Discussion concernant le réalisme platonicien pour l'ensemble N des entiers naturels

Nous prenons à priori les entiers naturels, non pas donnés par Dieu, mais comme résultant de la pratique mathématique d'Homo sapiens.

Le réalisme platonicien pour **N** est la position philosophique suivante. Tout énoncé **sensé** concernant les entiers naturels dans leur infinité actuelle est nécessairement Vrai ou Faux, et cela en dehors du temps. Si on découvre un jour qu'il est vrai, il était vrai de toute éternité.

Pour discuter cette thèse, il faut nécessairement se demander ce qu'est un énoncé **sensé**, un énoncé dont la signification est claire. On doit procéder par des exemples et mettre à jour des énoncés de plus en plus compliqués, mais pour lesquels nous tombons d'accord qu'ils ont une signification claire. Nous serons aidés pour cela par

- les notations mathématiques usuelles aujourd'hui, avec les quantificateurs qui représentent un accès à l'infini
- la notion intuitive de fonction de **N** vers **B={0,1}** (0 représente Vrai et 1 représente Faux)

Un apsect du problème est le suivant.

On démontre de jolis théorèmes surprenants. *Étaient-ils vrais de toute éternité, ou bien sont-ils seulement devenus vrais lorsqu'on les a démontrés de manière convaincante* ?
Une réponse possible : La brouette a-t-elle existé avant son invention ?

1) Un exemple.

Le **théorème surprenant** est le suivant : si p est un nombre premier, il existe un a dans $[1,...,p\text{-}1]$, dont les puissances de 1 à p-1 sont distinctes et décrivent tout l'intervalle.
On peut le vérifier par simple calcul sur chaque nombre premier pris séparément. Mais pour traiter l'infinité des nombres premiers, il faut une **démonstration** convaincante (de l'ordre du jugement synthétique à priori, selon Poincaré relisant Kant).

Les énoncés arithmétiques

2) Beaucoup de théorèmes ou de conjectures importantes en mathématiques ont la même « **structure logique simple** » que ce premier exemple. C'est la suivante.

On décrit une procédure de calcul explicite qui prend en entrée un entier naturel *n* et qui donne en sortie l'une des deux réponses suivantes :
- OUI la conjecture est satisfaite pour l'entier *n*
- NON la conjecture n'est pas satisfaite pour l'entier *n*

Le théorème ou la conjecture affirme que pour tout entier *n* la réponse est OUI.

La structure logique est « $\forall n\ f(n)=0$ ».
Ici *f* est une fonction $\mathbf{N} \to \mathbf{B}$ « bien définie » au sens intuitif de la chose.
La plupart du temps *f* est primitive récursive, cad qu'elle peut être calculée par les procédés de la récurrence simple, plus précisément calculée par un programme où les seuls boucles sont des boucles du type **Pour** *n* **de** 1 **à** *k* **faire** ...

Exemples : le premier exemple ci-dessus, Riemann, les 4 couleurs, Goldbach, Kepler, Poincaré ....

Se pourrait-il que Goldbach ne soit ni Vrai, ni Faux (contredisant le réalisme platonicien pour **N**.) ?

Si la vérité n'est pas absolue et éternelle, mais si elle dépend des capacités des mathématicien.ne.s à fournir des preuves convaincantes, il semble inévitable que certains énoncés qui ont cette structure logique simple ne soient ni Vrais, ni Faux.
On peut même imaginer que la finitude en espace-temps de notre Univers rende impossible toute preuve par n'importe quel procédé mis en œuvre par des êtres intelligents quelque part dans l'Univers

3) Les théorèmes ou conjectures du type « $\forall n\, \exists p \;\; f(n,p)=0$ »

Par exemple $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Le fait que les énoncés de ce type sont intrinsèquement plus compliqués que les énoncés du premier type augmente le soupçon selon lequel leur vérité n'a pas le caractère absolu qu'on aimerait leur prêter.
Un phénomène rassurant est le suivant : dans les théories formelles usuelles qui permettent d'écrire ces énoncés, leur prouvabilité ne dépend pas du principe du tiers exclu.

4) Les énoncés du type « $\forall n\; \exists m\; \forall p \;\; f(n,m,p)=0$ »

Par exemple : si $\mathbf{k}$ est un corps, tout polynôme non constant dans $\mathbf{k}[X]$ possède un facteur irréductible.

Autre exemple : le théorème de Faltings, seulement démontré en maths classiques pour l'énoncé classique. Depuis 1980, les spécialistes se sont acharnés à le rendre plus explicite, sans succès.

Ici il y a en général une divergence d'interprétation entre maths avec ou sans tiers-exclu ! Certains énoncés sont vrais si on admet le principe du tiers exclu, indémontrables sinon.

5) Les énoncés dits « arithmétiques » : ceux qui peuvent s'écrire dans une théorie formelle des entiers naturels sur un langage suffisamment riche, par exemple $\mathcal{P}eano$.

En fait pour y voir clair, on a intérêt à prendre pour base une théorie formelle dans laquelle, non seulement on a des symboles de fonction pour l'addition et la multiplication, mais pour n'importe quelle fonction primitive récursive.

Cela facilite grandement la lecture du théorème d'incomplétude de Gödel.

Ce théorème est un théorème de mathématiques intuitives qui prend pour objet d'étude une théorie formelle donnée (dans laquelle les énoncés arithmétiques sont présents) et il démontre que certains énoncés arithmétiques sont certainement vrais (pour notre compréhension intuitive des mathématiques) mais ne sont pas démontrables dans la théorie.

Cela jette un doute sérieux, sinon définitif, sur le programme de Hilbert dans sa formulation initiale.

Au delà de la hiérarchie arithmétique

Nous ne sommes pas au bout de nos peines. Car il y a des énoncés **sensés** au delà des énoncés arithmétiques, ils sont à priori plus compliqués que n'importe quel énoncé arithmétique.

6) On a une hiérarchie des énoncés arithmétiques
Ils sont de plus en plus complexes au fur et à mesure que le nombre d'alternances de quantificateurs augmente dans l'écriture de l'énoncé.
On peut à partir de cela utiliser un procédé diagonal, à la Cantor, pour fabriquer des énoncés **sensés**, mais qui sont plus compliqués que n'importe quel énoncé arithmétique.

Pour les faire entrer à l'intérieur d'une théorie formelle des entiers naturels, $\mathcal{P}eano$ doit être dépassé de manière radicale. Il ne suffit pas d'ajouter une infinité d'axiomes bien définis.

On se situe en maths intuitives à la Poincaré.

On crée des parties de **N** de complexité croissante

S_1 partie de **N** est dite de complexité 1 si elle est de la forme

$$S_1 = \{ n \text{ dans } \mathbf{N} \mid \forall m \ f_1(n,m)=0 \}$$

pour une fonction $f_1 : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{B}$ intuitivement calculable

S_2 partie de **N** est dite de complexité 2 si elle est de la forme

$$S_2 = \{ n \text{ dans } \mathbf{N} \mid \forall m \ \exists p \ \forall q \ f_2(n,m,p,q)=0 \}$$

pour une fonction $f_2 : \mathbf{N}^4 \rightarrow \mathbf{B}$ intuitivement calculable

Et ainsi de suite.
On note que chaque $\mathbf{N}^k$ est codable dans **N.**
Si on choisit des fonctions f_k suffisamment compliquées, le procédé diagonal de Cantor crée une partie S telle que l'énoncé
« *n* est dans S » n'est équivalent à aucun énoncé arithmétique.

7) Conclusion. Il se confirme que la collection des parties de **N** est une notion non prédicative.

Les logiciens ont inventé un système formel, l'*arithmétique du second ordre*, pour tenter de comprendre mieux la classe des parties de **N**.