique. Les changements qui ont eu lieu (telle la relativité d'Einstein) restent dans la lignée affirmée par Newton ; rendue rationnelle progressivement par d'Alembert, Lagrange et Hamilton et justifiée conceptuellement par Kant au travers de ses formes a priori. Après que certains dont Einstein avaient cru que la dynamique relativiste ruinait la position de Kant, Cassirer [6] a montré clairement qu'il n'en est rien et que les notions que Kant a mises en place y sont toujours valables : les changements que produit la révolution einsteinienne restent confinés à l'intérieur du champ de la pensée kantienne.

Tant qu'on se contente de produire des modèles comme le font les différentes approches dynamiques (spatio-temporelles ou non) interprétant la révolution relativiste selon diverses manières exprimées chacune au travers d'un paramètre spécifique (vitesse, rapidité…), on est amené inéluctablement à imposer un a priori [7] pour la définition mouvement. C'est cela qu'on entend ici par « être kantien ». En revanche, « être leibnizien » c'est être capable d'accéder au cœur ou à l'être de la dynamique (relation quantitative entre les entités qui se conservent) sans avoir besoin de définir d'abord le mouvement de façon quantitative. C'est en restant qualitatif pour ce qui est de l'introduction du mouvement qu'on garde potentiellement une grande richesse structurelle qui sera organisée ultérieurement. En procédant ainsi, on dépasse le mécanisme, point sur lequel Laurence Bouquiaux insiste dans son article sur les aspects contemporains de la critique leibnizienne du mécanisme [8]. C'est cela qui va permettre d'introduire un principe d'ordre interne et multiple où tout se passe à l'intérieur de la structure mise en place.

Perspectivisme leibnizien appliqué à la dynamique.
Nous allons adopter le perspectivisme leibnizien et montrer la possibilité d'accès à l'« Essence » de la dynamique (relation entre les entités qui se conservent) sans avoir, au préalable, défini une quelconque « modalité d'existence » (mesure spécifique du mouvement), en nous référant à l'interprétation de Leibniz faite par Laurence Bouquiaux. Après avoir rappelés l'affirmation de Leibniz, citée par Michel Serres, établissant une différence entre la manière dont nous percevons les corps (perspective finie et conique) et la manière dont Dieu les perçoit (élévation infinie et cylindrique) elle écrit [1]: « Il faut cependant prendre garde de ne pas se laisser piéger par la métaphore. Le Dieu de Leibniz ne possède pas un *situs* particulier, fût-il à l'infini. Dieu est « hors rang ». Dire que le Dieu de Leibniz est à l'infini ne peut être qu'une manière imagée que Dieu…saisit la loi générale qui organise tous les points de vue. Si Dieu connaît tout parfaitement, ce n'est pas parce qu'il occupe un *situs* privilégié mais parce qu'il n'a pas de *situs* et qu'il ne perçoit pas le monde d'une manière déterminée : Dieu comprend parfaitement les choses parce qu'il les comprend de **toutes les manières à la fois**, tandis que nous ne les comprenons que d'une manière. Connaître comme Dieu, ce n'est **pas occuper un *situs* particulier**, c'est comprendre comment les ensembles de perceptions relatifs aux **différents *situs* constituent des cas particuliers d'une règle générale »**. A la suite de cette précision elle cite M. Serres qui écrit : « Dieu est le centre de perspective partout situé, c'est-à-dire non situé (…). Ainsi n'occupe-t-il pas de point central, point qui n'existe pas, mais tous les points à la fois (…).

Il y a là trois exigences majeures à souligner : (i) Inclusion de **toutes les manières à la fois** quant à l'approche du mouvement associées à un même monde, (ii) possibilité d'accès à un savoir précis situé au-delà de tout point de vue et donc de ne **pas occuper un *situs* particulier** et (iii) connaître comme Dieu revient à comprendre comment les **différents *situs***

constituent des cas particuliers d'une règle générale susceptible de les articuler dans une unité supérieure.

Pour la dynamique telle qu'elle a été construite historiquement (avec ses différentes versions), aucune de ces trois exigences n'est remplie. (i) on n'a pas de théories englobant à la fois une multiplicité de points de vue. (ii) Aucun accès à la loi fondamentale de la dynamique liant les lois de conservation n'est effectué sans passer par un point de vue particulier sur le mouvement et (iii) s'il y a des synthèses possibles comme celles de Taylor, Wheeler, Comte et Lévy-Leblond [2-4], il n'y a en revanche, aucune règle susceptible d'articuler les différents points de vues les uns aux autres obtenant ainsi une connaissance supérieure. Ce type de considérations provient de la croyance de Leibniz en « l'univocité de l'être » où l'entendement humain reste de même nature que l'entendement divin, n'en différant que par degré (à l'opposé de Descartes et Kant pour qui la différence est de nature et non de degré. (Nos deux philosophes adoptent la position qui revient à affirmer que les **voies du seigneur sont impénétrables** contrairement à Leibniz). Il convient d'insister sur le fait que pour y pénétrer il faut enrichir la méthode analytique **exclusive** (les différentes propositions s'enchaînent les unes aux autres séquentiellement sans aucun parallélisme) par l'introduction d'une nouvelle logique, **inclusive** cette fois-ci, qui n'annule pas la précédente mais l'inclut en son sein comme une branche dans un arbre ou plus précisément comme une courbe dans un faisceau de courbes convergeant vers un point fixe selon une tangente commune.

Logique inclusive : La démarche sur le perspectivisme de Leibniz présentée par Laurence Bouquiaux requiert donc l'introduction d'une logique inclusive associée aux points de vue, devant inclure la logique exclusive habituelle des approches analytiques. Leibniz avait lui-même précisé que la logique à laquelle il pensait dépasserait de loin la logique usuelle avec laquelle on rend compte usuellement de la réalité naturelle. Laurence Bouquiaux rappelle ([5] p. 59, en bas de page) cette phrase de Leibniz : « Toutes les logiques que nous avons eues jusqu'ici sont à peine l'ombre de ce que je souhaite et que je vois comme de loin ». Leibniz n'a pas construit une telle logique inclusive dans son étude sur la dynamique ; mais elle s'impose, dès lors qu'on cherche à considérer simultanément une multiplicité de points de vue sur une réalité donnée (ici la dynamique).

Remarque de Laurence Bouquiaux en rapport à la logique et aux mathématiques.
Avant d'entrer dans la formalisation proprement dite, je voudrais commenter une remarque de Laurence Bouquiaux, concernant la conception de Leibniz des mathématiques d'une part et de la logique de l'autre ; d'autant plus que c'est le cadre de la dynamique tel qu'il se présente à Leibniz au 17$^{\text{ième}}$ siècle qui va nous être utile à cet égard. Laurence Bouquiaux fournit deux affirmations de Leibniz qu'elle considère comme étant, en quelque sorte, contradictoires. L'une souligne l'insuffisance de la logique usuelle, alors que l'autre déclare (même page que ci-dessus concernant la logique): « Maintenant, je crois que la mathématique pure est enfin achevée, savoir celle qui contient les nombres, les figures et les mouvements… ». Placer face à face ces deux affirmations sans intermédiaire conduit effectivement à l'étonnement. En revanche, si l'on inclut l'étude des dynamiques (Descartes, Huygens et Newton) telle qu'elles se présentaient à Leibniz, on s'aperçoit que ces dynamiques n'utilisent que des formes extrêmement réduites par rapport aux potentialités présentes dans son calcul différentiel et intégral (étendant les fonctions algébriques de Descartes aux fonctions transcendantes et construisant des familles de courbes ayant localement une même tangente…). Ainsi, non seulement les dynamiques de son époque apparaissent comme de simples gouttes dans l'océan de son calcul infinitésimal, mais le passage de telles dynamiques, d'une pauvreté structurelle extrême, à une dynamique supérieure susceptible de les englober ne peut se faire

sans le développement de nouvelles logiques. Ces logiques restent associées directement au calcul différentiel et intégral sans avoir besoin de l'étendre. C'est à l'intérieur même de ce calcul qu'on peut concevoir différentes logiques exclusives et inclusives, comme on est en train de le faire ici. On voit là que l'apparente contradiction se résorbe dès lors qu'on situe la logique et les mathématiques relativement à la dynamique (étude du monde naturel). Bien entendu, si l'on se place dans l'absolu (par rapport à notre modernité par exemple), il devient clair que Laurence Bouquiaux a raison de noter la fermeture de Leibniz quant à sa croyance en l'achèvement des mathématiques.

Articulation formelle de la multiplicité des points de vue à la translation (principe de relativité).

La multiplicité des points de vue associée à la composition des mouvements dans une translation s'introduit d'abord au travers d'un opérateur qualitatif O, étendant la dérivée. Cela correspond à la généralisation de la manière dont Huygens conçoit la translation (w + W) et à la combinaison linéaire de lois de conservation développées dans l'Annexe A. L'opérateur qualitatif $O = D_\mu\, d/dv_\mu$ joue le rôle d'un générateur de lois de conservation ; les fonctions indéterminées D_μ [dépendantes du mouvement multiple v_μ] y reflètent les différents points de vue.

Dans cette démarche, la simple dérivée dE/dw correspond à une combinaison linéaire particulière traduisant la procédure de Huygens $[f(w + W) - f(w)]/W$, la fonction f reflétant l'énergie E = f(w). Cette dérivation associée à un seul point de vue se trouve remplacée par un opérateur multiple de dérivation $O(E) = d_\mu E/dv_\mu = D_\mu\, dE/dv_\mu$ associée au même type de combinaison $[f^\mu(v_\mu\ T_\mu\ V_\mu - f^\mu(v_\mu)]/V_\mu$ avec $E = f^\mu(v_\mu) = f^{\beta}(v_\beta) = f^{\eta}(v_\eta) = ...$ La seule différence se situe au niveau de la multiplicité des points de vue incluse au travers de l'expression de l'énergie E ainsi qu'au travers de la définition de l'opérateur O [le paramètre w est remplacé par v_μ et la translation w + W est remplacée par $v_\mu\ T_\mu\ V_\mu$]. Les indices grecs reflètent cette multiplicité dont aucun n'est spécifié au départ. Il s'agit là d'une structure formelle générale (absente de toutes les modélisations dynamiques existantes) où les différents points de vue sont reliés entre eux par

$$v_\mu = G_\mu{}^{\beta}(v_\beta)$$

qu'il s'agit de déterminer. C'est là que s'introduit l'élément relationnel absent de toutes les autres approches. Quant aux lois de composition, utilisant les opérations qualitatives (indéterminées) T_β et T_μ , celles-ci sont reliés entre elles au travers de la forme suivante :

$$G_\mu{}^{\beta}(v_\beta\ T_\beta\ V_\beta) = G_\mu{}^{\beta}(v_\beta)\ T_\mu\ G_\mu{}^{\beta}(V_\beta) = v_\mu\ T_\mu\ V_\mu$$

[On se place ici dans un cadre unidimensionnel : l'indice μ dans v_μ n'est pas associé à la composante d'un vecteur : il indique une multiplicité conceptuelle et non numérique associée à un seul et même concept].

Cette dernière forme n'est autre que l'explicitation (pour la composition du mouvement) de celle donnée par Laurence Bouquiaux à la page 179 de la Ref.[5] au travers de :

$$f(x * X) = f(x) \circ f(X) = z \circ Z$$

Cela correspond à ce qu'on appelle en mathématiques un isomorphisme (ou plus généralement un homomorphisme) que Laurence Bouquiaux associe à la notion d'expression chez Leibniz. Elle s'explique en détail à ce sujet (en se reportant à divers auteurs, et particulièrement à Michel Serres), indiquant ce que Leibniz veut dire lorsqu'il parle d'une chose exprimant une autre.

Essence et modalités d'existence.

L'introduction d'une logique inclusive se manifestant par la prise en compte formelle d'une structure qualitative susceptible d'inclure une multiplicité discrète au travers des paramètres v_μ et opérateurs T_μ, permet, en dépit du cadre qualitatif mis en place, d'accéder à une dynamique quantitative éliminant tout se qui se rapporte au qualitatif par un mécanisme de filtrage ou compensation. Ceci n'est possible que grâce à la distinction entre « Essence » et « modalités d'existence ».

Cette distinction – fondamentale à la viabilité de la présente démarche – est présente dans le travail de Laurence Bouquiaux sur Leibniz et son origine pré-galiléenne est rappelé de façon relativement détaillée en relation à la vision de N. de Cues. C'est ainsi que Laurence Bouquiaux (à la page175 de son livre [5]), établit un lien entre Leibniz et N. de Cues rappelant le travail de G. Friedmann qui présente l'être en tant que force enveloppée (impliquée) dans son **existence essentielle**, et développée (expliquée) dans les **formes extériorisées de cette existence**. Cette distinction entre deux niveaux – ce qui est enveloppé dans l'**Essence** (ou existence essentielle) et ce qui est développé dans les **modalités d'existence** (ou formes extérieures de cette existence) – constitue ici la clé qui va permettre la conciliation entre le qualitatif et le prédictif comme on va le voir. (On ne redonne pas ici les citations rappelés par Laurence Bouquiaux montrant la proximité et la continuité de pensée clairement mise en évidence entre N. de Cues et Leibniz).

Accès direct à la loi fondamentale de la dynamique.

Afin de ne pas surcharger le texte en explicitant les aspects strictement physiques et mathématiques donnés ailleurs en détail [10], nous introduisons le lecteur à la logique de la démarche qui va se dévoiler en deux étapes. Tout d'abord, on va obtenir la structure de la dynamique indépendamment de tout recours à l'un quelconque des points de vue sur le mouvement. Ensuite, bénéficiant de la forme couplée de la structure de la dynamique ainsi que des résultats obtenus dans la première étape on définit le mouvement de façon relationnelle, obtenant ainsi (au travers d'une loi de récurrence) une infinité de points de vue sur celui-ci. Même si la méthode s'applique à n'importe quel monde c'est le monde einsteinien que nous allons considérer. C'est lui qui peut intéresser simultanément les physiciens et les philosophes. Le cas général est évoqué dans l'Annexe C et explicité dans la Ref.[10].

Leibniz met l'accent sur les propriétés de conservation et sur la nécessité d'avoir un problème physique bien posé et sans contradiction. C'est d'ailleurs en cela que, selon lui, Huygens dépasse Descartes : il a su qu'il faut deux lois de conservation. En admettant qu'il existe un générateur qualitatif de lois de conservation noté O (reflétant l'idée de relativité de façon multiple) et opérant sur une certaine entité E à déterminer, il s'en suit qu'en imposant la contrainte suivante (système qualitatif différentiel du second ordre) :

$$S = O^2(E) = E \qquad O = d_\mu/dv_\mu = D_\mu\, d/dv_\mu \qquad (1)$$

On obtient ainsi successivement une infinité de couples identiques les uns aux autres puisqu'à la deuxième application de O on retrouve la première entité E qu'on nomme l'énergie. [On utilise ici le système d'unités naturelles pour lequel $c = 1$. C'est ainsi que la contrainte S exprimée dans le système d'unités conventionnelles $S = E/c^2$ se réduit à $S = E$].

Formellement, cela correspond à une structure qui se répète comme suit :

$O\{[E, O(E)]\}= [O(E), O^2(E) = E] = [O(E), E], \quad O^2\{[E, O(E)]\}= [O^2(E), O^3(E)] = [E, O(E)]\ldots$

correspondant à une infinité de couples indiscernables les uns des autres. On peut appeler cette formulation : « principe d'identité des indiscernables ».

La seconde entité nécessaire pour la cohérence interne de la dynamique, qui dérive de l'énergie au travers de O(E) est appelée l'impulsion. Elle est exprimée par

$$p = O(E) \quad (2)$$

Dans ce qui précède, seules les entités qui se conservent E et p (par opposition aux points de vue v_μ) sont apparentes avec l'opérateur O (par opposition à d/dv_μ). Ces entités et cet opérateur sont reliés aux points de vue au travers du mécanisme interne qui suit :

$$E = f^{\mu}(v_\mu) = f^{\beta}(v_\beta) = f^{\eta}(v_\eta) = \ldots \quad \text{et} \quad p = g^{\mu}(v_\mu) = g^{\beta}(v_\beta) = g^{\eta}(v_\eta) = \ldots \quad (3)$$

et

$$O = D_\mu\, d/dv_\mu = D_\beta\, d/dv_\beta = D_\eta\, d/dv_\eta \quad (4)$$

ou de façon compacte

$$O = d_\mu/dv_\mu = d_\beta/dv_\beta = d_\eta/dv_\eta \quad (5)$$

En raison de sa propriété de conservation le couple d'entités E et p comme la relation qui les lie, sont dits **objectifs** et concernent l'essence de la dynamique. Les multiples perspectives v_μ , associées aux différentes manières par lesquelles on peut mesurer le mouvement, sont dites **subjectives** (ces paramètres ne correspondent pas à des entités qui se conservent). A la fin de son « Essay de dynamique » de 1692, commenté par Costabel, Leibniz écrit : « le mouvement est une chose passagère qui n'existe jamais …C'est la force qui existe véritablement… Il ne faut donc pas s'étonner si la nature établit ses lois sur ce qui est le plus réel ». Au contraire de l'énergie E (« force » dans le langage de Leibniz) qui correspond à une entité transcendantale en ce sens qu'elle conditionne la possibilité de la dynamique, les points de vue ne possèdent pas cette nécessité : un point de vue peut être remplacé par un autre tout en gardant la possibilité d'une dynamique. C'est ainsi que la dynamique moderne bâtie sur la théorie des groupes s'exprime à travers la rapidité et non plus la vitesse.

Il convient de signaler que le lien entre les entités subjectives n'est pas forcement subjectif.
On peut définir l'objectivité de la dynamique (relation entre les entités qui se conservent) au travers d'une intersubjectivité qui n'a aucune place dans les modèles usuels en raison de l'absence de toute multiplicité subjective. L'objectivité par **intersubjectivité**, donnée sous forme d'un élément égal à une multiplicité de rapports, est un peu comme la division de deux quantités négatives (subjectivité : –) qui fournit un résultat positif (objectvité : +) exprimée par :[+ = – /– = – /– …] comme on le verra ultérieurement.

Cette section est consacrée plutôt à l'objectivité par trans-subjectivité [+ = + / + = + / + …] où un mécanisme de filtrage par compensation [+ = +u/+u = +v /+v = +w /+w …] va entrer en jeu éliminant ainsi la multiplicité qualitative des points de vue et laissant la place à une dynamique dont l'« Essence » est quantitative. Plus précisément, on montre à partir de (2) et (4) la propriété suivante :

$$O^2 = D_\mu\, d/dv_\mu\, [D_\mu\, d/dv_\mu] = p d/dE[p d/dE] = p^2\, d^2/dE^2 + p\, (dp/dE)\, d/dE \qquad (6)$$

Grâce à cette propriété on peut éliminer les différents points de vue subjectifs associés à D_μ et v_μ au profit des entités objectives liées au couple de lois de conservation (E, p). On passe ainsi du système qualitatif différentiel du second ordre donné en (1) où les fonctions D_μ sont indéterminées, à une équation quantitative du premier ordre dès lors qu'on applique (6) à l'énergie E conduisant à :

$$S = O^2(E) = p\, dp/dE = E \qquad (7)$$

On a ainsi la possibilité de déduire l'équation fondamentale de la dynamique einsteinienne avant même d'avoir défini le mouvement. On a là une forme quantitative et donc une connaissance précise qui se situe au-delà de tout point de vue particulier. Ces points de vue seront alors définis de façon relationnelle en ayant pris acte de la loi fondamentale de la dynamique suivante :

$$E^2 - p^2 = E_0^2 \text{ ou encore } S^2 - p^2 = m^2 \qquad E_0 = m \qquad (8)$$

soit (prenant en compte la positivité de l'énergie)

$$E = [E_0^2 + p^2]^{1/2} > E_0 \text{ ou } S = [m^2 + p^2]^{1/2} > m \quad \text{pour } p \neq 0 \qquad (9)$$

Cette structure se déduit par simple intégration de l'équation différentielle du premier ordre : $E_0 = m$ correspond à une constante d'intégration. La double écriture en termes de E et de S explicite le fait que E correspond à l'entité de départ, alors que S indique la contrainte imposée de manière à ne pas multiplier les lois de conservation. (La différence conceptuelle mérite d'être sauvegardée d'autant plus que d'autres mondes sont possibles conduisant à des contraintes différentes de S = E). Le plus simple de ces mondes correspond à la contrainte suivante : S = m où m est une constante (monde de Newton ou Huygens).
Là encore on n'aura que deux lois de conservation puisque toute autre application de l'opérateur O ne fournit pas de nouvelles lois. Le cas général associé à l'ensemble des mondes possibles, donné dans la Ref.[10], n'est pas développé ici afin de ne pas surcharger la démarche et de mettre l'accent sur l'idée de multiplicité de points de vue sur le mouvement. C'est par là que s'introduit la **logique inclusive** absente de toutes les modélisations usuelles de la dynamique.

Parmi les trois points correspondant à ceux donnés par Laurence Bouquiaux dans son interprétation du perspectivisme leibnizien qui, appliqués à la dynamique conduisent à : (i) la coexistence d'une multiplicité de points de vue, (ii) l'obtention de l'Essence de la dynamique avant même d'avoir défini le mouvement et (iii) l'existence d'une règle liant les différents points de vue, seuls les deux premiers points ont été satisfaits. Le troisième point fera l'objet de la section suivante.

PERSPECTIVISME LEIBNIZIEN ET PRIMAUTE D'UN MONDE COMMUN

Là encore, il convient de se référer au début de la section de l'article de Laurence Bouquiaux [1] intitulée : « PERSPECTIVISME LEIBNIZIEN ET PRIMAUTE D'UN MONDE COMMUN » où elle écrit : « Le perspectivisme leibnizien n'a rien de commun avec un relativisme fondé sur l'existence d'une multitude de substances qui auraient chacune leur propre monde ou leur propre vérité (chacun son point de vue!), Dieu ayant ensuite et comme secondairement, la charge d'assurer une certaine cohérence à l'ensemble. Ce qui est premier, chez Leibniz, c'est le monde commun, c'est la loi générale dont chaque être constitue un cas particulier : chaque monade, âme, esprit, a reçu une loi particulière, qui est une variation de la loi générale qui règle l'univers. **Le système de Leibniz est, d'abord, une théorie des relations, pour laquelle la loi universelle est première par rapport aux individus. Dieu ne crée pas des individus particuliers dont il s'assurerait ensuite que leurs perceptions s'entre répondent. Il crée un monde dans lequel chaque substance est définie par ses relations aux autres».**

Dans la présente démarche, le « monde commun » correspond à la loi fondamentale de la dynamique (einsteinienne et donnée ci-dessus). Ce monde est effectivement déterminé avant d'avoir défini le mouvement, conçu (dans la section ci-après consacrée à la quantification du mouvement), comme un ensemble de projections ou points de vue qui s'entre répondent et se complètent.

Dans ce qui suit, nous allons fournir plus de précisions quant au perspectivisme leibnizien tel que Laurence Bouquiaux le présente et montrer la manière de formaliser ce perspectivisme. Le mouvement va être défini de façon **relationnelle** et non plus **a priori** (à la manière de Kant) comme c'est usuellement le cas au travers de la vitesse. Ce paramètre (représentant usuellement le mouvement) est défini par certaines contraintes spécifiques dont on peut se passer comme la montre d'ailleurs les dynamiques modernes [2, 4] qui utilisent la théorie des groupes. [La vitesse est alors remplacée par la rapidité qui présente d'autres propriétés remarquables. A son tour, cette rapidité est donnée a priori au travers d'une loi de composition qui n'est pas quelconque mais **additive**].

Rappelons le caractère qualitatif du système différentiel du second ordre donné en (1) et qui s'exprime explicitement (pour le monde einsteinien) comme suit après avoir pris en compte (4) et (5) :

$$S = O^2(E) = d_\mu{}^2E/dv_\mu{}^2 = \{D_\mu\, d/dv_\mu\, [D_\mu\, d/dv_\mu]\}E = E \qquad (10)$$

Pour déterminer les fonctions D_μ, il suffit (là encore) de se référer à la vision de Leibniz sur la multiplicité des points de vue sur une réalité donnée, que nous appliquons à la dynamique. Dans ce qui a précédé, nous avons montré que c'est le monde qui est premier par rapport aux points de vue individuels qui s'entre répondent et se définissent par leurs relations mutuelles. Il reste à préciser les indications données par Leibniz quant à la nature de ces relations mutuelles et leurs rapports les unes aux autres.

Dans l'introduction de la Ref.[1], Benoit Timmermans écrit : « le texte de Laurence Bouquiaux n'apporte pas seulement de précieux éclaircissements sur les différentes acceptations de la notion de point de vue chez Leibniz ; en s'attachant à l'évolution de l'image leibnizienne des perspectives de la ville, Laurence Bouquiaux réexamine sur de nouvelles bases la question du plan de la ville, ou du géométral ». Dans la même introduction, il est précisé (p.16): « Un plan ou un dessin est dit géométral lorsqu'il représente la forme et les dimensions d'un objet de manière exacte, sans tenir compte de sa perspective. Par exemple, un plan de Paris reproduit fidèlement, autant qu'il est possible, les distances et les tracés des rues, sans faire entrer en ligne de compte le lieu particulier d'où un éventuel observateur pourrait contempler la ville ». On observe une même réalité à partir de différentes échelles. C'est exactement ce qu'on va mettre en œuvre ici, la différence essentielle étant qu'en dynamique la loi d'échelle (reliant les différents points de vue) n'est pas visualisable comme les lieux d'observation pour la ville. Cette loi d'échelle va porter sur l'énergie qui va être aux différents points de vue sur le mouvement ce qu'est la raison d'une suite géométrique à l'ensemble de ses termes. Elle correspond à une **entité transcendante** en ce sens qu'elle est partout et nulle part à la fois. Elle est partout dans la mesure où c'est l'énergie qui va structurer l'ensemble des points de vue en précisant la place de chacun d'eux au sein de la structure. Elle n'est aussi nulle part car en tant que telle elle ne peut coïncider avec aucun des points de vue qu'elle génère. Elle est « hors rang » pour utiliser le terme déjà utilisé par Laurence Bouquiaux, précisant l'existence d'une règle qui articule les différents points de vue et qui va être précisée plus loin.

Il ne s'agit pas de revenir ici sur l'évolution de l'idée de point de vue chez Leibniz et les différentes significations que Laurence Bouquiaux présente dans son article : nous nous attachons à l'interprétation qui a fini par s'imposer. Laurence Bouquiaux écrit dans la Réf.[1] (p.47): « D'abord utilisée pour illustrer le rapport entre l'essence et les qualités sensibles d'une chose particulière, l'image illustre ensuite le rapport entre l'essence unique (l'essence divine) dont toutes les choses sont des modes eux-mêmes, puis, finalement (en des termes nettement moins spinozistes), le rapport entre l'univers harmonique et les substances qui l'expriment ... Dès cette époque (autour de 1676), notons le, la substance se définit à partir d'une règle, à partir de la loi d'une série ».

Dans les notes en bas de page, elle précise « L'essence des substances consiste dans la **force primitive d'agir**, ou dans la loi de la suite des changements ». En tant que force primitive, l'énergie acquiert un statut transcendent et s'apparente par là à un acte plutôt qu'à un être comme cela apparaît lors de sa manifestation empirique au travers d'une quelconque application. Laurence Bouquiaux ajoute : « Ce n'est pas la pensée, explique Leibniz, qui est l'essence de l'âme, car les pensées sont des actions qui se succèdent tandis que l'essence de l'âme demeure toujours la même. L'essence de l'âme, c'est ce qui demeure pendant le changement : la loi de la série des changements ». Leibniz utilise aussi le terme « expression » pour évoquer l'idée de point de vue ou de perspective. C'est ainsi qu'en réponse à Arnauld, il écrit (page 49 de la Ref.[1]): *« une chose exprime une autre (dans mon langage) lorsqu'il y a un rapport constant et réglé entre ce qui se peut dire de l'une et de l'autre. C'est ainsi qu'une projection de perspective exprime son géométral ».*

Laurence Bouquiaux insiste sur le fait que le perspectivisme de Leibniz sert à penser une loi de correspondance mettant en avant la solidarité de tous les êtres dans un monde, où chaque être n'est lui-même que par ses relations aux autres. Elle évoque M. Fichant qui explique que, pour Leibniz, l'individualité ne se pose pas à partir d'elle-même ; elle est posée dans le concert originaire du monde, dont l'ordre général et primitif est l'objet propre de la création, de sorte que la pluralité ordonnée et hiérarchisée des monades est impliquée dans la constitution interne de chacune. Un monde est d'abord créé, et ce dessein implique ensuite et secondairement tel ou tel individu ou telle ou telle monade.

Avec ces précisions et ayant déjà la forme quantitative du monde de la dynamique, il reste à établir la loi de série ou de suite qui va conduire aux individualités ou monades qui correspondent ici aux différentes perspectives sur le mouvement. (Rappelons qu'au $17^{\text{ième}}$ siècle la distinction entre suite et série n'était pas claire de telle sorte qu'on rencontre souvent le terme « série » voulant dire « suite »).

Quantification de la multiplicité des points de vue.

Afin de voir qu'on n'a pas besoin d'un quelconque a priori kantien pour définir le mouvement, commençons par remarquer que la structure générale constituée d'une infinité d'équations différentielles correspond à une structure couplée, excepté dans un seul cas. En face du choix associé à une telle structure c'est la solution découplée qui s'impose. La simplicité n'est pas décrétée de l'extérieur comme pour l'a priori associé à l'additivité (ou en évoquant n'importe quel autre critère) ; c'est la structure formelle qui la révèle. Plus précisément, sachant qu'on a $p = O(E)$, il s'en suit que d'après (1) on a : $S = O^2(E) = O(p) = E$ qui s'exprime de façon explicite, utilisant (2) par :

$$S = O(p) = D_\mu \, dp/dv_\mu = E \tag{11}$$

On voit là que la solution découplée conduit nécessairement à une relation de proportionnalité entre D_d et E (où l'on a posé $\mu = d$ avec d pour découplage). Comme D_d est une entité sans dimension, on pose

$$D_d = E/E_d \tag{12}$$

où E_d est une constante (quelconque) associée au mécanisme de découplage, ayant la dimension d'une énergie.

Nous allons adopter un critère suggéré par l'essence de la dynamique où l'on a d'après (9) l'ordre multiple suivant :

$$(E/E_0) < (E/E_0)^2 < (E/E_0)^3 < \ldots \qquad \text{et} \qquad (E_0/E) > (E_0/E)^2 > (E_0/E)^3 > \ldots \tag{13}$$

En identifiant les deux constantes E_d et E_0 (de même dimension : énergie), on obtient :

$$D_d = E/E_0 = S/m \tag{14}$$

Au lieu de se restreindre au caractère additif pour la composition du mouvement [4] (qui correspond ici à $D_s = 1$) pour lequel la loi fondamentale de la dynamique n'est d'aucun intérêt et ne conduit à rien de particulier, le fait de garder le contact avec la logique leibnizienne restant attentif à la structure interne de la dynamique, conduit naturellement à un principe d'ordre multiple suggéré par (13). Ces inégalités ordonnées sont déduites du monde de la dynamique exprimé en (9) auquel on cherche à associer une multiplicité de points de vue au travers d'un principe d'ordre itératif.

Cet ordre articule les différents points de vue caractérisés ici par les fonctions D_μ en utilisant l'ordre multiple et illimité donné en (13). Pour cela on définit D_μ de manière à retrouver la solution découplée associée à D_d à partir des D_μ pour la valeur de $\mu = d$, obtenant ainsi la loi :

$$D_\mu = (E/E_0)^{1+d-\mu} \tag{15}$$

(On vérifie immédiatement que pour $\mu = d$, on retrouve la solution découplée).

Une telle fonction $D_\mu = (E/E_0)^{1+d-\mu}$ peut être nommée la «fonction microscope ». [En effet, Leibniz s'est inspiré du microscope de Leeuwenhoek qui lui a servi comme confirmation empirique quant à la nécessité d'avoir sur une réalité donnée, des points de vue ordonnés. Ceux fournis par un microscope permettent des agrandissements différents associés à une seule et même réalité (ici la dynamique). Après avoir examiné ce qu'il appelait des animalcules dans une goutte de liquide séminal, Leibniz affirme que parmi les observations qu'il a pu voir tout au long de sa vie celle-ci fut « la plus merveilleuse de toutes ». Il s'en inspire pour se proposer de construire une caractéristique universelle au sein de laquelle une place majeure doit être réservée à la multiplicité des échelles et des points de vue].

L'introduction de la loi régissant la façon dont apparaît la multiplicité des perspective (15) dans l'expression de l'équation différentielle sous-déterminée donnée en (10) mène à l'expression du principe d'identité des indiscernables dans sa version multiple et subjective (pour chacun des points de vue) :

$$S = O^2(E) = (E/E_0)^{1+d-\mu}\, d/dv_\mu\, [(E/E_0)^{1+d-\mu}\, dE/dv_\mu] = E \qquad (16)$$

Le problème exprimée par cette équation différentielle est ainsi bien déterminé et les solutions incluent celles issues des différentes méthodologies associées à la vitesse, la rapidité et la célérité, données dans les Réfs.[2-4]. Ces points de vue correspondent respectivement aux valeurs suivantes : $\mu = d + 3, d + 1, d$.

L'Eq.(16) constitue la définition la plus complète et en même temps la plus compacte de l'énergie dans son rapport au mouvement dans sa multiplicité infinie.

Comme d peut être choisi de façon arbitraire sans que cela affecte les solutions (seul leur ordre se décale), on peut poser $d = 0$. Ainsi, on obtient une forme plus simple sans perte de généralité :

$$D_\mu = (E/E_0)^{1-\mu} \qquad S = O^2(E) = (E/E_0)^{1-\mu}\, d/dv_\mu\, [(E/E_0)^{1-\mu}\, dE/dv_\mu] = E \qquad (17)$$

dont les solutions permettent les expressions en fonctions des paramètres du mouvement

$$E/E_0 = S/m = [1 + v_0^2]^{1/2} = \cosh v_1 = 1/\cos v_2 = 1/[1 - v_3^2]^{1/2} \qquad (18, a)$$

et

$$p/m = v_0 = \sinh v_1 = \tan v_2 = v_3 /[1 - v_3^2]^{1/2} \qquad (18, b)$$

la vitesse, la rapidité et la célérité associées aux différents modèles dynamiques existants correspondant respectivement à $\mu = 3, 1, 0$. Quant au point de vue d'ordre 2 (absent des approches usuelles) – baptisé par le paramètre « mobilité » – celui-ci correspond à un angle permettant de montrer qu'une sphère en mouvement apparaît toujours comme une sphère sans aucune déformation alors qu'une forme moins symétrique tel un rectangle ou un carré apparaissent déformés (la contraction des longueurs se trouve interprétée au travers d'une rotation d'un certain angle).

On peut montrer que les autres solutions, dont le nombre est infini, correspondent à des combinaisons plus ou moins complexes des quatre solutions de bases données ci-dessus. Ces relations multiples s'obtiennent au travers d'une relation de récurrence qu'on ne reproduit pas ici.

Définition intersubjective de l’énergie.
Si d’un point de vue strictement physique le problème est résolu, d’un point de vue conceptuel il peut être utile de mettre en évidence certaines propriétés spécifiques à la démarche leibnizienne et qui ne peuvent pas apparaître dans le cadre physique associé à l’un quelconque des modèles en raison de l’extrême réduction imposée d’entrée par les approches classiques et de l’absence de toute logique inclusive liant entre elles les différentes perspectives. Cela permettra surtout d’éclairer le sens relatif à ce que Leibniz appelle « force primitive ».

Compte tenue de l’invariance:

$$D_\mu\, d/dv_\mu = D_{\mu+1}\, d/dv_{\mu+1} = D_{\mu+2}\, d/dv_{\mu+2} = \ldots = D_{\mu+k}\, d/dv_{\mu+k} = \ldots \qquad (19)$$

on peut déduire une suite récurrente où la forme objective de l’énergie $E = F(p)$ ne s’exprime pas, seulement par le mécanisme de trans-subjectivité, en fonction de l’impulsion comme en (7)-(9) mais aussi au travers d’une intersubjectivité comme suit:

$$E = F(p) = E_0\, dv_\mu(p)/dv_{\mu+1}(p) \qquad \text{(ou encore } S = m\, dv_\mu/dv_\mu\text{)} \qquad (20)$$

Il apparaît ici que non seulement l’énergie correspond à une entité transcendentale en ce sens qu’elle conditionne la possibilité de la dynamique de par sa propriété de conservation, mais elle correspond aussi à une notion transcendante puisqu’en l’exprimant sous une forme adimensionnelle, le rapport R qui caractérise l’activité de la substance

$$R = E/E_0 = S/m = dv_\mu/dv_{\mu+1} \qquad (21)$$

se trouve être représenté par la raison d’une progression géométrique liant cette caractéristique R à une multiplicité infinie de perceptions (infinitésimales) dv_μ, dont chacune est liée à une perspective ou un point de vue sur le mouvement. Sa « transcendance » renvoie ici à l’idée d’une entité susceptible d’être partout et nulle part à la fois. [Rappelons que la raison R est partout dans la mesure où elle génère l’ensemble des termes de la suite et elle n’est nulle part en ce sens qu’elle ne correspond à aucun de ces termes].
Il peut arriver que la raison d’une suite coïncide avec l’un des termes de la suite, mais même dans ce cas, la raison correspond toujours à une « transcendance » l’égalité apparaissant comme une pure coïncidence quantitative (un accident) alors que d’un point de vue qualitatif la différence reste totale. En effet, en posant

$$U_\mu = dp/dv_\mu = [dv_\mu/dp]^{-1} \qquad (22)$$

on obtient

$$R = E/E_0 = S/m = U_{\mu+1}/ U_\mu \qquad (23)$$

de telle sorte que parmi l’infinie multiplicité des U_μ l’une d’entre elles coïncide avec l’énergie et une autre avec la masse soit

$$U_d = U_0 = E_0 = m \qquad \text{et } U_{d+1} = U_1 = S = E \qquad (24)$$

On peut effectuer la même opération en faisant intervenir l’énergie au lieu de l’impulsion. Ainsi, si l’on pose par analogie à (22)

$$I_\mu = dE/dv_\mu = [dv_\mu/dE]^{-1} \qquad (25)$$

on obtient

$$R = E/E_0 = S/m = I_{\mu+1}/ I_\mu \qquad (26)$$

de telle sorte que, parmi l'infinie multiplicité des I_μ, l'une d'entre elles coïncide avec l'impulsion :

$$I_{d+1} = I_1 = p \qquad (27)$$

Il est remarquable que, suivant la manière dont on définit la suite des éléments au travers des U_μ ou I_μ (justifiée ici par une simple analyse dimensionnelle ; on est toujours en unités naturelles), on découvre que la masse l'énergie et l'impulsion peuvent s'insérer au sein de la multiplicité infinie des termes des différentes suites et correspondent respectivement à :

$$U_d = U_0 = m, \qquad U_{d+1} = U_1 = E, \qquad I_{d+1} = I_1 = p \qquad (28)$$

Si le point de vue d + 1 (correspondant à 1 lorsqu'on choisit d = 0) s'avère être privilégié ici, c'est parce qu'il coïncide avec le cas pour lequel le générateur de lois de conservation coïncide avec la dérivée qui est utilisée ci dessus dans la constitution de nouveaux termes de la suite géométrique.

Notons enfin que les termes intrinsèque et extrinsèque peuvent être utilisés à la place de ceux d'objectif et de subjectif ; néanmoins il apparaît que la définition de l'objectivité comme trans-subjectivité ou comme intersubjectivité permet d'établir un discours susceptible d'avoir une résonnance dans la communauté philosophique allant au-delà du simple caractère structurel de la démarche. Ce choix est d'autant plus souhaitable que la base même de la démarche s'appuie sur le socle de la philosophie de Leibniz et non sur une quelconque considération physique empirique ou a priori.
Il convient de noter que la synthèse apportée par Laurence Bouquiaux est remarquable par le fait qu'elle met l'accent sur les éléments principaux dont on a besoin pour constituer un cadre proprement physique. Ce sont, en particulier, les liens qu'elle fait entre les idées philosophiques et les formulations mathématiques associées qui sont primordiales pour le physicien ; non seulement le lien qu'elle établit entre la notion de point de vue et celle d'isomorphisme est crucial mais l'exemple particulier qu'elle fournit (p.180 de la Réf.[5], faisant passer de l'addition à la multiplication) s'avère être, comme le montre l'Annexe B, d'un grand intérêt pour la saisie de la dynamique cartésienne.

Déduction du lagrangien et de la loi fondamentale de la dynamique.

La solution du système différentiel correspondant à $\mu = d + 3$ apparaît complexe. Sa résolution requiert le changement de variable suivant : $L = -\, m^2/E$, pour conduire à un système facilement intégrable. C'est cette nouvelle variable L (qui simplifie la résolution du système différentiel reflétant le principe d'identité des indiscernables) qui correspond à ce qu'on appelle le lagrangien. Le lagrangien naît donc au sein de ce formalisme leibnizien, lui fournissant sa raison d'être en rapport avec la notion de vitesse et son articulation aux différents autres points de vue.

La loi fondamentale de la dynamique F = ma, ou plutôt sa forme intégrale (par rapport au temps propre p = mu dans le cadre einsteinien) correspond au point de vue d'ordre d soit $u = v_{d.}$ Ces aspects importants pour la physique sont ici quelque peu négligés afin de garder un lien direct avec les aspects philosophiques et conceptuels.

Place des forces primitives et dérivatives dans la présente formulation.

Dans la première section (p.130–133 de la Ref.[5],) du chapitre intitulé : « La physique leibnizienne et la critique du mécanisme » Laurence Bouquiaux évoque la difficulté de saisir la notion polymorphe de « force » chez Leibniz. Après avoir précisé qu'elle relève autant de la métaphysique que de la physique et que la complexité et la polysémie du concept de force se manifestent dans le lexique au travers de la distinction entre la force primitive et la force dérivative chacune d'elles étant subdivisée en forces active et passive, elle écrit : « La *force primitive active* est présente par soi dans toute substance corporelle. Elle correspond au concept d'entéléchie première, d'âme ou de forme substantielle, et elle ne concerne que les causes générales, qui ne peuvent suffire à expliquer les phénomènes. La *force primitive passive* correspond à ce que les scolastiques appellent « matière première ». C'est le complément de la forme au sein du composé substantiel. Elle comprend l'impénétrabilité et la résistance au mouvement. La *force dérivative active* concerne le détail des concours entre les corps. Elle se subdivise en une force morte … et une force vive… puissance développée excitée (en bas de page elle rappelle $\int x dx$). La force dérivative passive exprime l'impénétrabilité et la résistance, comme de la force primitive passive, mais elle l'exprime au niveau de la matière seconde, au niveau des corps phénoménaux ».

La notion de masse représente l'impénétrabilité et la résistance au mouvement comme on le sait depuis la physique newtonienne. Il s'avère donc que cette entité passive (qu'on rencontre selon Leibniz en relation au caractère passif de la force primitive et de la force dérivative) s'avère correspondre exactement à ce que la présente démarche fait ressortir. Il est clair que la force dérivative active est celle qui correspond aux lois de conservation de la physique où la notion de masse apparaît dans les expressions de l'énergie et l'impulsion au travers des formes suivantes :

$$E = m\, r^{\mu}(v_\mu) = m\, r^{\beta}(v_\beta) \quad \text{et } p = m\, s^{\mu}(v_\mu) = m\, s^{\beta}(v_\beta)$$

Les fonctions paires et impaires $[r^{\mu}(v_\mu) = r^{\mu}(-v_\mu)$ et $s^{\mu}(v_\mu) = -s^{\mu}(-v_\mu)]$ associées au mouvement ont été explicitées en (18).

Quant à la force primitive active, elle n'a aucune existence dans les formalismes usuels puisque ces formalismes ne constituent que des modèles à un seul paramètre excluant toute logique inclusive. C'est cette logique qui nous a permis ici de révéler l'existence d'une source mère à partir de laquelle jaillissent les différents points de vue. Cette source mère n'est pas à proprement parler physique dans la mesure où on n'en a pas besoin pour résoudre un quelconque problème physique. Il s'agit d'un principe d'explication ; il transcende le physique et ne relève pas d'une quelconque exploration sur le terrain de la dynamique dans ses applications. Là encore la masse apparaît au travers de la relation suivante :

$$E = S = m\, dv_\mu/dv_{\mu+1}$$

spécifique de la présente démarche et qu'on ne rencontre nulle part ailleurs excepté dans le cadre qualitatif de la dynamique leibnizienne.

Laurence Bouquiaux précise : « c'est là que se nouent la physique et la métaphysique, c'est là que se joue leur accord ou leur incompatibilité, et sans doute, aussi, l'échec ou la réussite d'une grande partie du projet leibnizien. Je souhaiterais montrer ici, à l'aide de quelques citations, combien la notion leibnizienne de force est une notion hybride, qui relève autant de la métaphysique que de la physique, une notion double, dont une face est tournée vers la réalité substantielle et l'autre vers le détail des phénomènes.
Les forces primitives sont substantielles, tandis que les forces dérivatives sont « accidentelles »…. Il ne pourrait y avoir des forces dérivatives s'il n'y avait des forces primitives, parce que ce qui est accidentel ou changeant doit être la modification de quelque chose d'essentiel ou d'immuable. La force primitive est comme la loi de la série, et la force dérivative comme la détermination qui désigne un terme quelconque de cette série ».

Un peu plus loin, elle se réfère à M. Gueroult et Y. Belaval qui suggèrent que les forces primitives concernent les substances, tandis que le forces dérivatives se rapportent aux agrégats de substance. Elle poursuit : « le concept de force primitive serait un concept métaphysique relatif à la substance…qui n'a pas d'utilité immédiate pour le physicien soucieux de décrire le détail des phénomènes. Pour celui-ci, en effet, les forces dérivatives suffisent. Cependant ces forces dérivatives dépendent complètement des forces primitives, sans lesquelles elles n'existeraient pas. Pour ce qui est des phénomènes et des agrégats, tout s'explique mécaniquement, et l'on n'a besoin de considérer que les forces dérivatives, une fois que l'on a reconnu d'où proviennent ces forces, une fois que l'on a reconnu que les phénomènes des agrégats proviennent de la réalité des monades.
Ces quelques remarques laissent deviner que le partage physique-métaphysique au sein du système leibnizien ne peut se faire sans douleur (*et que, peut-être*, *ce partage est irréalisable*). Elles laissent aussi deviner les réticences qui seront celles de notre philosophe devant une théorie physique qui, comme le mécanisme cartésien, prétend s'être débarrassée de toute considération métaphysique ».

On met en évidence ici que ce partage est tout à fait réalisable, et c'est précisément grâce à cette explicitation qu'on est en mesure de fournir une intelligibilité supérieure à la dynamique, la débarrassant du désordre épistémologique produit par les différents points de vue développés à travers l'histoire en relation directe avec les avancées mathématiques, et lui ôtant la boue sémantique qui la caractérisait en raison non seulement de la multiplicité des interprétations mais aussi des conditions historiques par lesquelles la connaissance de la dynamique est passée.

Tout cela montre bien qu'il y a un lien direct avec la présente démarche montrant que le projet leibnizien est viable et qu'il permet aussi de mieux saisir la nature du mouvement et de la dynamique. La démarche de Laurence Bouquiaux nous démontre qu'il y a (toujours) de belles choses à écrire en style leibnizien.

Conclusion

Cette formalisation de la dynamique reposant largement sur l'interprétation que fait Laurence Bouquiaux de la vision leibnizienne du monde sensible, il est naturel que la conclusion s'apparente à celle qu'elle propose dans son livre [5]. Nous allons donc emprunter un certain nombre d'éléments clés de la conclusion de ce livre et établir le lien avec la présente démarche. Plus précisément, nous allons donner trois « citations », en insistant sur des points clés auxquels nous avons apporté une formalisation en vue d'une meilleure intelligibilité de la dynamique et d'une saisie intrinsèque de cette discipline, fondatrice de la physique.

Première citation.
« Leibniz rêve d'une caractéristique universelle, d'un idiome transparent, débarrassé de toutes les imperfections, de toutes les ambigüités qui affectent nos langues approximatives. Il entreprend de développer un langage capable de nous fournir une image parfaitement fidèle de la réalité, un système formel grâce auquel la vérité nous serait donnée comme le résultat d'un calcul. Les propositions seraient comme des rapports ; les démontrer, ce serait faire apparaître une mesure commune ».
C'est dans ce sens que notre travail a introduit un langage formel approprié à la multiplicité des points de vue, pour que les différents modèles qui s'attachent à cette dynamique trouvent une certaine unité au travers d'une logique inclusive fondée justement sur des rapports reliés par une mesure commune, comme le note ci-dessus Laurence Bouquiaux. Cette dynamique (entre autre choses), évite la boue sémantique et le désordre épistémologique inhérents aux modèles usuels : chacun lève le voile sur un aspect en cachant une multiplicité d'autres facettes.
Comme le rappelait Roger-Pol Droit, Leibniz dit à propos des sectes « qu'une part essentielle de vérité est contenue dans chaque système, lequel se trouve être vrai pour ce qu'il affirme et faux pour ce qu'il nie ». Ce sont justement de telles négations amenées par chaque méthodologie (qui restent, par nature, incapable de les voir) qui sont dépassées et incluses au sein d'une unité supérieure.

Deuxième citation.
«Leibniz adhère avec enthousiasme au projet d'explication du monde que propose la science classique. Il participe activement à cette entreprise de mathématisation du réel qui doit nous apprendre ce qu'est le fonctionnement intime des choses. Pourtant, il est aussi le premier à dénoncer les faiblesses de ce modèle, le premier à condamner son caractère excessivement schématique et réducteur, le premier à souligner son incapacité à rendre compte de tout processus évolutif, de tout changement véritable, le premier à dénoncer la pauvreté des mathématiques qu'il utilise. En face du monde plat, homogène, statique du mécanisme cartésien, Leibniz dessine une nature vivante, bariolée, différenciée à l'extrême. Si Leibniz entend bien développer une description mathématique du monde, c'est d'une mathématique nouvelle, d'une mathématique qui ne nous parle pas seulement de quantité finies, mais aussi d'ordre, de qualité, et d'infini».
Là encore, sans rejeter les acquis de la science dynamique, cette approche participe à une forme de mathématisation susceptible d'aller à la source de laquelle jaillissent les différents points de vue, dont le nombre est infini (même si seulement un nombre fini est associable à des propriétés remarquables aptes à s'adapter à la mesure). La présente approche met en évidence le caractère réducteur de la science newtonienne qui apparaît comme le tronc d'un arbre où tout se trouve confondu au sein d'une pauvreté structurelle extrême. L'inclusion des deux niveaux (Essence-modalités d'existence) de telle sorte qu'à la logique exclusive usuelle vienne s'ajouter une logique inclusive, seule capable à unifier la multiplicité des points de vue, conduit inéluctablement à différents types de distinctions entre la qualité et la quantité, le fini et l'infini, le discret et le continu, mettant en évidence un ordre ontologique associé à la substance remplaçant le désordre épistémologique inhérent aux débats et controverses associés aux différents modèles dont chacun ne révèle qu'un aspect. C'est à partir de l'idée leibnizienne que chaque modèle amplifie et éclaire une facette de la réalité aux dépens d'une multiplicité d'autres qu'on a pu réaliser, sur la dynamique, le rêve de Leibniz d'accéder à une vue plus fidèle, plus différenciée et moins dogmatique de la réalité.

Troisième citation.
« Leibniz entend élaborer une physique-mathématique capable de prendre en compte toute une problématique – souvent aristotélicienne – que le mécanisme à tendance à escamoter ; comme eux, il entreprend de transformer en concepts intelligibles, mathématiquement formulables, des notions que leur caractère imprécis semblait condamner à la stérilité et que le mécanisme avait, pour cette raison, banni de ses terres ». Le caractère aristotélicien de la présente démarche, à la base de la distinction entre « Essence » et « modalités d'existence » est absolument nécessaire : sans elle aucune alliance entre la richesse du qualitatif et la nécessité du prédictif n'est concevable. Un autre avantage est que l'utilisation d'un langage formel ne prêtant pas à confusion, rend fécond ce qui pouvait être stérile et conduisant à des imprécisions au travers du langage quotidien.

Il s'agit ici de montrer l'intérêt de la philosophie non seulement pour une meilleure compréhension de la physique, mais aussi pour son extension à la découverte de nouveaux horizons. Leibniz fournit un « art d'inventer » et non seulement un « art de démontrer ».

S'il y a un souhait à faire, c'est que se poursuivent les démarches qui, comme celle de Laurence Bouquiaux, sont capables d'éviter tant l'hyperspécialisation (tout savoir sur un rien) que la trop grande généralité (savoir un rien sur tout).

Remarque finale : A l'opposé du physicien imprégné par sa problématique et par son époque, Laurence Bouquiaux ne succombe pas à la tentation de la modernité et de son perspectivisme physique éparpillé et sans réelle consistance interne. C'est précisément parce qu'elle poursuit sa quête en distinguant le strict cadre quantitatif de la dynamique leibnizienne de celui qualitatif qui le prolonge possédant sa propre logique interne, que sa démarche garde toute sa cohérence permettant ainsi au physicien de réaliser le rêve de Leibniz quant à la constitution d'une réelle théorie du mouvement capable d'inclure les différents modèles rationnels de la dynamique.
Insistons de nouveau sur le fait que ce cadre englobant requiert la mise en place d'une logique inclusive nécessaire non seulement à la constitution d'une formulation rationnelle mais aussi à une formulation relationnelle pour lier les différentes perspectives au travers d'une loi itérative transcendant toute simple modélisation.

Annexe A

Germe de la rationalité leibnizienne chez Huygens.

La rationalité leibnizienne fera jouer à l'énergie un rôle majeur puisque comme le note Laurence Bouquiaux, selon Leibniz, l'impulsion n'est qu'une entité dérivée. A propos de l'énergie et de l'impulsion, elle écrit (p. 141 de la Ref.[5]) : « Pour Leibniz, la portée de ces deux lois n'est absolument pas comparable. Il ne voit dans la loi de conservation de la quantité de progrès (impulsion ou quantité de mouvement en termes modernes) qu'une règle tout à fait subalterne concernant le déplacement d'un système vers un certain côté, ce qui ne peut avoir qu'une signification toute relative dans l'espace leibnizien… ».

Nous allons montrer comment Leibniz traite le problème dans sa généralité (au-delà de l'approche de Huygens) en utilisant son calcul infinitésimal et obtenant une rationalité plus grande que celle fournie par Huygens dans son utilisation du principe de relativité de Galilée. Le calcul infinitésimal de Leibniz montre que la combinaison linéaire utilisée par Huygens (reliant par le principe de relativité la conservation de l'énergie à celle de l'impulsion) revient à faire de la dérivée un générateur de loi de conservation. Ainsi, au lieu de se donner $\frac{1}{2} mw^2$ avant de déduire l'impulsion par simple dérivation on peut énoncer un principe nous permettant de déduire tant l'énergie que l'impulsion. On prend en compte le fait qu'on a besoin de deux et seulement deux lois de conservation. Ainsi, pour limiter le nombre de lois à deux, il suffit d'imposer une contrainte sur la seconde opération de dérivation considérant la dérivée seconde de l'énergie comme devant être constante. Ainsi, on pose $d^2E/dw^2 = m$ et on prend en compte le fait que l'énergie est une fonction invariante par inversion du sens du mouvement. Elle dépend uniquement de la valeur absolue du mouvement ce qui revient à considérer uniquement les fonctions paires, soit $[f(w) = f(-w)]$. *Si l'on associe le terme « force absolue » à l'idée de valeur absolue, invariance par réflexion ou fonction paire, tout rentre dans l'ordre alors que si l'on rattache cette dénomination à l'espace absolu comme le fait Laurence Bouquiaux, on se trouve alors confronté aux contradictions qu'elle souligne. Il serait souhaitable d'approfondir cette question. Imprégnée par les méthodes de la physique rationnelle, Laurence Bouquiaux exprime fidèlement la pensée de Leibniz et note diverses incompatibilités compte tenu de l'interprétation qu'elle fait.* On notera que cette invariance par réflexion reflète une propriété essentielle de la substance qui est positive (qu'est-ce qu'une substance qui serait moins que rien disait Descartes. Cet aspect est important dans la mesure où il place Descartes et Huygens dans un même cadre quant à leur définition qualitative de la substance). On exprime le mouvement par la variable w (afin de laisser v exprimer le rapport spatio-temporel qui correspond à un autre point de vue sur le mouvement). Dans ces conditions, la résolution de l'équation différentielle du second ordre conduit simultanément à l'énergie et l'impulsion comme suit :

$E = \frac{1}{2} mw^2 + \text{constante}, \quad p = dE/dw = mw$

Toute autre dérivation ne produit plus de nouvelles lois de conservation pour le choc élastique, à la base de la dynamique. (La distinction entre v et w évite la confusion possible entre $p = dL/dv$ et $p = dE/dw$ même si dans le cas parabolique particulier w coïncide avec v d'un point de vue quantitatif).

Laurence Bouquiaux est très proche de cette dernière articulation ($p = dE/dw$) puisqu'elle l'évoque dans le texte principal et précise (dans les notes en bas de la page 131 de la Ref.[5]), le rapport intégral entre la force morte et la force vive ce qui correspond en termes modernes au rapport entre la variation infinitésimale de l'impulsion et l'énergie. Après avoir lu l'affirmation de Laurence Bouquiaux qui écrit : « Leibniz suggère l'analogie mathématique suivante : la force morte serait comme dx. La force vive serait comme $\int$ x dx » il convenait d'approfondir cette question essentielle à la dynamique puisque c'est là que s'articule l'énergie à l'impulsion au travers du principe de relativité dynamique. En fait dans la Réf.[9] (page 97) on a plus d'information sur cette question puisque Leibniz écrit : « selon l'analogie de la géométrie et de notre analyse, les sollicitations seront comme dx les vitesses comme x, les forces comme xx c'est-à-dire Sx dx » (la somme Sx dx s'exprime de nos jours au travers de l'écriture suivante : $\int$x dx). Leibniz ne pouvait pas ignorer que xx est le double $\int$x dx (à une constante additive près mais ces considérations n'ont aucune influence sur les lois de conservation du choc élastique définies à une fonction affine près. De toute manière, Leibniz ne dit pas que xx est égale mais seulement « comme » $\int$x dx ce qui renvoie plus à une analogie au travers d'une relation de proportionnalité qu'à une stricte égalité numérique ou fonctionnelle. Pour Leibniz, l'impulsion est la dérivée de l'énergie. En outre cette dérivée n'est autre que le reflet du principe de relativité qui stipule que, si f(w) est une loi de conservation, alors sa forme translatée f(w + W) l'est aussi. Or, comme la combinaison linéaire de deux quantités correspondant à des lois de conservation conduit aussi à une loi de conservation, on considère la combinaison particulière : [f(w + W) – f(w)]/W qui conduit à la notion de dérivée pour les translations W infinitésimales. Ainsi, la dérivation d'une loi de conservation conduit à une autre loi de conservation. Pour n'avoir que deux lois, comme l'exige le problème de la dynamique, il convient donc d'imposer une contrainte sur la dérivée seconde. Comme il y a plusieurs contraintes possibles vérifiant l'existence de deux et seulement deux lois, chacune d'elles sera associée à un monde possible.

Cette dérivation, utilisant le calcul infinitésimal de Leibniz, reflète la démarche de Huygens qui raisonne dans le fini sur le principe de relativité (comme l'explique en détail J. Barbour [11]). C'est d'ailleurs là qu'on découvre le fait qu'une loi de conservation pour un choc élastique est définie à une fonction affine près.

Rappel de la démarche de Huygens.
Selon Barbour, Huygens est le premier à avoir utilisé le principe de relativité pour déduire l'impulsion de l'énergie. Partant de mw^2, il postule que si mw^2 correspond à une loi de conservation alors son expression à une translation près W c'est-à-dire $m(w + W)^2$ doit aussi correspondre à une loi de conservation. Sachant que la combinaison linéaire de deux quantités correspondant à des lois de conservation correspond aussi à une loi de conservation, Huygens soustrait de $m(w + W)^2$ la loi de conservation de départ afin d'éviter la redondance. Ainsi, on obtient $2mwW + mW^2$. Or, cette forme est strictement équivalente à mw puisqu'une loi de conservation du type A + B = A' + B'(choc élastique) est définie à une fonction affine près. L'adjonction d'une même constante à A et A' ainsi qu'à B et B' n'altère pas la propriété de conservation. De même, la multiplication par une même constante de part et d'autre de l'égalité ne change pas non plus le résultat final. Si Huygens n'a pas *formalisé* les propriétés mentionnées ci-dessus, il n'en reste pas moins qu'il les a utilisé dans les calculs qu'il a dû effectuer. Le passage aux translations infinitésimales ($W \rightarrow 0$) annule la différence suivante : $[m(w + W)^2 - mw^2]$ mais pas la combinaison linéaire exprimée par $[am(w + W)^2 + bmw^2]$ si l'on pose $a = -b = 1/W$ puisqu'on alors 0/0 ce qui correspond à la notion de dérivée. C'est cela qui fait de la dérivée un générateur de lois de conservation : ce qui est vrai pour l'entité de départ l'est aussi pour sa dérivée qui à son tour constitue une nouvelle entité à laquelle on peut appliquer la même procédure, et ainsi de suite à l'infini. C'est cela qui explique que, pour limiter le nombre des lois de conservation à deux (nécessité structurelle pour avoir un

problème bien posé), il faut imposer une contrainte sur la dérivée seconde de manière à ce qu'aucune nouvelle loi ne puisse être générée.

Annexe B

Changement de point de vue proposé par Laurence Bouquiaux : application à la structure de la dynamique cartésienne.

La forme de rationalité développée dans l'Annexe A, combinée à l'idée d'expression ou de point de vue va permettre d'avoir un autre regard sur la dynamique cartésienne. Là encore, même si Laurence Bouquiaux ne l'a pas développé, lorsqu'elle évoque la notion leibnizienne d'expression associée au passage d'un point de vue à un autre, elle écrit (p.179 de la Ref.[5] : « Je pense que la meilleure façon de la caractériser dans toute sa généralité est de la traduire en langage mathématique, et de dire qu'elle correspond à la notion d'isomorphisme ». Cette manière de préciser les choses et même de les expliciter dans les notes en bas de page est d'un grand intérêt pour le physicien désireux de mieux comprendre l'histoire et la philosophe sous-jacente à sa discipline. Elle permet aussi d'aborder d'autres développements et prolongements auxquels le philosophe, n'étant pas immergé dans le strict champ de la physique ne pense pas forcement. Non seulement Laurence Bouquiaux rappelle le lien entre physique et philosophie mais elle fournit l'exemple simple de l'exponentielle permettant de transformer une loi de composition additive en une loi multiplicative en écrivant (p. 180) de la Ref.[5] : « Un exemple simple est fourni par la fonction exponentielle…Il s'agit bien d'un isomorphisme car exp est une bijection telle que $\exp(x + y) = \exp(x) . \exp(y)$ ». Nous allons adopter cette même transformation ou changement de variable pour montrer que la démarche de Huygens formulable au travers de la dérivée comme on l'a montré ci-dessus va fournir un résultat surprenant et remarquable lorsqu'on l'applique à la dynamique cartésienne. Leibniz est connu pour avoir critiqué la démarche cartésienne tout en s'en inspirant. Sa critique est associée au fait que cette dynamique est non-analytique et résiste donc à toute évaluation objective au travers des méthodes analytiques usuelles. Ainsi, non seulement elle ne correspond pas aux expériences menées au $17^{\text{ième}}$ siècle (objection majeure, mais un critère expérimental étant systématiquement local, cette infirmation n'est nullement définitive) mais elle ne semble pas adaptable au formalisme de Lagrange et Hamilton. Si le physicien a pris l'habitude d'associer à une dynamique donnée son lagrangien, ceci n'est possible que si la dynamique en question est suffisamment régulière ; ce qui n'est pas le cas de la dynamique cartésienne. Plus précisément, à l'opposé de la dynamique de Huygens ou celle de Newton où l'on a

$$v = dE/dp = p/m \quad \text{et } p = dL/dv$$

d'où l'on tire

$$L = \int mv\, dv = ½ mv^2 + C$$

la dynamique de Descartes en $|p|$, que nous écrivons, pour des raisons de dimension sous la forme $E = c\,|p|$, analysée à la lumière du formalisme de Lagrange et Hamilton mène à

$$v = dE/dp = c\, p/|p| \qquad p \neq 0$$

ce qui conduit à l'impossibilité d'une inversion nécessaire à l'obtention d'un lagrangien associé à cette dynamique.

Nous allons voir cependant que cette dynamique devient analysable si on lui applique le changement de point de vue proposé par Laurence Bouquiaux. Ensuite, on l'analysera au travers de la démarche de Huygens-Leibniz où la dérivée constitue un générateur de lois de conservation.
On commence par exprimer la structure cartésienne usuellement donnée par $m|u|$ où u est un paramètre caractéristique du mouvement devant correspondre à un point de vue différent dans son principe de la vitesse v (et de w) sans quoi on fait dire à Descartes ce qu'il n'a jamais dit.

Plus précisément, on pose

$$E = c\, m|u|$$

La constante c (coefficient de proportionnalité) a été introduite afin d'avoir la dimension d'une énergie (l'adjonction d'un coefficient multiplicatif constant ne joue aucun rôle au regard des propriétés de conservation

On adopte le changement de point de vue suivant : $|u| = c \exp(|w|/c)$ qui n'est autre que celui associé à l'exemple donné par Laurence Bouquiaux, en respectant la parité au regard du mouvement. On utilise ensuite la manière dont Huygens et Leibniz lient l'impulsion à l'énergie, soit

$$p = dE/dw$$

Un calcul simple montre qu'on obtient : $p = m(w/|w|) \exp(|w|/c)$ pour $w \neq 0$

En poursuivant les dérivations on découvre qu'on n'a plus de nouvelles entités qui se conservent. Ceci montre que la dynamique de Descartes est compatible avec l'exigence associée au principe de relativité dynamique, malgré son caractère non-analytique. Plus précisément, on obtient :

$$M = d^2E/dw^2 = m \exp(|w|/c) = E/c^2$$

En plus de ces résultats qui vont à l'encontre de ceux qui ont conduit au rejet de la dynamique cartésienne, cette démarche présente d'autres vertus relatives à sa régularisation. Rappelons que d'un point de vue strictement mathématique, la dynamique de Descartes appartient aux fonctions généralisées et non aux fonctions régulières habituellement étudiées en dynamique. Sachant que l'expérience ne permet de saisir une réalité qu'à l'échelle où l'expérience en question est applicable, il s'en suit qu'on peut toujours supposer que la dynamique de Descartes (dynamiquement admissible et donc à ne pas rejeter) est valable à une échelle que les expériences actuelles ne sont pas en mesure d'atteindre. On cherche donc à régulariser cette dynamique non-analytique en supposant qu'elle serait valable à une certaine échelle d'énergie très élevée (telle l'énergie de Planck) noté par $\hat{E}$ (voir Réf.[10] pour les détails). On découvre ainsi que non seulement pour $E \rightarrow \hat{E}$ on retrouve Descartes comme attendu mais pour $E \ll \hat{E}$ on retrouve la dynamique einsteinienne ce qui est, à première vue, surprenant. Cependant, lorsqu'on analyse la situation plus finement, on s'aperçoit que dès le départ la dynamique cartésienne appartient à un cadre de type einsteinien car contrairement à la dynamique de Huygens ou de Newton qui constituent un cadre local associé à n'importe quelle fonction paire (y compris l'hyperbole qui n'est qu'une forme parmi d'autres), le cadre local cartésien est plus contraignant et se trouve associé à une forme hyperbolique dégénérée.

Les germes qu'on peut rencontrer dans une démarche philosophique comme celle présentée par Laurence Bouquiaux s'avèrent être fructueux en raison des articulations suffisamment précises qu'elle a établi entre les concepts philosophiques et leur contrepartie physique et mathématique. Ceci rend son travail directement exploitable par et pour la physique sans que le physicien ait besoin d'aller fouiller dans les archives des grands penseurs et savants des siècles passés ou même dans les études historiques souvent très spécialisées et difficilement rattachables à la physique moderne.

Annexe C

Passage du géométrique au dynamique analysé par Laurence Bouquiaux et applications.
Dans cette Annexe nous allons établir, en relation avec l'article de la Réf.[1], une analogie entre les coniques et la dynamique ce qui permettra d'appliquer la procédure proposée par Leibniz à la dynamique.
Laurence Bouquiaux [1] cite L. Couturat et M. Serres :
« …en ce qui concerne les coniques, il semble que ce soit la **découverte d'une équation générale**, plutôt que le passage au sommet du cône qui permet de comprendre et d'ordonner la série. Leibniz le dit nettement …**il affirme avoir trouvé une équation qui explique la nature de la section conique en général**…On voit combien on s'éloigne ici de la représentation géométrique. Ce n'est pas l'image du cône qui permet de penser simultanément toutes les coniques, mais l'équation générale (qui, évidement, ne correspond à aucune image représentable) ». Elle rappelle en fournissant un texte de Leibniz qu'il reproche à Desargues et à Pascal de s'en être tenus à la représentation géométrique avant d'ajouter : « Loin d'être indispensable, le passage au cône serait plutôt nuisible, dans la mesure où il suppose une méthode qui manque de généralité et oblige à des efforts d'imagination. Ce qu'il faut trouver, ce n'est pas le point de vue qui, du dehors, ordonne les différentes figures, mais la loi générale dont les équations des diverses courbes sont des cas particuliers. Il ne faut pas majorer l'importance de l'image. Le géomètre peut être aveugle ».

Dans le même article, elle rappelle que la parabole telle que Leibniz la concevait est une ellipse dont l'un des foyers est rejeté à l'infini. On notera en passant que si l'on remplace le lagrangien parabolique (qui reflète le monde de Newton) par un lagrangien elliptique on obtient automatiquement la dynamique einsteinienne puisque la connaissance du lagrangien suffit pour déterminer la dynamique. Ceci est explicité dans la section de cette Annexe intitulée : **Leibniz et sa conception de la parabole comme forme locale de l'ellipse.**

Laurence Bouquiaux ne cite pas toujours les textes originaux de Leibniz, se référant souvent à ses commentateurs. Cependant, au lieu de voir là un défaut de la démarche comme pourraient le faire les puristes, on y trouve un outil de recherche précieux dans ce type de synthèse visant à rassembler en un tout cohérent, un ensemble d'idées pertinentes qui se trouvent diluées dans la masse immense des écrits plus précis et spécialisés mais difficilement lisibles par un non-spécialiste du domaine en question.

Cet article [1] constitue une synthèse sur le perspectivisme leibnizien et va à l'essentiel. Il souligne nombre d'idées nécessaires à l'élaboration d'une dynamique de type leibnizien structurellement plus riche que tout ce qui s'est fait jusqu'à nos jours sur la dynamique. Ce fait est dû en partie à la focalisation sur les coniques (ayant une place majeure en dynamique : le lagrangien relativiste est elliptique alors que le hamiltonien associé est hyperbolique et leurs localisations fournit le cadre newtonien parabolique). En se plaçant à un niveau de réflexion très général associé au contexte très particulier de la dynamique, la démarche leibnizienne embrasse non seulement les dynamiques bien connues mais aussi certaines de celles qui sont en cours d'élaboration au travers du programme de recherche connu sous le nom de doubly-special relativity (voir plus loin).

Dans cet article, Laurence Bouquiaux nous présente un aspect de Leibniz s'opposant à la vision géométrique et spatio-temporelle einsteinienne (qu'on n'a pas manqué de rattacher à la mouvance cartésienne de l'étendue) au profit d'une démarche proprement dynamique. Nous allons voir dans ce qui suit qu'une telle approche est tout à fait pertinente dès lors qu'on l'applique à la dynamique.

Différentes dynamiques à partir d'une seule et même équation différentielle. Généralisation par différentiation

Si, comme l'indique Leibniz, on prend en compte le fait que les coniques peuvent êtres déduites d'une seule et même équation différentielle et que la parabole constitue un cas particulier de l'ellipse (ou même de n'importe quelle autre fonction paire : expression absolue dira Leibniz) alors on peut partir de la forme particulière associée à la parabole et obtenir une équation différentielle du second ordre $y'' = d^2y/dx^2 = f(y)$ correspondant non seulement à la parabole mais aussi à l'ensemble des coniques (parabole, hyperbole et ellipse) comme on va le voir en détail plus loin. Rappelons que Leibniz avait particulièrement étudié les fonctions développables en série à l'infini qu'il appelait expressions transcendantes. Ses nombreuses investigations sur les fonctions analytiques distinguant ce qu'il appelle les expressions algébriques (ordre fini) et les expressions transcendantes (ordre infini) le conduisent à s'opposer à la vision cartésienne limitée aux expressions algébriques. (On peut se reporter à la page 159 du livre de Laurence Bouquiaux [5] concernant cette distinction). On notera à cet égard qu'il y a là un argument d'ordre structurel qui vient conforter le concept leibnizien de mondes possibles (dans le monde de Huygens aussi celui de Newton l'énergie cinétique et la force vive sont proportionnelles au carré de l'impulsion d'où la parabolicité résultante). Cet argument structurel va dans le sens de la dynamique où l'on distinguait déjà entre plusieurs mondes puisque la dynamique non-parabolique de Descartes (proportionnelle à la valeur absolue de l'impulsion) était alors considérée sérieusement par les savants du 17$^{\text{ième}}$ siècle.

Nous allons montrer que Leibniz a raison de penser qu'il existe une seule et même équation différentielle susceptible de fournir l'ensemble des coniques. On notera en particulier, qu'en concordance avec l'idée leibnizienne de la parabole considérée comme une forme locale d'une ellipse ou d'une hyperbole, on peut partir de la forme parabolique suivante :

$$p^2 = 2AE$$

liant l'énergie à l'impulsion avant de l'exprimer par l'Eq. différentielle du second ordre suivante :

$$p'' = f(p) \qquad p' = dp/dE$$

de telle manière à ce qu'en changeant les conditions aux limites, l'intégration conduit à de nouvelles formes. Un simple calcul montre qu'on a

$$p' = A/p \;\text{ et }\; p'' = -(A/p^2)\,p' \;\Rightarrow\; p'' = f(p) = -A^2/p^3 \quad\text{ou}\quad p^3\,p'' = -A^2$$

L'élimination de la constante conduit à l'Eq. suivante :

$$p\,p''' + 3\,p'\,p'' = 0$$

Cette équation différentielle va être obtenue par deux autres moyens, relatifs d'abord aux mondes possibles de Huygens et Descartes puis à la structure générale associée au principe de relativité dynamique.

Unité différentielle des mondes de Descartes et Huygens (ou Newton).
Au lieu du seul monde « parabolique » de Huygens et Newton donné ci-dessus, nous allons construire une équation différentielle incluant le monde de Descartes. En rappelant que le monde de Huygens-Newton est en p^2 alors que celui de Descartes est en $|p|$, on est conduit à poser

$$p^2 = (2A_k/k)E^k$$

Le monde de Huygens correspond à $k = 1$ alors que celui de Descartes correspond à $k = 2$, puisqu'on a alors $p^2 = A_2E^2$ (ce qui équivaut au monde cartésien pourvu qu'on attache à E (énergie) et à A_2 des nombres positifs).

Trois différentiations successives par rapport à E conduisent à

$$p\,p''' + 3\,p'\,p'' = (k - 1)(k - 2)\,A_k\,E^{k-3}$$

Ainsi, on vérifie sans peine que pour $k = 1$ (Huygens) et/ou $k = 2$ (Descartes), on retrouve l'équation différentielle du troisième ordre donnée ci-dessus soit, $p\,p''' + 3\,p'\,p'' = 0$.

Unité différentielle des dynamiques compatibles avec le principe de relativité dynamique.
Comme E correspond à une loi de conservation, il s'en suit (à partir des propriétés associées à ce type de lois) que l'ensemble des formes vérifiant $aE + b$ constitue une classe de lois équivalentes ; le principe d'identité des indiscernables [exprimé dans le texte principal sous une forme particulière $O^2(E) = E$] s'étend alors comme suit

$$O^2(E) = aE + b$$

Se rappelant qu'on a

$$O^2 = d_\mu{}^2/dv_\mu{}^2 = D_\mu\, d/dv_\mu\,[D_\mu\, d/dv_\mu] = p^2\, d^2/dE^2 + p\,(dp/dE)\, d/dE$$

on déduit

$$pp' = p\,dp/dE = aE + b$$

d'où l'on tire, à partir d'une double dérivation pour éliminer les constantes

$$p\,p''' + 3\,p'\,p'' = 0$$

C'est la même équation différentielle ; mais cette fois-ci, nous fournissons une justification physique à cette équation. Nous montrons qu'il s'agit là de l'expression du principe de relativité dynamique. Si tout monde possible vérifiant cette équation (reflétant l'idée de relativité dynamique) est dit dynamiquement admissible, il est remarquable de noter que le monde cartésien vérifie l'admissibilité dynamique en raison de sa compatibilité avec le principe de relativité comme nous allons le vérifier dans le paragraphe suivant.

Intégration de l'équation différentielle et déterminations des mondes dynamiquement admissibles.

L'arrangement des termes comme suit :

$$p'''/p'' + 3p'/p = 0$$

redonne par intégration la forme exprimée plus haut

$$p'' = f(p) = -A^2/p^3$$

dont l'intégration conduit à

$$(dp/dE)^2 - A^2/p^2 = B$$

On notera déjà que lorsque la constante B est nulle alors on a la forme parabolique suivante

$$E = p^2/2A + C$$

de telle sorte que la structure de la dynamique de Huygens ($E = p^2/m$) correspond à $C = 0$ ainsi que $A = m/2$ alors que celle de Newton ($E = p^2/2m + U$) correspond à $C = U$ (énergie potentielle, grandeur non dynamique inconnue par Huygens) et $A = m$.

Lorsque B reste différent de zéro, on obtient selon les signes des constantes d'intégration les formes hyperbolique et elliptique

$$E = [(A/B)^2 + p^2/B]^{1/2} + D$$

En particulier, la dynamique de Descartes ($E \sim |p|$) correspond à $A = 0$, $D = 0$ alors que la dynamique d'Einstein ($E = [(mc^2)^2 + c^2p^2]^{1/2}$) correspond à $A = m$, $B = 1/c^2$ et $D = 0$.

Parmi ces dynamiques, la dynamique qui correspond à celle d'Einstein apparaît comme un cas particulier dans la mesure où elle correspond à $D = 0$. Il s'avère ainsi qu'outre le fait qu'on retrouve les différentes dynamiques connues, l'adoption d'autres combinaisons et interprétations possibles, bénéficiant de la non nullité de D, permettent d'inclure l'énergie de Planck et d'obtenir de nouvelles dynamiques associées au cadre nommé « doubly special relativity » ou « deformed special relativity » qui s'est développé ces dernières années [12, 13].

Le cas le plus général associé à l'idée de relativité dynamique : (anisotropie ou brisure de la parité associée à l'énergie).

Le traitement effectué ci-dessus associé à l'équation différentielle $p\,p''' + 3\,p'\,p'' = 0$, n'a pas été découvert initialement dans le cadre de la physique mais à partir des coniques et de la mise en commun des cadres de Huygens et de Descartes qui sont des cas particuliers des coniques. C'est bien plus tard qu'on a compris que cette relation est celle-là même qui reflète le principe de relativité dans le cas particulier où l'on suppose que l'énergie est une fonction paire du mouvement. Si l'on relâche cette contrainte et l'on se satisfait des conditions imposée par les seules propriétés de conservation, alors on peut montrer que le cas le plus général compatible avec le principe de relativité dynamique correspond à la forme suivante :

$$O^2(E) = aE + bO(E) + c$$

au lieu de $O^2(E) = aE + b$ donné ci-dessus. On peut se référer à [10] pour plus de détails. En particulier, lorsqu'on établit un lien entre la structure de la dynamique et celle de la métrique on est conduit vers de nouvelles géométries de type Finslerien [14] qu'il n'y a pas lieu de développer ici.

Sous forme trans-subjective, où tous les points de vue sur le mouvement v_μ sont éliminés, ce principe se transforme en

$$pp' = pdp/dE = aE + bp + c$$

après avoir utilisé

$$p = O(E)$$

et

$$O^2 = d_\mu^2/dv_\mu^2 = D_\mu\, d/dv_\mu\, [D_\mu\, d/dv_\mu] = p^2\, d^2/dE^2 + p\, (dp/dE)\, d/dE$$

Tout ce qui a été dit sur les coniques correspond à un cas particulier de cette forme trans-subjective du principe de relativité dynamique. Ce cas est celui où b s'annule ($b = 0$).

On voit clairement que tout ce qui fût étudié en se fondant sur la structure des coniques entre dans le cadre du principe de relativité dynamique.

Quelques remarques sur les dynamiques possibles.
La difficulté de rendre compte des différentes dynamiques qui ont existé au travers de l'histoire y compris la dynamique cartésienne, provient de la manière d'aborder le mouvement qui n'est pas réellement unique ce qui n'a jamais été suffisamment bien compris. Or, ici, nous avons la possibilité d'affirmer un certain nombre de résultats **intrinsèques** sur la dynamique où la spécification du mouvement n'intervient pas. Cette opportunité qui permet de court-circuiter toutes les difficultés relatives à ce qu'est le mouvement va nous permettre d'affirmer un certain nombre de résultats non triviaux impossibles (ou du moins difficiles) à affirmer autrement. A cela s'ajoute un autre bénéfice, celui de pouvoir ne pas écarter les solutions non-analytiques comme celle fournie par la dynamique cartésienne. En effet, on peut très bien avoir une solution non-analytique associée à une équation différentielle pourvu qu'on choisisse de façon appropriée l'une des constantes d'intégration. Comme toutes les formes mentionnées ci-dessus s'avèrent être dynamiquement admissible en ce sens qu'elles vérifient le principe de relativité dynamique, cela permet une nouvelle appréciation des dynamiques du 17$^{\text{ième}}$ siècle de Huygens et surtout de Descartes.

Rappelons qu'on a l'habitude d'affirmer que : (i) la dynamique de Descartes est à rejeter, (i) les résultats ($p = dE/dw$) de la dynamique de Huygens sont purement accidentelles et (iii) Les dynamiques de Newton et d'Einstein sont fondamentalement différentes l'une de l'autre. Or, l'existence d'une équation différentielle unique, apportant une certaine unité et englobant différents mondes possibles nous montre qu'aucune des trois affirmations ne reste intacte. En effet, sachant que l'équation différentielle reflète le principe de relativité dans sa version intrinsèque (au-delà de tout point de vue) non seulement la structure cartésienne devient dynamiquement admissible malgré son incomplétude mais la dynamique de Huygens n'est pas accidentelle puisque le formalisme lagrangien qui nous laisse croire au caractère accidentel de la dynamique de Huygens n'apparaît que comme correspondant à un point de vue parmi d'autres.

Quant à la grande distance qui sépare le cadre newtonien du cadre einsteinien elle est ici largement raccourcie. Les deux approches appartiennent à la même équation différentielle, la différence étant alors confinée aux constantes d'intégration qui diffèrent d'un cadre à l'autre. On notera cependant que cette distance, au lieu d'être raccourcie se trouve non seulement allongée mais change de nature lorsqu'on se place au niveau des différents points de vue. En effet, rappelons que le passage de Newton à Einstein se fait usuellement au travers du passage d'une courbe à une autre qui fait apparaître celle de Newton comme un effet local. En revanche, dans une approche de type leibnizien, l'aspect local newtonien se trouve étendu non seulement vers une autre courbe mais vers une structure arborescente où la courbe newtonienne forme le tronc de l'arbre. Tout ce qui est dit ici s'applique soit à l'énergie exprimée en fonction du mouvement soit à l'impulsion en fonction du mouvement. La structure générale reste sauvegardée, seules les formes quantitatives changent. Dans le premier cas (énergie), on à faire à de fonctions paires alors que dans le second cas (impulsion) il s'agit de fonctions impaires.

Leibniz et sa conception de la parabole comme forme locale de l'ellipse.

Laurence Bouquiaux [1] se réfère à M. Serres selon lequel Leibniz exprimait la parabole comme une forme locale de l'ellipse au travers d'un passage à la limite. C'est ainsi que Leibniz écrit : « tous les théorèmes géométriques qui se vérifient de l'ellipse en général, pourront être appliqués à la parabole, en considérant celle-ci comme une ellipse dont un des foyers est infiniment éloigné… » Sachant que les lagrangiens associés aux dynamiques einsteinienne et newtonienne correspondent respectivement à des formes elliptique et parabolique, on ne peut pas s'empêcher de penser que si un mécanicien newtonien avait remplacé le lagrangien parabolique par son extension naturelle : l'elliptique, il aurait obtenu la structure de la dynamique einsteinienne sans aucun passage par l'électromagnétisme avec tous les tâtonnements et la « boue sémantique » (dus au passage par l'électromagnétisme) qui ont suivi. En effet, il a fallu du temps aux physiciens-logiciens et aux épistémologues pour faire admettre aux physiciens empiristes que la vitesse de la lumière attachée à la dynamique relativiste est un simple « accident historique » selon les termes de Wheeler. Il est dû au fait qu'on a hérité de l'électromagnétisme (qui est avant tout une théorie de la lumière) des notions qui n'ont rien avoir avec la dynamique en tant que telle. En posant la forme « elliptique » suivante :

$$L = K\,[1 - v^2/c^2]^{1/2}$$

on obtient pour les petites vitesses ($v^2/c^2 << 1$) un lagrangien parabolique de type newtonien à condition de poser

$$K = -mc^2$$

Ainsi, on voit clairement que si l'on prend en compte la remarque pertinente de Leibniz quant au rapport structurel entre l'ellipse et la parabole, et en utilisant simplement le formalisme unificateur de Lagrange et Hamilton, on a accès directement à la structure de la dynamique einsteinienne qui s'obtient par la simple application des formules suivantes

$p = dL/dv = mv/[1 - v^2/c^2]^{1/2}$ $E = vdL/dv - L = mc^2/[1 - v^2/c^2]^{1/2}$

Afin d'obtenir la loi fondamentale de la dynamique einsteinienne liant les deux entités qui se conservent, il suffit de faire appel à la transformation de Legendre permettant d'exprimer l'énergie en fonction de l'impulsion au lieu de la vitesse comme ci-dessus obtenant ainsi

$E^2 - c^2p^2 = (mc^2)^2$

qu'on peut aussi obtenir par simple élimination de la vitesse entre les deux équation données ci-dessus. Il est remarquable de noter que d'un point de vue structurel, la simple connaissance du formalisme de Lagrange et Hamilton qui correspond à un cadre mathématique applicable à diverses dynamiques possibles alliée à la remarque leibnizienne, suffit pour passer du cadre newtonien au cadre einsteinien.

De l'intérêt de la pensée qualitative : finitude, points de vue et réalité intrinsèque.
A l'opposée de la parabole ouverte à l'infinie, l'ellipse renvoie à la finitude de par sa forme fermée. Ainsi, Leibniz a pu songer à cette figure dans sa critique de l'action à distance d'autant plus qu'il établit un lien direct entre ces deux figures permettant de déduire la parabole à partir de l'ellipse au travers d'un mécanisme de localisation comme on l'a indiqué ci-dessus. Nous allons tirer des conséquences inéluctables d'une telle finitude au regard de la multiplicité des points de vue. En effet, si l'on admet comme Leibniz le pensait que l'action à distance ne doit pas correspondre à un effet physique, il s'en suit que la vitesse doit rester finie. Or, si l'on combine cette idée de finitude avec le principe de continuité de Leibniz, on obtient nécessairement un comportement asymptotique d'où l'impossibilité de distinguer entre la courbe et son asymptote à une certaine échelle. Toute mesure physique de différence de vitesses devient impossible à obtenir d'où la nécessité de changer de point de vue. Ce type de raisonnement qualitatif qui n'a besoin d'aucune formule spécifique a été largement encouragé par Leibniz. C'est ce type de raisonnement combiné à ses connaissances des coniques qui laissent croire que Leibniz a été si proche d'Einstein par certains côtés. En fait, ce type de raisonnement permet d'aller encore plus loin puisqu'à partir du moment où l'on doit avoir plus d'un point de vue sur le mouvement, il devient pensable de traiter l'essence de la dynamique (lien entre les entités qui se conservent) indépendamment de tout point de vue. C'est précisément la partie centrale du présent travail sans laquelle il n'aurait pas été possible de concevoir le mouvement comme un ensemble de projection sur l'essence de la dynamique.

En bref, la finitude renvoie à l'impossibilité de mesure à partir d'une certaine échelle nécessitant un changement de point de vue sur le mouvement. Une même réalité vue au travers de différents points de vue suggère la recherche d'une façon de la saisir intrinsèquement ; sans recourir à un quelconque point de vue.

Finitude, irrégularité et formalisme de Lagrange et Hamilton.
Avant de clore cette Annexe, nous allons voir comment le choix des constantes d'intégration conduit à un lagrangien fini (Einstein), infini (Huygens ou Newton) ou impossible (Descartes).

En effet, considérons la forme suivante : $pdp/dE = [A^2 + Bp^2]^{1/2}$

donnée ci-dessus et issue initialement de l'étude des coniques et de la possibilité d'avoir une seule et même équation différentielle unifiant différents mondes possibles.
Rappelons ensuite que la vitesse correspond dynamiquement à $v = dE/dp = E'(p)$, [première forme canonique de Hamilton pour une particule libre]. La connaissance de $E'(p) = v$ permet de remonter au lagrangien. Pour cela, il suffit de déduire $p = g(v)$ avant d'utiliser la loi usuelle $p = dL/dv$ conduisant à $L = \int g(v)\, dv$.

Il convient de noter que l'application de cette procédure n'est possible que si la dynamique en question est suffisamment régulière pour permettre les opérations mentionnées ci-dessus. En effet, les deux cas particuliers : $A = 0$ et $B = 0$ correspondent justement aux dynamiques de Descartes et Huygens respectivement.
Un simple calcul montre que le passage à $A = 0$ rend la dynamique irrégulière puisqu'on a alors

$$v = dE/dp = c\, p/|p|, \quad \text{avec } Bc^2 = 1$$

L'inversion de la relation entre v et p n'est pas possible pour construire un lagrangien associé à cette dynamique.
Quant au passage à $B = 0$, celui-ci transforme la finitude de v en une quantité infinie lorsque p tend à l'infini. En effet, on a dans ce cas : $v = dE/dp = p/[A^2 + Bp^2]^{1/2}$ qui devient :

$$v = dE/dp = p/[A^2]^{1/2}$$

d'où son comportement linéaire par rapport à p. Bien entendu dans ce cas (Huygens), il n'y a aucune irrégularité ici de telle sorte qu'un lagrangien est tout à fait constructible. C'est d'ailleurs à partir d'un tel cadre parabolique que Lagrange a construit sa démarche.

Il convient d'insister sur le fait que si Leibniz n'a jamais fait ce type de calcul en dynamique, il n'en reste pas moins que ses diverses affirmations (empruntées à ses investigations en mathématiques) s'avèrent être utile non seulement pour lier le cadre newtonien à celui d'Einstein [15] mais aussi pour une meilleure saisie de la dynamique moderne avec ses différentes extensions possibles [10].

Quelques remarques et citations sur la démarche de Leibniz.
Nous allons voir dans ce qui suit les prolongements que Leibniz a pu voir de par sa vision métaphysique distante du pragmatisme de Huygens. Comme l'a si bien montré G.G. Granger, Leibniz est l'un des rares métaphysiciens à avoir réussi à féconder ses mathématiques par sa métaphysique. C'est ainsi que grâce à des exemples mathématiques, (raison et termes d'une suite) il était capable d'expliquer la distinction (qui remonte à Aristote) entre des concepts métaphysiques associés à l'essence et ses modalités d'existence. Nous allons ici nous concentrer sur la manière dont il a pu passer de la semi-rationalité (déjà fournie par Huygens) à une rationalité semblable au moins à celle fournie par le formalisme de Lagrange et Hamilton bâtie sur le principe de moindre action. Pour cela, commençons par préciser certains termes anciens qui prêtent à confusion (il m'a fallu un certain temps pour éviter le piège des mots : la « quantité de mouvement cartésienne » ne correspond pas à ce qu'on appelle aujourd'hui de ce nom (impulsion) mais elle renvoie à sa valeur absolue). C'est d'ailleurs pour cette raison que Leibniz utilise le terme « quantité de progrès » (distinction entre $m|u|$ et mu). Comme les termes n'étaient pas à cette époque fixés pour l'ensemble de la communauté, le risque de prendre une quantité pour une autre n'est pas négligeable.

On pourrait croire, que la notion de « force morte » s'oppose à la « force vive » comme l'énergie potentielle à l'énergie cinétique mais il n'en est rien. Leibniz utilise les termes « potentia mortua » ou « force morte » et « potentia viva » ou « force vive » en précisant que la « force morte » est à la « force vive » ce que le point est à la ligne ou ce que la ligne est à la surface ce que j'interprète en dynamique comme suit :

$p = mw$ et $E = \frac{1}{2} mw^2 = \int mwdw. \Rightarrow p = dE/dw$

Cette écriture reflète fidèlement la démarche de Huygens dont la limite conduit à la notion de dérivée générant ainsi l'impulsion p à partir de l'énergie. Pour accéder à une rationalité complète il faudrait déduire E au lieu de se la donner par $E(w) = \frac{1}{2} mw^2$ ou simplement mw^2. Cette forme était obtenue à partir de l'exploration d'expériences concernant la chute des corps et dont la forme explicite n'est d'aucun intérêt pour la présente démarche. Or, comme le notent la plupart des commentateurs de Leibniz, ce dernier était à la recherche d'une démarche rationnelle qui ne fait aucun recours à l'expérience se suffisant à elle-même. Les références abondent sur la recherche de Leibniz d'une rationalité supérieure mais je vais me contenter de quelques citations qui m'ont suggéré ce que Leibniz a peut-être pu faire [sans que je sache réellement s'il l'a fait effectivement ou non et à quelle sorte de prolongement a-t-il pu songer pour le rattachement à la multiplicité des mondes possibles et des points de vue sur chaque monde]. Sachant qu'il reste beaucoup à faire avant d'examiner toute l'œuvre de Leibniz, il n'est pas interdit de penser qu'on découvre dans les années à venir des indications plus précises allant dans le sens de ce travail.

Costabel écrit : Leibniz… continue de se référer à Galilée et à Huygens… mais il a dépouillé sa conception des choses de ce qu'elle véhiculait d'imagination… il sait maintenant qu'il n'y a pas autre chose à dire et qu'une fois de plus la géométrie trace le chemin de la vérité ». Plus loin, dans la conclusion, il ajoute : « M. Guéroult a raison de dire que dans l'utilisation des données fournies par Huygens, l'esprit philosophique de Leibniz se manifeste par la synthèse méthodique des grands principes de conservation et par une coordination systématique des diverses propositions, d'où surgissent des thèses à répercussions métaphysiques que Huygens néglige ou récuse. Et que d'autre part la caractéristique de l'élaboration leibnizienne est l'introduction des perspectives du calcul infinitésimal et la netteté de la notion de réalité absolue de la force. C'est bien par l'attention à ces deux éléments considérés dans leur nature philosophique, que Leibniz dépasse Huygens ». Costabel poursuit en écrivant que Leibniz trouve dans la force absolue une lumière qui l'enchante et le projette bien au-delà de la science du mouvement, ajoutant : « c'est de cette seule lumière qu'il se flatte … d'avoir établi une nouvelle science qu'il appelle *la dynamique* ».

Remerciements : Je remercie les membres du groupe « Epiphymaths » pour leurs remarques et critiques et plus particulièrement J. Merker pour m'avoir incité à étudier la dynamique ainsi que C.A Risset pour son implication directe dans mes recherches actuelles en physique et philosophie des sciences.

Références.

[1] L. Bouquiaux, La notion de point de vue dans l'élaboration de la métaphysique leibnizienne (pp. 23-54). Ouvrage collectif, Perspective, Leibniz, Whitehead, Deleuze. Librairie philosophique J. Vrin, Paris (2006).

[2] J.M. Lévy-Leblond, Speed(s) Am. J. Phys. 48(5), May 1980.

[3] E.F. Taylor et J.A. Wheeler, A la découverte de l'espace-temps et de la physique relativiste.Traduit par C. Roux, Dunod, Paris 1970

[4] C. Comte, Langevin et la dynamique relativiste. ln Epistémologiques, V 01.2, 1-2, EDP Sciences, Paris,2002. et C. Comte, Leibniz aurait-il pu découvrir la relativité ? Eur.J. Phys.(1986) 225–235.

[5] L. Bouquiaux, L'harmonie et le chaos, le rationalisme leibnizien et la « nouvelle science ». Bibliothèque philosophique de Louvain, Ed. Peeters, Louvain-Paris 1994.

[6] E. Cassirer « La théorie de la relativité d'Einstein, éléments pour une théorie de la connaissance ». Ed. du Cerf, Paris (2000).

[7] J. C. Billier, Kant et le kantisme, Armand Colin/Masson, Paris 1998

[8] L. Bouquiaux, Aspects contemporains de la critique leibnizienne du mécanisme, (p.85-92) Congrès international : Leibniz und Europa juillet 1994

[9] Ouvrage collectif, «La finalité en question », Collection converscience, L'Harmattan (1999).

[10] N. Daher, Beyond usual and emergent rationalities. From pre-Newtonian to post-Einsteinian dynamics.(PDF, Epiphymaths: textes du séminaire, 2008).

[11] J. Barbour, "Absolute or relative motion?" The discovery of dynamics. Vol 1, Cambridge university press.(2001). [Chap. 9 « Huygens's theory of collisions » Eqs. (9.11) – (9.14)].

[12] J. Maguejo and L. Smolin " Lorentz invariant with an energy scale", Phys. Rev. Lett. **88** (19), 190403, May (2002).

[13] F. Hinterleitner, "Canonical doubly special relativity theory", Phys. Rev. D **71**, 025016 Jan. (2005).

[14] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner, Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation. Physics Letters A (2004) 40-47.

[15] N.Daher, Symmetry and invariance in Leibniz's approach of natural phenomena. Application to dynamics. 24th Int. coll. Group Theoretical Methods in Physics, Paris, France, July (2002).