Remèdes aux insuffisances de la rationalité analytique

N. Daher

Institut FEMTO-ST, Université de Franche Comté, CNRS

Préambule

Ce travail, à visée pédagogique, fait suite à une étude générale sur la méthodologie analytique adoptée en physique dans le but d'approfondir les idées de rationalité et d'objectivité scientifiques. Cette étude, développée dans [1-5], a permis de remonter à la source des démarches analytiques, élaborées progressivement depuis le 17ème siècle, avant d'être synthétisées dans les dernières décennies du 20ème siècle [6-12], faisant apparaître divers points de vue rationnels complémentaires.

C'est ainsi qu'au lieu d'exprimer un monde dynamique (celui d'Einstein par exemple) à travers la notion usuelle de vitesse, associée au calcul variationnel, on a constaté qu'il peut être exprimé par d'autres notions comme la célérité et la rapidité, associées respectivement à la géométrie moderne et à la théorie des groupes. Cette diversité de points de vue sur un seul et même monde dynamique sous-jacent, à la base du perspectivisme scientifique, a donné lieu à des débats et controverses concernant la rationalité et l'objectivité scientifiques qu'on ne détaille pas ici. On se contente de rappeler que certains ont vu dans ce perspectivisme analytique du relativisme cognitif qu'il convient d'éradiquer si l'on veut que la science soit vraiment rationnelle et réellement objective.

Afin de dépasser le cadre analytique qui a donné lieu aux divers débats entre les différentes écoles de pensées, défendant chacune son point de vue, il nous a semblé propice et avantageux d'aller en quête d'une méthodologie scientifique susceptible de déterminer un monde dynamique, quel qu'il soit (newtonien, einsteinien, finslerien…), de façon intrinsèque (i.e. sans avoir besoin de recourir à un quelconque point de vue pour déterminer le monde en question comme le font les différentes méthodes analytiques).

Cette conception intrinsèque s'est révélée formalisable, permettant ainsi de résoudre le problème de la rationalité analytique. En outre, son caractère intrinsèque, se traduisant par une relation directe entre les entités conservées (l'énergie et l'impulsion), lui octroie la possibilité d'être paramétrer d'une multiplicité illimitée de manières, chaque paramètre reflétant un point de vue, à l'instar de l'infinité de projections qu'on peut avoir sur un quelconque objet matériel. Apparaît alors un perspectivisme infini autrement plus intéressant que le perspectivisme fini et très restreint de la physique, telle qu'elle s'est développée jusqu'ici.

Rappel historique : *Certes, historiquement la physique n'a pas suivi un tel cheminement, mais cette problématique s'était posée dès le 17ème siècle, à la suite de la correction de la dynamique de Descartes par Huygens (le maître de Leibniz en mécanique). En effet, alors que Huygens considère un seul monde, abordé selon un unique point de vue - suivi plus tard par Newton, d'Alembert, Lagrange et leurs successeurs jusqu'à nous - son élève Leibniz, avec son esprit généralisateur, place l'accent sur la structure de la dynamique dans sa généralité, ce qui le conduit inéluctablement à ses mondes possibles, exprimés chacun à travers une infinité de points de vue. Cela est connu sous le nom de « Perspectivisme infini de Leibniz », associé à sa démarche architectonique, opposée à la démarche analytique, limitée à une unique perspective (ou point de vue).*

Cette approche a permis un nouveau regard sur les approches analytiques (rationnelles) complémentaires, fondées sur des formalismes mathématiques bien identifiés (le calcul variationnel, la méthode géométrique…), attachés chacun à un principe physique indépendant et autonome (le Principe de moindre action, le Principe fondamental de la dynamique…).

Raison d'être de ce travail : Les remarques et critiques relatives aux présentations effectuées à ce propos depuis de multiples années dans différents laboratoires (LPMO, FEMTO-ST, LMB…) et dans divers congrès (de mécanique, de physique-mathématique, de philosophie des sciences…), m'ont persuadé de la nécessité d'expliciter le rapport entre ces démarches analytiques avant leur dépassement par une démarche supra-analytique (ou architectonique). Et c'est ce qui est présenté dans cette étude, qui expose de multiples aspects de la dynamique.

Le présent travail est composé de deux parties complémentaires formulées dans deux articles séparés. On adopte d'abord une marche ascendante allant du particulier au général (Premier article) puis une marche descendante allant du général au particulier (Second article).

Le premier article : *« Remèdes aux insuffisances de la rationalité analytique »* vise à repérer puis résoudre les insuffisances et contradictions rencontrées dans le cadre analytique spatio-temporel. On procède ici de façon progressive, mettant en évidence les insuffisances des démarches analytiques spatio-temporelles avant de les faire disparaître grâce à une réorganisation adéquate, tant conceptuelle que formelle, permettant de remonter à la source de chacune d'elles. On montrera aussi que certains mécanismes (ou procédés) qui apparaissent dans un contexte particulier (analytique) présentent un caractère universel, applicable dans un contexte général (architectonique), ce qui va permettre de préparer la jonction entre le premier et le second article, entre le cadre analytique et celui architectonique.

Le second article : *« La démarche architectonique leibnizienne appliquée à la dynamique »* bénéficiera des divers mécanismes (ou procédés) révélés dans le premier article ainsi que de la synthèse qui en découle, faisant passer de la dimension analytique, appliquée à tel ou tel point de vue, à la dimension architectonique « hors points de vue » et susceptible d'en engendrer une infinité. Cette approche architectonique abordera ainsi le problème de façons directe et générale, permettant de déduire les démarches analytiques à partir d'une source commune, transformant ainsi les principes analytiques en de simples théorèmes architectoniques.

Rationalités analytique et architectonique : *Le cheminement des démarches particulières (à des degrés divers) à la forme la plus générale - compatible avec les principes physiques de base - conduit à une ascension progressive et graduelle, aboutissant à une vraie rationalité et une réelle objectivité scientifiques qui n'apparaîtront clairement et distinctement que dans le second article. C'est ainsi que l'essence de la dynamique se détachera de ses modes d'existences (propres aux méthodes analytiques) qui n'auront plus besoin d'être postulés étant désormais déduits d'un principe supra-analytique (ou architectonique).*

Métamorphose : *L'approche de Leibniz, destinée à déduire les démarches analytiques (incomplètes et contradictoires à certains égards) à partir de sa démarche architectonique, conduit à une métamorphose semblable au passage de la chenille au papillon, avec la vue panoramique et les multiples degrés de liberté qui en résultent (aptitude du papillon à voler au lieu de ramper comme la chenille, s'affranchissant ainsi de tout support requis pour se déplacer). Se trouve ainsi scellée une alliance entre le local et le global, entre le domaine de l'action utile et celui de la conception intelligible, entre l'exploration et l'explication ou encore entre les formes saillantes particulières et la forme prégnante générale pouvant en accueillir diverses particularités (à des degrés et/ou échelles multiples) ; particularités saillantes, désormais déduites collectivement au lieu d'être imposées individuellement, sans raisons suffisantes. Et ce sont ces raisons insuffisantes qui rendent les rationalités analytiques partielles et partiales alors que la rationalité architectonique est plurielle et intégrale.*

Introduction

Nous commencerons par rappeler l'unité apportée par la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton qui constitue la rationalité usuelle de la science physique, avant de montrer qu'elle conduit à des contradictions lorsqu'on établit un lien entre les approches newtonienne et einsteinienne.
Une critique de cette rationalité est nécessaire pour lever ses contradictions. Elle permettra de dépasser les débats et controverses qui se sont manifestés en opposant la méthode scalaire initiée par Lagrange - privilégiant l'action - à la méthode vectorielle initiée par Newton - privilégiant la force. Après avoir précisé ces divers aspects en rappelant l'introduction de la « masse relativiste », pour rester proche de l'approche vectorielle de Newton, à travers le « principe fondamental de la dynamique », nous rappelons la raison d'être de l'éviction de cette notion de « masse relativiste », par la formulation variationnelle qui la fait apparaître comme un simple accident historique.

La formulation variationnelle a amélioré, à divers égards, la démarche newtonienne. Lever ses contradictions va faire apparaître une masse variable, formellement identique à la masse relativiste mais conceptuellement différente, avec une interprétation, n'ayant rien à voir avec son introduction initiale en lien direct avec la dynamique newtonienne.

Nous allons chercher à approfondir la démarche variationnelle dont la simplicité formelle apparaît déjà dans l'expression de l'impulsion : entité conservée qui correspond à la simple dérivée du lagrangien par rapport à la vitesse. Comme le lagrangien a la dimension d'une énergie mais s'en distingue par le fait qu'il ne se conserve pas, on cherche à dériver l'impulsion de l'énergie de manière à passer directement d'une entité conservée à une autre.

On découvre ainsi que cette réorganisation de la dynamique permet d'établir un lien direct aux principes de relativité et de conservation, conduisant ainsi à une approche plus profonde de la physique du mouvement, avec en particulier la possibilité de lever les contradictions mentionnées ci-dessus. Cette autre approche, qu'on élève au rang d'un principe autonome, présente un grand intérêt conceptuel même si l'équation différentielle qui en découle se révèle formellement plus compliquée que la structure de l'approche variationnelle. C'est d'ailleurs en cherchant à rendre cette équation différentielle simple à résoudre et à intégrer qu'apparaissent les notions de lagrangien et hamiltonien ! Un mécanisme (ou procédé) de **découpage** en deux de l'équation différentielle initiale va faire émerger deux nouvelles entités complémentaires, avec un **partage** des tâches qui va simplifier la résolution du problème en débouchant sur une forme intégrale où les deux entités s'articulent entre elles de manière harmonieuse, possédant chacune sa spécificité. L'une apporte une certaine unité à la structure extrinsèque de la dynamique pendant que l'autre se révèle particulièrement utile à la saisie de sa dimension intrinsèque. Et ces deux entités simplificatrices et complémentaires s'avèrent formellement identiques à ce qu'on appelle usuellement le lagrangien et le hamiltonien !

Au-delà du fait qu'une telle réorganisation du point de vue fondé sur le formalisme variationnel va permettre de lever ses contradictions et de remonter à sa source, en expliquant sa raison d'être, cette réorganisation porte en elle la possibilité de son extension à un cadre général, ouvrant la voie à un cadre de pensée de type architectonique. Celui-ci sera développé dans le second article et permettra de remonter non seulement à la source du point de vue variationnel (principe de moindre action), mais aussi à la source d'autres points de vue analytiques développés au cours de l'histoire de la rationalité scientifique, comme le point de vue, fondé sur la méthode géométrique, dans ses deux versions : vectorielle (principe fondamental de la dynamique) et scalaire (principe des puissances virtuelles), où encore celui fondé sur la théorie des groupes (principe de relativité dynamique).

Dans ce premier article nous restons confinés au sein du cadre analytique, en l'améliorant, ce qui va permettre déjà de remonter à l'origine du lagrangien et plus généralement du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton.

On montrera aussi que cette nouvelle conception de la mécanique peut aussi être appliquée à d'autres formulations analytiques (utilisant la géométrie moderne et la théorie des groupes). Mais, pour ne pas surcharger le texte principal, cela sera présenté dans les annexes. Apparaîtront alors d'autres mécanismes (ou procédés) que ceux de **découpage** et de **partage**, déjà évoqués ci-dessus. Il s'agit de mécanismes (ou procédés) de **gommage** et de **collage** permettant de passer d'un point de vue à un autre ou même d'un point de vue englobant à deux autres points de vue ou encore d'une entité conservée à une entité non-conservée mais plus simple à manier, en restant confiné au sein d'un même point de vue, avec des variantes, mixant points de vue et propriétés de conservation. Tout cela est explicité dans les annexes. Compte tenu de la diversité relative à cette procédure de **gommage** et **collage**, on sera amené à distinguer entre ce qui est homogène ou hétérogène, total ou partiel, simple ou mixte, élémentaire ou composé… Ces distinctions seront précisées ultérieurement lors de leurs apparitions, particulièrement dans l'annexe B.

Prolongement de cette étude : *Cet article confiné au sein de la physique einsteinienne spatiotemporelle sera suivi par un second : « La démarche architectonique leibnizienne appliquée à la dynamique » qui abandonne le cadre spatio-temporel (einsteinien), régi par les méthodes usuelles (dites analytiques : variationnelle, géométrique…), reflétant chacune un point de vue (ou perspective), au profit d'une approche systématique et « hors points de vue » (ou intrinsèque). On n'a plus recours à la structure spatio-temporelle ou à une quelconque cinématique précédant et déterminant la dynamique correspondante : la dynamique va y engendrer la cinématique, avec sa métrique spatio-temporelle, non l'inverse. Cette démarche systématique est dite architectonique, pour sa capacité d'engendrer, à partir d'un cadre « hors points de vue », une infinité de points de vue, dont ceux développés au cours de l'histoire scientifique qui vont apparaître comme des projections particulières de la dynamique.*

La formulation variationnelle et ses insuffisances

Remarque préliminaire : *Pour la simplicité de la présentation, on se place à une dimension spatiale, suffisante pour notre propos. L'extension à un cadre tridimensionnel est évoquée succinctement à la fin. Pour plus de détails, on peut se référer à l'article [4] entièrement consacré à l'extension à (1 + 3) dimensions des résultats à (1 + 1) dimensions fournis dans les trois premiers articles [1-3].*

La rationalité scientifique usuelle de la mécanique correspond à la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton – découlant physiquement du principe de moindre action. Elle est caractérisée par sa simplicité formelle et l'unité qu'elle apporte. Les raccourcis de cette mécanique – rationnelle – analytique (qualifiée de belle et élégante par son concepteur Lagrange) qu'on loue habituellement posent quelques problèmes, avec des contradictions qui se révèlent impossibles à lever sans passer par un changement radical de méthodologie.

On affirme généralement que la dynamique einsteinienne, fondée sur la métrique lorentzienne : $d\tau = (dt^2 - dr^2/c^2)^{1/2} = dt(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, conduit à la dynamique newtonienne pour les faibles vitesses : l'expression de l'impulsion : $p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ se réduisant à celle de Newton : $p = mv$.

Mais, si l'on considère les deux entités conservées, l'énergie et l'impulsion, $E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ et $p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, cette réduction conduit à : $E = mc^2$ et $p = mv$, ce qui est problématique : l'énergie y devient constante : $E = mc^2$, au lieu d'être parabolique, comme pour le cadre newtonien : $E = ½ mv^2 + E_0$. On peut certes obtenir une forme parabolique en effectuant un développement limité au premier ordre en v^2, mais avec un tel développement, c'est alors l'expression de l'impulsion p qui pose problème !

Les physiciens (rationalistes) expliquent que cette incohérence provient du fait qu'on raisonne sur les expressions finales, quand le raisonnement devrait porter sur l'expression initiale : celle du lagrangien

L (défini à partir de l'action par : $A = \int Ldt$), ce qui permet de déduire les entités conservées : l'impulsion p et l'énergie E.

Remarque : Notons que l'extrême simplicité de la définition de l'action A, associée au cadre einsteinien, identifiée au temps propre τ (à une constante dimensionnelle près : $A = a\tau$), fournit un argument supplémentaire à la beauté et l'élégance déjà évoquées par Lagrange.

La structure de la dynamique peut ainsi être déduite de façons simple et directe. En effet, compte tenu de : $dA = Ldt = a\, d\tau$ et de : $d\tau = dt(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, on obtient l'expression du lagrangien :

$$L = a\,(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad \text{avec} \quad v = dr/dt \qquad (1)$$

qui constitue le socle sur lequel repose la structure de la dynamique. Pour les faibles vitesses, on déduit en effet un lagrangien de type newtonien (parabolique) dès lors qu'on effectue un développement limité au premier ordre en v^2, ce qui conduit à :

$$L = \tfrac{1}{2}\, mv^2 - E_0 \quad \text{avec} \quad E_0 = mc^2 = -\,a \qquad (2)$$

Grâce à cette expression du lagrangien, liée à l'impulsion et l'énergie par les relations générales : $p = dL/dv$ et $E = vp - L$, on déduit les deux entités conservées du cadre newtonien :

$$p = mv \qquad \text{et} \qquad E = \tfrac{1}{2}\, mv^2 + E_0$$

La contradiction apparue précédemment est levée grâce à l'unité apportée par le principe physique de moindre action, exprimé mathématiquement à travers le formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton.

Tout semble rentrer dans l'ordre ; mais, si cette procédure mathématique ne souffre d'aucune déficience sur le plan strictement formel, elle se révèle conceptuellement inadéquate, étant incompatible avec le temps absolu de Newton : $dt = d\tau$ sur lequel la physique a été édifiée jusqu'à l'aube du 20ème siècle. Avec l'avènement de la relativité einsteinienne où le temps absolu de Newton : $dt = d\tau$ se relativise en se transformant en : $d\tau^2 = dt^2 - dr^2/c^2$ (appelée métrique lorentzienne), apparaît alors ledit facteur de Lorentz, défini par : $\Gamma = dt/d\tau = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ et qui se réduit au temps absolu de Newton $\Gamma = dt/d\tau = 1$, lorsqu'on néglige v^2/c^2 devant l'unité.

Avec cette nouvelle notation, le lagrangien einsteinien se trouve être inversement proportionnel au facteur de Lorentz Γ, soit :

$$L = -\,mc^2/\Gamma, \qquad \text{avec} \quad \Gamma = dt/d\tau = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (3)$$

Certes, si l'on néglige v^2/c^2 devant l'unité, on obtient effectivement le temps absolu de Newton : $\Gamma = dt/d\tau = 1$, mais le lagrangien devient alors constant : $L = -\,mc^2$, ce qui est incompatible avec l'expression du lagrangien newtonien (parabolique).

Et si l'on effectue un développement limité au premier ordre en v^2, pour retrouver un lagrangien parabolique de type newtonien :

$$L = -\,mc^2/\Gamma = \tfrac{1}{2}\, mv^2 - mc^2 \qquad (4)$$

c'est le facteur de Lorentz qui n'est plus conforme au temps absolu de Newton, puisqu'on a alors : $\Gamma = dt/d\tau \neq 1$ donc $dt \neq d\tau$!

Cette contradiction apparaît d'ailleurs déjà dans l'expression de l'action relativiste : $A = -E_0\int dt/\Gamma$ qui, dans la chronologie newtonienne : $\Gamma = dt/d\tau = 1$, se réduit à : $A = -E_0 \int dt$, ce qui contredit l'expression de l'action newtonienne : $A = \int(½\, mv^2 - E_0)dt$.

Ainsi, les expressions de l'énergie E, du lagrangien L et de l'action A, à la base de la rationalité usuelle de la physique conduisent à des contradictions lorsqu'on passe, par localisation, du cadre einsteinien au cadre newtonien.

Pour lever ces contradictions, nous allons remonter à l'origine de la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton incarnant le principe de moindre action. *Cette démarche sera généralisée dans le second article où l'on remonte à l'origine des différents points de vue rationnels développés au cours de l'histoire scientifique.*

Remarque : *Notons qu'il y a une part importante de vérité dans l'idée énoncée ci-dessus : « Les physiciens (rationalistes) expliquent que cette incohérence provient du fait qu'on raisonne sur les expressions finales, quand le raisonnement devrait porter sur l'expression initiale : celle du lagrangien L ». Seule l'attribution de « l'expression initiale » à « celle du lagrangien » pose problème. En effet, nous allons montrer plus loin que l'expression du lagrangien – et même du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton – n'est pas initiale comme cela est présenté habituellement à travers le principe de moindre action. Plus généralement, ce principe ainsi que d'autres principes analytiques fondés sur la géométrie moderne et la théorie des groupes vont se révéler n'être que des théorèmes issus d'un principe supra-analytique qui les englobe grâce à la mobilisation de la démarche architectonique de Leibniz, développée dans le second article.*

Si ce formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton a largement montré son efficacité et sa pertinence tant en physique classique (newtonienne et einsteinienne) que quantique, on voit qu'il conduit à des contradictions et on doit donc y revenir afin de les lever.
Cet approfondissement permettra aussi de dépasser les débats et les controverses qui se sont manifestées en opposant la méthode scalaire initiée par Lagrange (fondée sur la notion d'énergie) à la méthode vectorielle initiée par Newton (fondée sur la notion de force), méthodes qui vont être présentées ci-après avant de chercher à lever les contradictions qui les affectent.

Formulation variationnelle de la dynamique einsteinienne

Rappelons que dès lors que le lagrangien L est déterminé, les entités conservées p et E s'en déduisent par :

$$p = dL/dv \quad \text{et} \quad E = v dL/dv - L \qquad (5)$$

On déduit du lagrangien relativiste d'Einstein : $L = -mc^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, issu de (1), les expressions des entités conservées p et E :

$$p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad \text{et} \qquad E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (6)$$

Pour en obtenir une relation directe entre l'énergie et l'impulsion et accéder ainsi à la forme intrinsèque de la dynamique associée au monde einsteinien, nous allons proposer trois déductions, ayant chacune sa spécificité.

Première déduction

Cette première déduction est la plus directe. On va éliminer v entre les deux expressions ci-dessus, relatives à p et E, soit symboliquement :

$$p = g(v) \rightarrow v = g^{-1}(p), \text{ puis } E = f(v) = f[g^{-1}(p)] = F(p)$$

On inverse d'abord l'expression $(6)_1$ de manière à exprimer v en fonction de p, puis on l'introduit dans l'expression $(6)_2$, conduisant ainsi à :

$$E = mc^2 (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} \qquad (7)$$

Deuxième déduction
La deuxième déduction repose sur une propriété remarquable, associée à la vitesse qui prend la forme d'un simple rapport : $v = p/M$, dès lors qu'on pose : $M = E/c^2$, connue sous le nom de « masse relativiste » (dite aussi masse variable).

Comme l'inversion de p donnée en (6) conduit à : $v = p/m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}$, on en déduit :

$$v = p/M = p/m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = c^2p/E \qquad (8)$$

d'où l'on tire, d'une part, la relation : $M = m\ (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = E/c^2$, équivalente à (7), d'autre part, l'expression de l'impulsion : $p = Mv$ qui rappelle l'approche vectorielle de Newton, où l'impulsion einsteinienne : $p = Mv$ se réduit localement à l'impulsion newtonienne : $p = mv$. Celle-ci reflète la forme intégrale de ladite « loi fondamentale de la dynamique newtonienne » : $F = ma$, avec $a = dv/dt$, fondée sur la notion de force.

Rappel de la conception newtonienne : *Partant de la notion de force : $F = mdv/dt$, avec $v = dr/dt$, l'impulsion p et l'énergie E s'en déduisent respectivement par deux intégrations : l'une temporelle, l'autre spatiale, d'où l'on tire :*

$$p = \int Fdt = \int m(dv/dt)dt = \int mdv \quad \textit{ainsi que} \quad E = \int Fdr = \int F.vdt = \int m(dv/dt).vdt = \int mvdv.$$

Nous verrons que l'introduction d'une masse variable ne sera intéressante qu'au prix d'une interprétation différente de celle fournie jusqu'ici. D'ailleurs, si p et M se réduisent localement à $p = mv$ et $M = m$, ce qui est compatible avec la physique newtonienne, il n'en est pas de même pour l'énergie E.

L'introduction artificielle de masse relativiste issue de $M = E/c^2$ a été critiquée par les défenseurs de la rationalité scientifique ; introduction considérée comme un simple accident historique. D'ailleurs, lorsqu'on se place dans le système d'unités naturelles ($c = 1$), ladite masse relativiste devient identique à l'énergie ($M = E$). Il peut sembler absurde d'utiliser deux lettres différentes (E et M), pour désigner une seule et même entité ! En lui donnant cependant une autre signification son expression sera d'un grand intérêt, tant conceptuel que formel.

Troisième déduction
Au lieu d'exprimer la vitesse à travers le rapport particulier $v = p/M$, déterminé dans la seconde déduction, en ayant recours aux expressions particulières de l'impulsion p et de l'énergie E données en (6), on va l'exprimer à partir de la forme générale (5), établie par Hamilton, où l'énergie prend la forme : $E = vp – L$, désignée aussi par H, appelée le hamiltonien du système.

En effectuant une transformation de Legendre, l'énergie exprimée en fonction de la vitesse $E = f(v)$ se trouve désormais exprimée en fonction de l'impulsion : $H = E = F(p)$.

Précisément, on a : $dE = vdp + pdv – L = vdp$, soit : $H = E = \int vdp = F(p)$.

Lorsque la vitesse est exprimée en fonction de l'impulsion, elle se réduit à la dérivée de l'énergie (ou du hamiltonien), expression, essentielle au formalisme hamiltonien, connue sous le nom de première équation canonique de Hamilton :

$$v = dE/dp \qquad (\text{ou } v = dH/dp) \qquad (9)$$

Le passage de la deuxième déduction à la troisième, correspond au remplacement de la forme particulière : $v = p/M$, avec $M = E/c^2$, propre à la dynamique einsteinienne, par la forme générale : $v = dE/dp$, valable pour toute dynamique, ce qui transforme (8) en

$$v = dE/dp = p/m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} \qquad (10)$$

Ceci conduit à :

$$E = \int v dp = mc^2 (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} \qquad (11)$$

retrouvant ainsi de nouveau l'expression de E, déjà obtenue de deux autres manières lors des première et deuxième déductions.

Rappelons que si le monde dynamique (einsteinien) a utilisé initialement la vitesse comme paramètre du mouvement, d'autres caractéristiques sont apparues ultérieurement, la célérité et la rapidité [10], ayant chacune sa spécificité avec des propriétés remarquables justifiant son adoption. Ces relations qui lient l'impulsion (ou l'énergie) à l'un ou l'autre des paramètres du mouvement (vitesse, célérité, rapidité…), correspondent chacune à un point de vue sur le monde dynamique. Comme la structure interne de la dynamique admet une infinité de points de vue [1], ceux-ci ne seront présentés et explicités que dans le second article, avec l'approche architectonique qui engendre et explique les différentes approches analytiques, les seules à être rappelées et examinées dans le présent article.

Déductions intrinsèques de la dynamique exprimées sous formes différentielles

La troisième déduction, qui correspond à la formulation hamiltonienne ($H = E = \int v dp$), exprimée par :

$$E = \int v dp \quad \text{et} \quad E = mc^2(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} \qquad (12)$$

prend la forme différentielle :

$$v = dE/dp \qquad \text{et} \qquad v = pc^2/E \qquad (13)$$

alors que la deuxième déduction, qui correspond à la formulation newtonienne ($p = Mv$), exprimée par :

$$p = Mv, \quad \text{et} \quad M = m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} \qquad \text{avec} \quad M = E/c^2 \qquad (14)$$

prend cette autre forme différentielle :

$$v = p/M \qquad \text{et} \qquad v = c^2 dM/dp, \qquad \text{avec } M = E/c^2 \qquad (15)$$

L'élimination de v, dans les formulations hamiltonienne et newtonienne, conduit à :

$$dE/dp = c^2p/E \qquad \text{et} \qquad p/M = c^2dM/dp \quad \text{avec} \quad M = E/c^2 \qquad (16)$$

Ces expressions intrinsèques, dépendant des seules grandeurs conservatives, issues de (13) et (15) constituent le cœur de la dynamique einsteinienne. Cette indépendance de tout point de vue révèle le monde de la dynamique, exprimé ici sous forme différentielle.

Si les expressions (16) sont irréprochables sur le plan formel, elles restent mystérieuses sur le plan conceptuel. Elles méritent d'être clarifiées et justifiées, ce qui va faire apparaître le rôle crucial joué par les principes de relativité et de conservation (deux piliers principaux de la physique).

Démarches (particulière et générale) fondées sur les principes de relativité et de conservation

Une démarche générale a déjà été développée dans [1-5], à travers l'approche architectonique de Leibniz, mais celle-ci établit une coupure tranchante avec le cadre scientifique usuel, faisant ainsi abstraction des différentes démarches analytiques qui n'apparaissent qu'en dernier, comme des cas particuliers du cadre architectonique général. Et c'est justement pour éviter cette coupure avec la pratique usuelle de la physique, que nous procédons ici du particulier au général, de façons continue et graduelle, gardant ainsi un contact direct avec le point de vue spatiotemporel (bien-connu), avant de chercher à résoudre les problèmes auxquels il donne lieu. Ceci permet de montrer que non seulement une réorganisation adéquate de ce point de vue particulier suffit à découvrir la source des problèmes constatés ci-dessus mais aussi qu'une telle réorganisation (développée dans ce premier article) porte en elle la possibilité de son extension ouvrant la voie à un cadre de pensée « hors points de vue » et « hors espace-temps » (développé dans le second article).

Ce dernier point est essentiel : il prépare le chemin à une généralisation naturelle, directe et appropriée (compatible avec les principes physiques de base) où l'on va pouvoir repérer des mécanismes (ou procédés) sous-jacents généralisateurs et performants, permettant à un simple point de vue (ou perspective) de générer sa propre généralisation et son ouverture à un perspectivisme infini. Et ce sont ces mécanismes (ou procédés), mis en évidence, dans ce premier article, qui vont réduire l'arbitraire de la description scientifique, ajoutant à l'efficacité de l'exploration la clarté de l'explication.

L'un de ces mécanismes (ou procédés), dit de **filtrage**, limité ici au point de vue spatio-temporel, exprimé par la vitesse [développé ci-dessous à travers (21)-(22)], va rendre les équations de la physique différentes des équations habituelles, faisant ainsi disparaître le caractère magique et mystérieux des équations (16) qui s'écriront sous la forme :

$$M = pdp/dE \quad \text{et} \quad pdp/dE = E/c^2 \tag{17}$$

Cette nouvelle écriture - à ce stade, aussi mystérieuse que celles données en (16) - requiert une double explication. Il va falloir préciser d'abord la (nouvelle) signification physique de $M = pdp/dE$, puis la motivation rationnelle - raison principale - pour laquelle la forme pdp/dE doit être égalisée à E/c^2.

Si la notation M va être maintenue, son introduction à travers l'écriture vectorielle : $p = Mv$, va être réinterprétée. En particulier, elle va acquérir une dimension intrinsèque - « hors points de vue » - distincte de son introduction liée au point de vue de la vitesse v, inspirée de la dynamique newtonienne.

L'impulsion dérivant de l'énergie (Démarche privilégiant l'énergie au lagrangien)

Dans un premier temps, pour des raisons didactiques, nous retenons des équations (5) et (6), les expressions qui vont nous être utiles :

$$p = dL/dv = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \tag{18}$$

Compte tenu du statut du lagrangien qui a la dimension d'une énergie mais qui ne se conserve pas comme elle, on va chercher à dériver l'impulsion p directement à partir de l'énergie E pour rester en contact direct avec les entités conservées – l'idée de conservation constituant un des piliers de l'approche physique.

Apparaîtront des propriétés remarquables et des concepts nouveaux permettant d'éviter les contradictions et de découvrir une autre conception de la dynamique. Celle-ci va permettre de remonter à l'origine du lagrangien et plus généralement du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton, comme on va le voir ci-dessous, dans les trois prochaines sections.

Nous allons d'abord révéler les propriétés remarquables et singulières issues de la dérivation de l'impulsion à partir de l'énergie et des conséquences qui en découlent, avec la possibilité de lever les contradictions évoquées ci-dessus.
Nous montrerons ensuite que ces propriétés conduisent naturellement à une autre conception de la dynamique, avec une nouvelle formulation.
Nous verrons enfin que cela permet de remonter à l'origine du lagrangien et plus généralement du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton.

1– Propriétés remarquables et levée de la contradiction

Lorsqu'on cherche à déduire l'impulsion de l'énergie E au lieu du lagrangien, apparaît alors un nouvel opérateur de dérivation d*/dv, certes, plus compliqué que la simple dérivée d/dv, mais qui va révéler des propriétés dynamiques remarquables. Celles-ci vont permettre une nouvelle conception, combinant directement les idées de relativité et de conservation. En effet, l'expression de l'impulsion donnée en $(18)_1$ prend la forme suivante :

$$p = d^*E/dv = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{avec} \qquad d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv \qquad (19)$$

L'application de ce nouvel opérateur d*/dv à l'impulsion, d*p/dv (ou deux fois à l'énergie, ce qui revient au même : $d^{*2}E/dv^2$), conduit à :

$$M = (1 - v^2/c^2)\, dp/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv[(1 - v^2/c^2)\, d/dv]E = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (20)$$

Compte tenu de : $E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ donnée en (18), cela peut être exprimé à travers les formes compactes :

$$M = d^{*2}E/dv^2 \qquad \text{et} \qquad d^{*2}E/dv^2 = E/c^2 \qquad (21)$$

La première expression constitue la nouvelle définition de M alors que la seconde correspond à la contrainte imposée à $d^{*2}E/dv^2$ pour avoir un problème dynamique bien-posé et bien-déterminé, (*Les articulations données en (19)-(21) seront justifiées et explicitées plus loin dans le paragraphe intitulé :* ***Conception nouvelle de la physique du mouvement***).

Remarque : *On aurait pu remplacer dans (20) et (21) la notation M par M° (ou tout autre symbole), soit : $M° = d^{*2}E/dv^2$ et vérifier ensuite qu'elle coïncide avec la notion de masse relativiste : $M = E/c^2$, comme on le voit dans (21). Mais dès lors qu'on prend acte du fait que la nouvelle définition de M est celle obtenue à partir de la double application de l'opérateur d*/dv, il n'y a plus d'ambiguïté. Nous avons donc préféré, à ce stade, ne pas multiplier les notations : on y reviendra plus loin.*

Les informations fournies dans (19)-(21), vont permettre de montrer l'équivalence entre (21) et (17). On établit ce résultat, grâce à un mécanisme (ou procédé) de **filtrage** permettant à l'expression extrinsèque de : $M = d^{*2}E/dv^2 = d^*p/dv$ qui s'exprime à travers E, p et v, de prendre une forme intrinsèque, indépendante de la vitesse, soit : $M = pdp/dE$. En effet, compte tenu de (19) l'équation $(21)_1$, peut être transformée comme suit :

$$M = d^{*2}E/dv^2 = d^*p/dv = (1 - v^2/c^2)\, dp/dv = [(1 - v^2/c^2)\, dE/dv]dp/dE = p\, dp/dE$$

ce qui entraîne :

$$d^{*2}E/dv^2 = pdp/dE \qquad (22)$$

__Remarque :__ Ce mécanisme (ou procédé) de __filtrage__, est éxtensible à un cadre « hors points de vue » où le facteur $(1 - v^2/c^2)$ sera remplacé par un facteur indéterminé, noté $I = \hat{I}(x)$, susceptible d'une infinité de déterminations, soit : $p = I\, dE/dx$ au lieu de : $p = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv$, obtenant ainsi :

$$M = d_I{}^2E/dx^2 = d_Ip/dx = I\, dp/dx = [IdE/dx]dp/dE = p\, dp/dE$$

Cette procédure de __filtrage__ trouve sa pleine justification dans le second article où elle jouera un rôle majeur dans la détermination d'une infinité de points de vue sur le monde einsteinien.

Avant de préciser la signification physique de $M = d^{*2}E/dv^2 = pdp/dE$ et la motivation rationnelle pour laquelle on a : $d^{*2}E/dv^2 = pdp/dE = E/c^2$, nous allons utiliser l'expression (20) pour lever la contradiction relative à l'expression de l'énergie dans le passage du monde d'Einstein à celui de Newton.

Levée de la contradiction relative à l'énergie

Les développements ci-dessus relatifs à la forme explicite de l'expression de M donnée en (20), montrent que, pour les faibles vitesses, cette expression se réduit à la forme parabolique qui caractérise la dynamique newtonienne. En effet, lorsque $v^2/c^2 << 1$, l'équation (20) se réduit à : $d^2E/dv^2 = m$, dont l'intégration conduit à : $E = ½\, mv^2 + E_0$ après avoir considéré l'état de repos : $v = 0$, $p = dE/dv = 0$ et $E = E_0$.

De la même façon, lorsqu'on remontera plus loin à l'origine du lagrangien L, on obtient une équation qui, pour les faibles vitesses, se réduit au lagrangien newtonien, ce qui lève aussi la contradiction relative à l'expression du lagrangien, constatée précédemment.

Ces résultats incitent à approfondir le sens de chacun des éléments qui apparaissent dans : $M = d^{*2}E/dv^2 = E/c^2$ de (21), qui vont pouvoir caractériser un principe physique autonome, révélant une nouvelle conception de la physique du mouvement. En particulier, la notation M n'est plus définie directement à partir du rapport : E/c^2, elle va acquérir une autre signification physique.

2 – Une nouvelle conception de la physique du mouvement

L'opérateur de dérivation d^*/dv constitue un générateur d'entités conservées, obtenu en combinant les principes physiques de relativité et de conservation, où la forme : $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$ se réduit à d/dv pour les faibles vitesses. Ce nouvel opérateur de dérivation provient de la loi de composition des vitesses : $v' = v * V = (v + V)/(1 + vV/c^2)$, issue des transformations de Lorentz, qui, pour les faibles vitesses, se réduit à $v' = v + V$ (compatible avec les transformations de Galilée, à la base de la mécanique newtonienne). Les détails sont donnés dans la Note à la fin du texte.

L'égalité : $M = d^{*2}E/dv^2 = E/c^2$ obtenue dans (21) montre que si l'on poursuit les dérivations successives, on n'obtient aucune nouvelle entité conservée ! C'est ce qui caractérise la structure de la dynamique qui exige d'avoir deux et seulement deux entités qui se conservent. Ceci apparaît clairement lorsqu'on cherche à résoudre le problème du choc élastique frontal qui fut historiquement à la base du développement de la physique du mouvement (appelée dynamique par Leibniz).

Rappelons à ce propos que c'est à Huygens (le maître de Leibniz en mécanique) que revient le mérite d'avoir montré qu'il faut deux et seulement deux entités conservées pour avoir un problème dynamique bien-posé. Et ceci reste valable pour toute dynamique : newtonienne, einsteinienne, finslerienne ou autre.

Au lieu de partir des résultats fournis par la méthode variationnelle et de constater les propriétés remarquables, déduites en (21), on va inverser la procédure, en faisant jouer à cette limitation à deux quantités conservées un rôle majeur dans la structuration et la détermination de la dynamique.

Comme l'opérateur d^*/dv se comporte comme générateur d'entités conservées et comme on a besoin de deux entités conservées et seulement deux, on impose à $d^{*2}E/dv^2$, une contrainte C qui empêche la multiplication de telles entités.

Parmi les différentes contraintes possibles, données plus loin, celle vérifiant :

$$d^{*2}E/dv^2 = aE,$$

où la constante a possède la dimension de l'inverse du carré d'une vitesse (qu'on notera : $a = 1/c^2$) se révèle particulièrement intéressante : elle redonne l'énergie E, de telle sorte qu'en dehors de E et $p = d^*E/dv$, toutes les dérivations d'ordres supérieurs à un ne fournissent aucune nouvelle entité conservée, ce qu'on traduit symboliquement par :

$$p = d^*E/dv \text{ , avec : } d^{*2n}E/dv^{2n} \rightarrow E, \quad d^{*2n+1}E/dv^{2n+1} \rightarrow p \quad \text{pour } n \geq 1 \qquad (23)$$

Afin de mettre l'accent sur l'importance de la contrainte C qu'il va falloir imposer pour avoir un problème dynamique bien-posé, on écrit de façon explicite :

$$M \ = \ d^{*2}E/dv^2 \ = \ C = \ E/c^2 \qquad (24)$$

où M, ayant la dimension d'une masse, est le nom donné à $d^{*2}E/dv^2$ (sa définition), alors que C est la contrainte qu'on lui impose pour limiter à deux le nombre d'entités conservées.

Compte tenu de (22), on déduit de (24) :

$$M = pdp/dE \ = \ C = E/c^2 \qquad (25)$$

Notons en passant que l'expression intrinsèque de M (indépendante de tout point de vue : ici le point de vue de la vitesse), donnée en (25), renvoie ainsi à la structure du monde de la dynamique, M pouvant dénoter la « Masse » (variable) mais aussi le « Monde ».

Les équations (25), compatibles avec les expressions issues des formalismes hamiltonien et newtonien donnés en (16), montrent que la « masse relativiste » M (dite aussi masse variable), définie initialement par : $M = E/c^2$ en utilisant l'analyse dimensionnelle pour avoir la forme newtonienne : $p = Mv$ est définie ici par $M = d^{*2}E/dv^2$ qui se révèle égale aussi à $M = pdp/dE$.

Ainsi, le terme E/c^2 n'est plus identifié directement à M pour constituer une masse variable. Son introduction est motivée ici par la contrainte : $C = E/c^2$, qui doit être imposée à $d^{*2}E/dv^2$, pour limiter à deux le nombre d'entités conservées (condition nécessaire pour avoir un problème dynamique bien-posé).

Ainsi, la double explication requise, évoquée à propos des mystérieuses équations (17), est désormais assurée : apparaît clairement la signification de $M = pdp/dE$ et la motivation rationnelle (la raison principale) pour laquelle la forme pdp/dE doit être égalisée à E/c^2.

En outre, la notion de masse variable (qui apparaît historiquement dans le cadre relativiste) se révèle d'une importance capitale lorsqu'elle est introduite comme on l'a fait ci-dessus et mieux encore comme on le fera lorsqu'on abordera la dynamique dans toute sa généralité, à travers la démarche architectonique. En particulier et contrairement aux apparences, sa nouvelle interprétation n'a plus rien à voir avec la dynamique newtonienne ($M = m$) pas plus qu'avec la dynamique einsteinienne ($M = E/c^2$) comme l'indique la remarque ci-dessous.

Remarque : *L'approche architectonique qui fera l'objet du second article, montre que les deux dynamiques : newtonienne et einsteinienne, ne sont que deux cas doublement particuliers correspondant à la forme générale :* $M = pdp/dE = \lambda E + \gamma p + \eta$ *où l'on a posé :* $\lambda = 0$, $\gamma = 0$ *et* $\eta = m$ *pour la dynamique newtonienne et* $\lambda = 1/c^2$, $\gamma = 0$ *et* $\eta = 0$ *pour la dynamique einsteinienne. Cette forme générale correspond à l'ensemble des mondes dynamiquement admissibles que Leibniz nomme compossibles (c'est à dire compatibles avec les principes de relativité et de conservation*).

Avant de clore cette Section, notons que non seulement la masse variable (ou relativiste) n'apparaît plus comme un accident historique mais sa nouvelle définition : $M = d^{*2}E/dv^2$ va jouer un rôle décisif comme on le verra dans le reste de cet article : c'est à travers elle qu'on va pouvoir remonter à l'origine du lagrangien et, plus généralement, du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton !

3 - Origine du lagrangien et du formalisme de Lagrange et Hamilton

Ce qui, à première vue, apparaît comme un travers, en raison de la complexité formelle de l'opérateur : $d^{*2}/dv^2 = (1 - v^2/c^2)^2\, d^2/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, d/dv$, va s'avérer particulièrement fructueux tant pour lever les contradictions révélées au début de cet article que pour la déduction du lagrangien et plus généralement du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton.

En effet, la complexité de l'opérateur, appliqué à l'énergie E - difficilement maniable en tant que tel, avec ses deux groupes de termes du second et du premier ordre : $(1 - v^2/c^2)^2\, d^2E/dv^2$ et $2v[(1/c^2 - v^2/c^4)$ dE/dv - va être sensiblement réduite et dédoublée de manière à séparer les deux groupes de termes au lieu de les traiter conjointement.

Procédures de découpage et de partage

Cette double réduction va se faire grâce à un mécanisme (ou procédé) de **découpage** en deux parties l'une du second-ordre, en d^2E/dv^2, l'autre du premier-ordre, en dE/dv. Et ces deux parties simples à manier vont jouer chacune un rôle complémentaire à l'autre, avec un **partage** des tâches, qui va permettre à la structure formelle de devenir intégrable par les méthodes élémentaires d'intégration. Et ce sont ces deux mécanismes (ou procédés) de **découpage** et de **partage** qui vont révéler la structure du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton.

Extension directe : *Ce dédoublement structurel, particulièrement efficace pour la résolution du point de vue spatio-temporel particulier donné ci-dessus, va se révéler directement extensible à d'autres points de vue et même à un cadre dynamique « hors points de vue », établissant ainsi une jonction naturelle entre le présent article et le suivant qui va le systématiser et le généraliser, en restant conforme aux exigences de base de la physique (relativité et conservation).*

En bref, au lieu d'avoir un opérateur compliqué, appliqué à l'énergie E ; opérateur combinant inextricablement des différentiations du premier et du second ordre, on aura deux opérateurs simples, du second-ordre et du premier ordre, appliqués respectivement à deux entités intermédiaires complémentaires : F et G.

Remarque : *Seule l'entité simplificatrice F est nécessaire pour remonter à l'origine du lagrangien, expliquée ci-dessous. Les deux entités F et G, issues du découpage de la structure initiale en deux parties,* *ne vont apparaître ensemble - en partageant la même structure formelle - qu'ultérieurement lorsqu'on abordera l'origine du formalisme de Lagrange et Hamilton.*

Origine du lagrangien

La forme explicite de l'équation différentielle du second-ordre donnée en (20) et qui correspond à :

$$M = d^*/dv(d^*E/dv) = (1 - v^2/c^2)^2\, d^2E/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, dE/dv = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (26)$$

va être simplifiée par un changement de variable, introduisant une fonction F, où

$d^*E/dv = (1 - v^2/c^2)dE/dv$ est remplacé par dF/dv, ce qui conduit à :

$$M = d^*/dv(dF/dv) = (1 - v^2/c^2)\, d^2F/dv^2 = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (27)$$

Cette équation est intégrable par les méthodes élémentaires d'intégration et l'entité F se révèle identique à l'expression du lagrangien L, où l'on montre aisément que : $F = L = - mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ vérifie (27).

Pour remonter à l'énergie, il suffit de passer de l'expression de F à celle de E, grâce à :

$d^*E/dv = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv = dF/dv$, ce qui conduit à : $E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Levée de la contradiction relative au lagrangien

La contradiction évoquée au début du texte va être levée puisque pour, les faibles vitesses, (27) conduit à la forme parabolique caractéristique de la dynamique newtonienne.
En effet, lorsque $v^2/c^2 << 1$ et $F = L$, l'équation (27) se réduit à : $d^2L/dv^2 = m$.
Son intégration conduit à :

$$L = ½\, mv^2 + L_0$$

dès lors qu'on prend en compte l'état de repos : $v = 0$, $p = dL/dv = 0$ et $L = L_0$

La prétendue primauté de la formulation variationnelle avec la définition de l'impulsion à partir du lagrangien est illusoire. Le lagrangien L, n'est pas premier : c'est une entité introduite pour simplifier la définition de M dont l'expression explicite se révèle complexe. Il s'agit en fait de l'apport d'une procédure simplificatrice, d'un moyen mathématique (d'un artifice) qui permet de réduire la complexité de la structure formelle peu maniable et compliquée à intégrer et à résoudre lorsqu'on l'aborde telle quelle.

La complexité formelle – simplifiée par des découpages appropriés qui donnent naissance au lagrangien (*et au hamiltonien comme on le verra plus loin*) – précède certes la simplification requise pour avoir une structure formelle opérationnelle et facile à manier mais elle n'est pas première pour autant. Elle découle d'une autre forme de simplicité qui n'est plus formelle cette fois-ci mais conceptuelle, dont on va voir ci-dessous que c'est elle qui est première.

Trois étapes pour obtenir le lagrangien

Il y a trois étapes à franchir pour faire apparaître enfin le lagrangien, supposé, à tort, comme étant une notion première, définie conjointement avec l'action, à la base du principe de moindre action, traduit mathématiquement par la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton !

La ***première étape***, conceptuellement simple, combine, de façon compacte, deux idées physiques de base (relativité et conservation) qui se traduisent par :

$$M = d^{*2}E/dv^2 \qquad (28)$$

avec un sens précis et clair des concepts attachés à M et E ainsi qu'à l'opérateur d^*/dv et son dédoublement $d^{*2}/dv^2 = d^*/dv(d^*/dv)$ comme déjà exposé.

Lorsqu'on explicite, dans une ***deuxième étape***, la nouvelle conception, on constate que la structure formelle qui en découle correspond à un mélange inextricable de signes, de symboles et d'opérateurs de dérivations d'ordres différents : la clarté et la simplicité conceptuelles conduisent ici à une complexité formelle correspondant à :

$$M = (1 - v^2/c^2)^2\, d^2E/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, dE/dv = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (29)$$

qui doit être clarifiée et simplifiée pour pouvoir être utilisée.

Intervient alors la ***troisième étape*** qui consiste à effectuer une simplification, par changement de variable, rendant le problème formel facile à résoudre.

Grâce à une telle procédure simplificatrice, l'équation différentielle (29) qui s'écrit aussi :

$$(1 - v^2/c^2)d^2E/dv^2 - (2v/c^2)\, dE/dv = d/dv[(1- v^2/c^2)dE/dv] = m/(1 - v^2/c^2)^{3/2} \quad (30)$$

se réduit à :

$$d^2L/dv^2 = m/(1 - v^2/c^2)^{3/2} \qquad (31)$$

où l'on a remplacé E par L, vérifiant : $dL/dv = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv$.

Ici, le passage de l'énergie E (entité physique caractérisée par sa propriété de conservation) au lagrangien L (entité mathématique caractérisée par la simplicité formelle qu'elle génère) s'accompagne du passage de l'opérateur $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$ (opérateur physique reflétant le principe de relativité) à l'opérateur d/dv (opérateur usuel de dérivation caractérisé par sa simplicité formelle, dépourvu de tout sens physique).

Alors que l'opérateur $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$ et l'entité E sur laquelle il opère sont conceptuellement identifiés et présentent un sens physique précis, l'opérateur d/dv et l'entité L sur laquelle il opère sont dépourvus de toute signification physique. Ils sont introduits par une manipulation formelle ayant pour but de simplifier une expression compliquée.

Leur utilité et usage sont compréhensibles lorsqu'on est en présence de la totalité des informations, du fond comme de la forme, de la dimension conceptuelle (ou fondatrice) comme de celle opérationnelle (ou formelle). En revanche, lorsqu'on ne dispose que de la seule forme (mathématique et opérationnelle), en se contentant de la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton, il ne faut pas s'étonner de voir apparaître des difficultés conceptuelles et des contradictions logiques. Et R. Penrose n'a pas hésité à qualifier cette formulation de « magique ».

Remarque : *On peut noter que la résolution de l'équation différentielle (compliquée) du second-ordre, donnée en (26), peut être simplifiée et résolue autrement, ce qui donnera lieu à la méthode géométrique qui correspond à un autre point de vue que celui de la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton. Mais afin de poursuivre la démarche progressive et continue adoptée jusqu'ici, nous invitons pour cela le lecteur à se référer à l'annexe A.*

Origine du formalisme de Lagrange et Hamilton

Nous allons poursuivre notre cheminement en faisant émerger, en plus du lagrangien, le hamiltonien qui lui est complémentaire pour faire apparaître dans toute sa clarté la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton.

Dans une première étape, on va mettre l'accent sur la seule structure formelle qui découle du développement de $d^{*2}E/dv^2$ donnée en (26), en laissant de côté pour l'instant la partie qui se trouve à la droite de l'égalité : $m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. On verra que cela permet d'établir un lien entre le lagrangien et le hamiltonien et d'obtenir ainsi une structure générale qui s'apparente au formalisme de Lagrange et Hamilton.

Mais, pour achever la résolution du problème et accéder à une quantification complète, il faudra prendre en compte la quantité laissée provisoirement de côté. Cela sera fait dans une seconde étape où l'on déterminera les expressions quantifiées du lagrangien et du hamiltonien.

Première étape : lien entre le lagrangien et le hamiltonien (Découpage et Partage)
Nous allons partir de l'équation (26), laissant de côté pour l'instant l'expression : $m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, qui se trouve à la droite de l'égalité, ce qui conduit à :

$$M = d^{*2}E/dv^2 = d^*/dv(d^*/dv)E = (1 - v^2/c^2)\, d^2E/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, dE/dv \quad (32)$$

La simplification de cette forme, grâce à la mobilisation des mécanismes (ou procédés) de **découpage** et de **partage,** expliqués qualitativement ci-dessus et quantitativement ci-dessous, va permettre de remonter à l'origine du formalisme de Lagrange et Hamilton.

La complexité due à la combinaison des deux groupes de termes, l'un du second-ordre (en d^2E/dv^2) et l'autre du premier-ordre (en dE/dv), va être réduite de deux manières complémentaires : on découpe en deux l'équation différentielle (32), avec ses deux groupes de termes, en la remplaçant par une équation différentielle plus simple du second ordre et une autre du premier ordre, formées chacune avec un seul groupe de termes. On introduit ainsi deux sortes de dérivations simplificatrices qui opèrent sur deux nouvelles entités : F et G, ayant la même dimension que l'énergie.

Pour réaliser cette double simplification, on utilise l'analyse dimensionnelle, où l'on remplace l'opérateur : $d^{*2}/dv^2 = d^*/dv(d^*/dv)$, appliqué à E - dont la forme explicite combine deux ordres de dérivations (en d^2E/dv^2 et dE/dv) - par deux opérateurs plus simples : $d^*/dv(d/dv)$ et $1/v(d^*/dv)$, de même dimension, appliqués respectivement à F et G, l'un en d^2F/dv^2 et l'autre en dG/dv. On obtient ainsi :

$$M = d^*/dv(d^*/dv)E = d^*/dv(d/dv)F = 1/v(d^*/dv)G \quad (33)$$

Leurs expressions explicites correspondent à :

$$M = (1 - v^2/c^2)^2\, d^2E/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, dE/dv \quad (34)$$

pour E, et à :

$$M = (1 - v^2/c^2)\, d^2F/dv^2 = [(1 - v^2/c^2)/v]\, dG/dv \quad (35)$$

pour F et G.

On voit là que l'équation compliquée (34) est découpée en deux équations plus simples données en (35). Et c'est ce dédoublement structurel, par un découpage approprié, qui va rendre l'intégration facile à réaliser, où F et G se partagent les tâches au sein d'une même structure : $G = vdF/dv - F$.

Sachant que d'après $p = d^*E/dv$, donnée en (19), on peut écrire :

$$M = d^{*2}E/dv^2 = d^*p/dv = (1 - v^2/c^2)\, dp/dv \qquad (36)$$

l'équation (35) se trouve complétée ainsi :

$$M = (1 - v^2/c^2)\, dp/dv = (1 - v^2/c^2)\, d^2F/dv^2 = [(1 - v^2/c^2)/v]\, dG/dv \qquad (37)$$

d'où l'on tire, compte tenu de l'identité $v\, d^2F/dv^2 = d/dv(vdF/dv - F)$:

$$dp/dv = d^2F/dv^2 \qquad \text{et} \qquad d/dv(vdF/dv - F) = dG/dv \qquad (38)$$

L'intégration de (38) conduit, à des constantes additives près, à :

$$p = dF/dv \qquad \text{et} \qquad G = vdF/dv - F \qquad (39)$$

qui peut aussi s'écrire:

$$G = vp - F \qquad \text{avec} \qquad p = dF/dv \qquad (40)$$

On voit là la parenté avec la structure associée à la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton, soit : $H = vp - L$ avec $p = dL/dv$, dès lors qu'on pose : $G = H$ et $F = L$. Quant à l'obtention de la forme complète : $G = H = E$, celle-ci n'apparaît que dans la seconde étape.

Ainsi, le hamiltonien H et le lagrangien L coïncident respectivement avec les entités G et F, introduites pour transformer l'équation différentielle complexe du second-ordre en deux équations différentielles simples, l'une du premier-ordre et l'autre du second-ordre.

Rappel succinct des procédures de découpage et de collage : L'opérateur différentiel compliqué, appliqué à E, donné en (34) est découpée en deux opérateurs plus simples, appliqués à deux nouvelles entités complémentaires : F et G, données en (35). Et ces deux entités partagent la même structure formelle en l'exprimant sous forme intégrale, comme l'indiquent (39) et (40).

Seconde étape : achèvement de la détermination du lagrangien et du hamiltonien

Afin de déterminer les valeurs du lagrangien et du hamiltonien, régis par : $G = vdF/dv - F$, avec $F = L$ et $G = H$, il suffit de prendre en compte l'expression : $m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ de (26) laissée de côté provisoirement dans la première étape associée à l'équation (32).

Rappelons cependant que le lagrangien avait déjà été introduit et déterminé à partir de (26) et (27) alors que le hamiltonien n'apparaît qu'ultérieurement à travers (33)-(39). Pour ce qui est du lagrangien, on avait montré qu'il correspondait à : $F = L = - mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, d'où l'on avait tiré l'expression de l'énergie : $E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Grâce à ces résultats et compte tenu de (39), nous allons pouvoir déduire le hamiltonien H, qui s'avère être égal à l'énergie, soit : $H = E$.

En effet, la substitution de : $F = L = -mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ dans : $G = H = vdF/dv - F$, issue de (39) et de $G = H$, conduit à : $G = H = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Comme on a en plus : $E = mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, on obtient finalement : $G = H = E$.

Remarque : *On aurait pu faire l'économie de la section consacrée à la déduction du seul lagrangien, mais procéder en deux temps en déduisant d'abord le lagrangien puis le hamiltonien, a permis d'empêcher de possibles confusions, clarifiant ainsi certains points cruciaux dont la levée de la contradiction au sujet du lagrangien et les différentes étapes pour le déduire au lieu de le postuler comme c'est usuellement le cas.*

Extension à un cadre « hors points de vue »
Le fait d'avoir distingué dans cette section deux étapes, laissant ainsi la structure partiellement informée, dans la première étape, permet une ouverture vers d'autres points de vue. En effet, lors du passage de (37) à (38), on voit la disparition du facteur $(1 - v^2/c^2)$ *qui reflète la loi de composition des vitesses :* $v' = v * V = (v + V)/(1 + vV/c^2)$*, apparaissant à travers l'opérateur de dérivation :* $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$ *: il s'élimine de part et d'autre des différentes égalités de (37). On peut en profiter pour étendre la démarche à un cadre « hors points de vue » susceptible d'engendrer un nombre potentiellement infini de points de vue, puisque le remplacement de l'opérateur particulier bien-déterminé :* $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$ *par un opérateur général indéterminé :* $d_I/dx = Id/dx$*, où I est une fonction quelconque de x, soit :* $I = \hat{I}(x)$*, conduit au même résultat formel.*

L'équation (37) s'écrit alors :

$$M = Idp/dx = Id^2F/dx^2 = [I/x]dG/dx$$

On en tire des formes analogues à celles obtenues dans (38)-(40). Ce qui revient à remplacer

$$p = dF/dv \;\text{ et }\; G = vdF/dv - F \quad \text{par :} \quad p = dF/dx \;\text{ et }\; G = xdF/dx - F$$

Dans un prochain article, consacré à une étude générale et systématique, indépendante de tout point de vue, on montre que cette forme sert pour tout point de vue, permettant de déduire, en plus de la formulation fondée sur le calcul variationnel, celles fondées sur la méthode géométrique et la théorie des groupes.

Déduction directe de la dynamique

La démarche développée jusqu'ici reste calculatoire. L'accent est placé sur les simplifications mises en œuvre, pour pouvoir accéder à une manière d'exprimer les choses de façon simple et opérationnelle.

Néanmoins, le fait d'avoir utilisé dans (26), en plus de la définition de M :

$$M = d^*/dv(d^*E/dv) = d^{*2}E/dv^2,$$

sa valeur quantitative : $M = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ est discutable, puisqu'il s'agit là d'un résultat final et non d'une donnée initiale.

Ce résultat est certes compatible avec $M = E/c^2$, mais seule cette dernière expression fournit une conception rationnelle, accompagnée d'une explication convaincante, comme on l'a montré en dévoilant la nouvelle structuration de la dynamique, donnée en (24) et qui se traduit par :

$$M = d^{*2}E/dv^2 = C = E/c^2,$$

où C correspond à la contrainte à imposer (ici $C = E/c^2$) pour limiter à deux le nombre d'entités conservées.

Nous allons donc réécrire (26) en remplaçant : $M = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ par $M = E/c^2$, ce qui revient à adopter la conception donnée en (24), directement liée aux principes de relativité et de conservation, exprimée par la double application à l'énergie de l'opérateur : d^*/dv, soit : $M = d^{*2}E/dv^2$. Ensuite, l'égalisation de cette expression à E/c^2 (exigée par la contrainte C), permet la détermination de la dynamique.

Après avoir déterminé la solution, on établira le lien avec le formalisme de Lagrange et Hamilton, utile pour l'exploration scientifique. On constatera alors que la dynamique est plus aisée à manier à partir de ce formalisme, mais ce au prix de raccourcis qui recèlent des contradictions, lorsque énoncé comme principe premier. C'est seulement lorsque ce formalisme apparaît comme théorème issu d'un principe plus profond qui lui donne naissance que ces contradictions et ces énigmes s'évanouissent.

La résolution directe du problème, sans recours à des entités intermédiaires, va être effectuée en deux étapes. La première consiste à effectuer un passage de la forme extrinsèque formulée proprement dans (24) et qui dépend de la vitesse à celle intrinsèque qui n'en dépend plus, obtenant ainsi un lien direct entre l'énergie et l'impulsion. La seconde étape utilisera le résultat intrinsèque combiné à l'expression extrinsèque reliant l'impulsion à la vitesse pour en déduire le lien entre l'impulsion et la vitesse puis celui entre l'énergie et la vitesse.

Si la résolution peut être effectuée de différentes manières comme l'indiquent les annexes A et B en ayant recours à diverses stratégies privilégiant chacune un changement de variable adapté, celle présentée (conceptuellement et qualitativement) ci-dessus et explicitée (formellement et quantitativement) ci-dessous va faire jouer à la dimension intrinsèque de la dynamique un rôle majeur dans l'élaboration de la nouvelle méthodologie.

Il importe de noter qu'au lieu de mobiliser une quelconque propriété remarquable ou simplification formelle comme on l'a fait dans les précédentes sections, on énonce ici un principe physique autonome qui se révèle fondamental, apte à une extension vers l'approche architectonique leibnizienne, développée dans le second article. La démarche adoptée ci-dessous prépare le chemin à cette approche générale et systématique. Elle érige un pont frayant un passage du règne analytique au règne architectonique où il n'est plus question de se limiter à un monde particulier, ni même à un point de vue spécifié à l'avance.

Première étape : ***Intégration par passage de la forme extrinsèque à la forme intrinsèque***

On effectue un passage de la forme extrinsèque formulée dans (24), qui dépend de la vitesse à la forme intrinsèque qui n'en dépend plus, obtenant ainsi un lien direct entre l'énergie et l'impulsion.

Pour déduire les équations de la dynamique associées au monde einsteinien et exprimées à travers le point de vue de la vitesse, nous partons de l'équation (24) : $M = d^{*2}E/dv^2 = E/c^2$ qui établit la structure principale, complétée par la définition de l'impulsion donnée en (23), soit : $p = d^*E/dv$.

Leurs formes explicites sont :

$$M = (1 - v^2/c^2)\, d/dv\{(1 - v^2/c^2)\, dE/dv\} = E/c^2 \quad \text{avec } p = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv \qquad (41)$$

dont on déduit :

$$M = (1 - v^2/c^2)\, dp/dv \qquad (42)$$

Ceci permet d'établir :

$$p/M = [(1 - v^2/c^2)\, dE/dv]/[\, (1 - v^2/c^2)\, dp/dv] = dE/dp \qquad (43)$$

Compte tenu de $M = E/c^2$, on obtient :

$$M = p dp/dE = E/c^2 \qquad (44)$$

dont l'intégration est immédiate :

$$M = E/c^2 = m\,(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} \qquad (45)$$

où l'on a considéré la condition initiale : $p = 0$, $M = m$.

Remarque : *Si l'on replace l'opérateur de dérivation particulier : $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$ bien-déterminé par l'opérateur indéterminé : $d_I/dx = I d/dx$, où $I = \hat{I}(x)$ est une fonction indéterminée de x, l'équation $p/M = dE/dp$, issue de (43) reste la même puisque $(IdE/dx)/(Idp/dx) = dE/dp$, ce qui conduit à (44) et (45) sans avoir besoin de spécifier un quelconque point de vue. Cette propriété, faisant passer de l'extrinsèque à l'intrinsèque, sera mise à profit dans le second article qui présentera une approche « hors points de vue » et susceptible d'en engendrer une infinité dont ceux développés au cours de l'histoire scientifique. Ce passage se traduit par un mécanisme (ou procédé) de* ***filtrage****, éliminant l'infinité potentielle de points de vue au profit de la relation intrinsèque liant les entités conservées. Ceci va faire jouer à cette relation intrinsèque, issue de la procédure de filtrage, un rôle majeur dans la détermination de l'infinité de points de vue ; trait caractéristique de l'architectonique leibnizienne.*

Seconde étape : ***Détermination de l'impulsion et de l'énergie en fonction de la vitesse***

Nous allons exprimer l'impulsion p et l'énergie E en fonction de la vitesse à partir d'une combinaison intrinsèque-extrinsèque. On établit le lien entre p et v, puis grâce à (45), entre E et v.

La combinaison de (42) et (45) conduit à :

$$(dp/m)/(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = dv/(1 - v^2/c^2) \qquad (46)$$

obtenant ainsi, avec la condition initiale : $p = 0$, $v = 0$, les formes intégrales :

$$\sinh^{-1}(p/mc) = \tanh^{-1}(v/c) \qquad (47)$$

Sachant qu'on a l'identité : $\sinh^{-1}(x) = \tanh^{-1}[x/(1 + x^2)]$, on en déduit :

$$\tanh^{-1}[(p/mc)/(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}] = \tanh^{-1}(v/c) \qquad (48)$$

d'où l'on tire : $v = (p/m)/(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}$ qui, grâce à (45), sera complétée par

$$v = (p/m)/(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = p/M = c^2p/E \qquad (49)$$

Après quelques manipulations formelles, on en déduit les expressions de l'impulsion p et de l'énergie E, en fonction de la vitesse v, retrouvant ainsi les équations bien-connues déduites en (6), à partir de la rationalité usuelle de la physique.

Déduction du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton

Contrairement à ce qui a été explicité successivement dans les sections intitulées : *« Origine du lagrangien »* suivie par : *« Origine du formalisme de Lagrange et Hamilton »*, ici, ce n'est pas le lagrangien mais le hamiltonien (ou l'énergie) qui apparaît en premier. Et c'est seulement après avoir effectué une certaine manipulation formelle - pour exprimer les deux entités conservées E et p en fonction de v - qu'émerge la structure du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton.

Après avoir résolu directement, dans (41)-(49), le problème de la dynamique, sans passer par une simplification par changement de variables, nous constatons que d'après (43) et (49), on a respectivement :

$$p/M = dE/dp \quad \text{et} \quad v = p/M \tag{50}$$

d'où l'on tire ladite première équation canonique de Hamilton :

$$v = dE/dp \tag{51}$$

à la base de la formulation hamiltonienne. Celle-ci permet d'exprimer l'énergie (ou le hamiltonien : H = E), en fonction de l'impulsion, soit : $E = \int vdp$, dès lors qu'on connaît l'expression de la vitesse en fonction de l'impulsion, soit : v = f(p).

La déduction du lagrangien, permettant à l'impulsion et l'énergie, d'être exprimées en fonction de la vitesse, s'obtient par intégration par parties :

$$E = \int vdp = vp - \int pdv \tag{52}$$

équivalente à :

$$E = vp - L \quad \text{avec } p = dL/dv \tag{53}$$

ou encore à :

$$p = dL/dv \qquad \text{et} \qquad E = vdL/dv - L \tag{54}$$

Cette dernière forme correspond à la structure associée au formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton, où la donnée du lagrangien permet d'obtenir les deux entités conservées que sont l'impulsion p et l'énergie E.

La structure du formalisme de Lagrange et Hamilton donnée en (54) découle de (51), correspondant à la première équation canonique de Hamilton (v = dE/dp), qui, à son tour découle de $d^{*2}E/dv^2 = E/c^2$, explicitée en (41).

Ce cheminement qui aboutit aux expressions données en (50), repose principalement sur l'expression de la structure intrinsèque : p/M = dE/dp, établie en (43). Celle-ci joue un rôle décisif pour obtenir la première équation canonique de Hamilton : v = dE/dp.

Ce cheminement, inverse de celui effectué au début de cet article, sera généralisé avec l'approche architectonique. Contrairement au long développement qui a conduit au passage de : $M = d^{*2}E/dv^2 = E/c^2$ [explicitée en (41)] à l'équation : v = dE/dp [déduite en (51)], le passage du formalisme de Lagrange et Hamilton [correspondant à : p = dL/dv et E = vp – L], à la même équation v = dE/dp s'obtient quasi-immédiatement.

Toutefois, si le principe de départ, conceptuellement simple mais formellement compliqué requiert un cheminement relativement long, c'est à ce principe qu'il faut recourir tant pour éviter les contradictions que pour remonter à la source de ce formalisme conceptuellement mystérieux et incompréhensible, en tant que tel.

Sur le plan strictement formel, dès qu'on prend acte du fait que le formalisme de Lagrange et Hamilton s'exprime sous forme intégrale, on voit qu'il est plus aisé à manipuler que le nouveau formalisme exprimé sous forme différentielle : il est plus facile, en effet, de dériver que d'intégrer surtout avec des équations différentielles combinant différents ordres de différentiation, comme c'était le cas tout au long de cet article.

Obtention de l'action relativiste, base de la physique spatio-temporelle

Nous allons déduire ici l'expression de l'action relativiste au lieu de la postuler comme on le fait usuellement en l'identifiant au temps propre (à une constante dimensionnelle près). En effet, rappelons qu'au début de cet article, nous avons souligné le fait que l'action relativiste se trouve identifiée au temps propre (à une constante dimensionnelle près) ! Outre cette étrange et mystérieuse identification nous avons constaté que le passage de la dynamique einsteinienne à la dynamique newtonienne conduisait à des contradictions pour ce qui est de l'énergie, du lagrangien et de l'action.

Afin de lever ces contradictions, nous avons développé une nouvelle méthodologie en rapport direct avec les principes de relativité et de conservation. Nous allons bénéficier de celle-ci pour déduire l'action relativiste au lieu de la postuler comme c'est usuellement le cas. En particulier, nous avons montré que, dans cette nouvelle configuration, l'impulsion qui correspond à :

$$p = d^*E/dv = (1 - v^2/c^2)dE/dv = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (55)$$

permet de déduire le lagrangien L dès lors qu'on pose : $dL = (1 - v^2/c^2)dE$, ce qui transforme l'expression de (55) en :

$$p = dL/dv = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (56)$$

dont l'intégration conduit à :

$$L = - mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad (57)$$

Compte tenu des définitions :

$$dr = v\, dt \quad \text{et} \quad dA = Ldt \qquad (58)$$

qui lient l'espace et l'action au temps à travers la vitesse et le lagrangien respectivement, il suffit de combiner la métrique spatio-temporelle : $c^2dt^2 - dr^2 = c^2\, d\tau^2$ à l'expression du lagrangien, donné en (57), pour déduire :

$$dA = - mc^2\, d\tau \qquad (59)$$

On retrouve ainsi l'expression de l'action relativiste A qui s'identifie effectivement au temps propre τ, à une constante dimensionnelle près, soit : $A = a\tau$, avec $a = - mc^2$.

Ainsi, cette identification, se trouve clarifiée et le mystère qui s'y rattache est résolu.

Cet article consacré principalement à la physique spatio-temporelle, montre qu'elle devient inconsistante lorsqu'on la pousse dans ses derniers retranchements. Même sa composante physico-mathématique issue de la mécanique analytique de Lagrange, censée assurer sa rationalité, soulève des interrogations dont la réponse requiert un changement radical de méthodologie. Cette nouvelle méthodologie a été expliquée dans cet article, de façon partielle. Elle propose, certes, des réponses, mais celles-ci manquent de systématicité et de cohérence interne d'où l'intérêt de développer une *démarche générale et globale, faisant apparaître les dits principes physiques, fondés sur différentes méthodes analytiques, comme de simples théorèmes, issus d'une démarche supra-analytique (appelée architectonique par Leibniz).*

De (1 + 1) dimensions à (1 + 3) dimensions

Sans entrer dans les détails, [c'est explicité dans l'article [4], consacré entièrement à l'extension des trois articles précédents [1-3], passant de : (1 + 1) à (1 + 3) dimensions], on peut étendre la portée des équations, comme on l'indique ci-dessous sur quelques équations de base, données en (44), (45), (A14), (A15) et (B25) :

Les équations (44) et (45) à (1 + 1) dimensions : $M = pdp/dE = E/c^2$ et sa forme intégrale : $M = E/c^2 = m\,(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}$ deviennent à (1 + 3) dimensions : $M = p_i\, dp_i/dE = E/c^2$ et sa forme intégrale : $M = E/c^2 = m\,(1 + p_i\, p_i\, /m^2c^2)^{1/2}$ avec i = 1, 2, 3.

Quant aux notations de (A14) et (A15) : $(E/c, p) = \mathbf{p}$ et $(c\Gamma, u) = (cdt, dr)/d\tau = d\mathbf{r}/d\tau = \mathbf{u}$

qui conduisent à l'écriture géométrique :

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{u} = m\, d\mathbf{r}/d\tau \quad \text{avec} \quad \mathbf{u.u} = c^2$$

elles prennent les forme suivantes :

$(E/c, p_i) = \mathbf{p}$ et $(c\Gamma, u_i) = (cdt, dr_i)/d\tau = d\mathbf{r}/d\tau = \mathbf{u}$

avec la même écriture pour $\mathbf{p} = m\,\mathbf{u} = m\, d\mathbf{r}/d\tau$ avec $\mathbf{u.u} = c^2$, sauf que le produit scalaire : $\mathbf{u.u} = c^2$ est muni d'une signature minkowskienne à (1 + 3) dimensions, soit : $\eta = (1, -1, -1, -1)$ au lieu de la signature à (1 + 1) dimensions, soit : $\eta = (1, -1)$.

Finalement, (B25) qui correspond à : $\Gamma dE - udp = \Gamma dE - pdu = 0$, avec $\Gamma = (1 + u^2/c^2)^{1/2}$ et $u = dr/d\tau$ se transforme en :

$\Gamma dE - u_i\, dp_i = \Gamma dE - p_i\, du_i = 0$ avec $\Gamma = (1 + u_i\, u_i/c^2)^{1/2}$ et $u_i = dr_i\, /d\tau$

Points clés sur la transition de l'analytique à l'architectonique

Afin de cheminer vers l'essentiel, vers la quintessence de la dynamique, nous allons repartir de la remarque qui suit l'équation (45), où nous avons constaté que si l'on remplace l'opérateur de dérivation particulier et déterminé : $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$ par l'opérateur général et indéterminé : $d_I/dx = Id/dx$, où $I = \hat{I}(x)$ est une fonction indéterminée de x, admettant potentiellement une infinité de déterminations, le rapport : $p/M = dE/dp$, issu de : $p = (1 - v^2/c^2)dE/dv$ et $M = (1 - v^2/c^2)\, dp/dv$ reste invariant puisque les expressions générales et indéterminées : $p = IdE/dx$ et $M = Idp/dx$ conduisent, elles aussi, à ce même rapport. Celui-ci révèle une procédure dite de **filtrage** où tout point de vue, qu'il soit déterminé ou indéterminé, s'éclipse pour laisser la place à une relation intrinsèque, établissant un lien direct entre les entités conservées. C'est ainsi que dans le cadre einsteinien ($M = E/c^2$), l'intégration de : $p/M = dE/dp$ conduit à la relation intrinsèque suivante :

$$M = m\,(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = E/c^2 \qquad (60)$$

Ainsi, la dimension extrinsèque - relative au mouvement exprimé à travers le facteur indéterminé : $\hat{I}(x)$ ou déterminé : $1 - v^2/c^2$ - disparaît au profit de la seule dimension intrinsèque.

Cette relation intrinsèque, issue de la procédure de filtrage, sera mise à profit dans le second article qui présentera une approche architectonique « hors points de vue » et susceptible d'en engendrer une infinité (perspectivisme infini). Cette architectonique inclura les points de vue analytiques développés au cours de l'histoire scientifique, ayant pour paramètres du mouvement, la vitesse v (associée au formalisme variationnel développé dans le texte principal) ainsi que la célérité u et la rapidité w (associées respectivement à la méthode géométrique et la théorie des groupes, rappelées et commentées dans les annexes).

Outre la procédure de filtrage, avec sa dimension intrinsèque, un autre point clé relatif cette fois-ci à la dimension extrinsèque de la structure architectonique va jouer un rôle décisif. Pour voir cela, on part du constat que la structure extrinsèque indéterminée : $p = \mathrm{I}dE/dx$ et $M = \mathrm{I}dp/dx$ (I pour indétermination) correspond en général à une structure formelle couplée. Et c'est une procédure dite de **découplage** qui va déterminer un point de vue de référence (exceptionnel et prometteur). Ce résultat va parfaitement s'articuler à la structure intrinsèque, issue de la procédure de filtrage, pour la compléter et actualiser les innombrables potentialités, propres à la conception leibnizienne.

Ainsi, la combinaison de ces deux procédures complémentaires (**filtrage-découplage**) va constituer une sorte de tremplin, doté d'un formidable ressort cognitif, capable d'un saut vertigineux vers une hauteur démesurée, permettant une vue panoramique d'où l'on peut observer une infinité de points de vue. En bref, les dimensions : intrinsèque et extrinsèque vont se combiner, s'unir et se compléter en s'accordant parfaitement. Et c'est ce parfait accord qui va rendre possible la démarche architectonique de Leibniz, avec son perspectivisme infini.

Sans entrer dans les détails techniques, nous allons voir que malgré son extraordinaire richesse structurelle, accueillant une infinité de points de vue, la démarche architectonique reste simple à présenter tant son expression est compacte : elle tient sur une ligne, soit :

$$v_\mu = (1/m) \int dp/D^{(\mu-1)}, \text{ avec } D = M/m = (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = E/mc^2 \qquad (61, a)$$

ou de façon équivalente

$$v_\mu = \int d\hat{u}/D^{(\mu-1)}, \text{ avec } \hat{u} = p/m \text{ et } D = M/m = (1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} = E/mc^2 \qquad (61, b)$$

Ici, le mouvement (infiniment multiple noté par v_μ) ne peut plus être nommé par le langage courant comme c'est usuellement le cas, en raison du nombre infini de points de vue. Parmi cette infinité, le point de vue d'ordre quatre, conduira aux équations données en (6), de telle sorte que le paramètre du mouvement : $v_\mu = v_4$ coïncide avec celui associé à la vitesse v. Plus généralement, les trois points de vue relatifs à la vitesse v, la célérité u et la rapidité w données en (B13) et (B14), constituant le perspectivisme fini de la physique, se trouvent incluses au sein du perspectivisme infini : elles correspondent respectivement à : (v, u et w) = (v_4, v_1 et v_2).

Nous savons depuis Einstein que le monde dynamique de Newton qui correspond à : M = m, apparaît comme un cadre local, en comparaison au monde einsteinien qui le généralise et l'inclut en son sein. Il est valable uniquement pour $\hat{u}^2/c^2 \ll 1$, d'après (61, b) : $M/m = (1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2}$. Avec la démarche infiniment perspectiviste, il se révèle être non seulement local mais aussi dégénéré, puisqu'en raison de D = M/m = 1, l'infinité de points de vue, déductibles de (61), deviennent confondus $(\ldots v_1 = v_2 = v_3 = v_4 \ldots)$.

Sachant que la structure formelle : $v_\mu = \int d\hat{u}/D^{(\mu-1)}$, avec $D = (1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2}$ se traduit picturalement par une structure infiniment arborescente, où toutes les branches convergent vers un même point selon une tangente commune (le tronc de l'arbre), il s'en suit que le cadre newtonien se trouve localisé au sein de ce tronc commun, où l'infinité de branches se trouvent toutes confondues.

Ainsi, l'état de repos n'est plus, comme d'habitude, réduit à un simple point dont le prolongement donne lieu à une seule courbe reflétant un unique point de vue sur le mouvement. Il correspond désormais à un point d'accumulation (multiples points confondus) dont le prolongement donne lieu à de multiples courbes, reflétant différents points de vue, divers et variés.

De même pour l'état de mouvement lent, il n'est plus réduit à une simple ligne droite (au voisinage de l'origine : $v = p/m$) dont le prolongement donne lieu à une courbe : $v = p/(m^2 + p^2/c^2)^{1/2}$. Il correspond désormais à une ligne d'accumulation : $v_\mu = p/m$ pour toute valeur de μ (multiples lignes confondues : le tronc de l'arbre) dont le prolongement donne lieu à d'innombrables courbes formant une structure arborescente, avec de multiples branches divers et variés : $v_\mu = (1/m) \int dp/(1 + p^2/m^2c^2)^{(\mu-1)/2}$.

Dédoublement de l'idée de structure locale et celle de critère esthétique

Ce qui vient d'être expliqué ci-dessus va avoir des conséquences notables, ne serait-ce que parce que l'idée de structure locale se trouve dédoublée, avec deux formes distinctes, l'une continue l'autre discrète. Nous n'avons plus uniquement le caractère local continu (habituel) qui correspond au mouvement lent se traduisant par une simple ligne dans le cadre analytique et par de multiples lignes confondues dans le cadre architectonique. Nous avons aussi le caractère local discret (inhabituel) qui distingue les branches (entités locales) de l'arbre (entité globale). Rien de tel n'existe au sein du cadre analytique où l'idée même de branche se révèle problématique : elle n'a sa place que dans le cadre d'une structure arborescente, avec ses multiples perspectives, ce qui n'est pas à la portée de la démarche analytique, par nature limitée, à l'étude d'une seule perspective à la fois.

En effet, l'univers analytique est d'une grande pauvreté structurelle : il reste enfermé au sein d'une seule courbe pour chaque entité conservée [une pour l'énergie et une pour l'impulsion : $v = h(E) = k(p)$]. Ceci contraste violemment avec l'univers architectonique, d'une prodigieuse richesse structurelle : il est ouvert à une infinité de courbes pour chaque entité conservée [une infinité pour l'énergie et une infinité pour l'impulsion : $v_\mu = h_\mu(E) = k_\mu(p)$], déductibles de (61).

Cette richesse structurelle rend possible des raisonnements qui ne sont plus limités à une seule perspective, pouvant être qualifiée de belle et élégante lorsqu'elle présente des propriétés harmonieuses (singulières, remarquables et opérationnelles). Ces raisonnements s'étendent désormais à d'innombrables perspectives, unifiées à travers une structure arborescente, elle-aussi, pouvant être qualifiée de belle et élégante, avec son caractère relationnel, précisé plus loin. Celui-ci va s'incarner dans une suite géométrique de fonctions, régie par une « raison mathématique », dont les itérations successives produiront l'arborescence architectonique.

Avec cette approche, la dimension esthétique se trouve ainsi dédoublée : il y a d'une part une esthétique individuelle, confinée au sein des courbes particulières, révélant des propriétés singulières, remarquables et opérationnelles, à la base des différentes méthodes analytiques rationnelles (calcul variationnel, géométrie moderne, théorie des groupes…). Il y a d'autre part une esthétique collective, associée non plus aux courbes particulières elles-mêmes mais aux liens qu'entretiennent les courbes les unes par rapport aux autres. En bref, la première esthétique (habituelle) renvoie à la structure interne d'une branche (ou d'une courbe) alors que la seconde esthétique se rapporte à la structure externe à une quelconque branche (ou courbe) mais interne à l'arbre (multiples branches unifiées).   Et c'est à travers cette seconde forme d'esthétique qu'apparaît dans toute sa clarté le caractère relationnel du perspectivisme infini de Leibniz, présenté succinctement ci-dessous.

Caractère relationnel du perspectivisme infini

Afin de souligner le caractère relationnel du perspectivisme infini de Leibniz, notons que si l'on pose : $U_\mu = dp/dv_\mu$ et $\hat{U}_\mu = dE/dv_\mu$, on déduit de (61) :

$$U_{\mu+1}/U_\mu = \hat{U}_{\mu+1}/U_\mu = D \qquad (62)$$

On voit que le rapport : $D = M/m$ (masse variable M sur masse constante m), joue le rôle de la raison d'une suite géométrique de fonctions !

Comme on peut aussi écrire:

$$U_{\mu+k}/U_\mu = \hat{U}_{\mu+k}/U_\mu = D^k \qquad (63)$$

Il s'en suit qu'on peut passer de n'importe quel point de vue à n'importe quel autre, grâce à la seule connaissance de l'expression de la « raison » de la suite.

Remarque finale sur les dimensions : analytique et architectonique
Contrairement à l'approche analytique, l'approche architectonique se traduit par une double démarche d'abord dégressive, négative et indéterminée puis progressive, positive et infiniment déterminée, incarnée respectivement par les principes métaphysiques (mais aussi éthiques) de raison et de plénitude (négligés par la démarche analytique). Le principe de raison consiste à reculer en refusant tout point de vue quel qu'il soit, ce qui, à ce stade, rend la démarche indéterminée et donc non-prédictive. Mais il s'agit ici de reculer pour mieux sauter et c'est le principe de plénitude qui va incarner ce saut vertigineux, et démesuré, transcendant le perspectivisme fini de la physique au profit du perspectivisme infini de Leibniz, avec ses innombrables points de vue (incluant les quelques points de vue, développés progressivement au cours de l'histoire scientifique).

La démarche architectonique refuse d'imposer, a priori, une quelconque esthétique individuelle, comme le fait la méthode analytique, dans ses différentes versions, fondées sur des propriétés singulières, remarquables et opérationnelles, empruntées aux mathématiques et utiles à l'exploration scientifique. Ces formes esthétiques individuelles, adaptées chacune à une méthode analytique se trouvent déduites d'une esthétique collective, traduite par des itérations infiniment multiples, associées à une « raison mathématique » qui, a son tour découle d'une éthique, incarnée par les deux principes métaphysiques de raison et de plénitude, à la base de l'architectonique de Leibniz.

Il y a là un changement radical de stratégie : ce qui est premier dans l'ordre analytique devient dernier dans l'ordre architectonique. Les critères esthétiques individuels, utilisés chacun pour définir tel ou tel point de vue rationnel, ne sont pas rejetés, en tant que tels, seule leur primauté est mise en cause : ils continuent à faire partie de l'ordre architectonique comme on l'a vu ci-dessus. Mais, au lieu d'être imposés a priori, l'un à la suite de l'autre au cours de l'histoire scientifique, ils sont désormais déduits d'une esthétique collective, elle-même découlant de l'éthique leibnizienne, incarnée dans ses principes de raison et de plénitude ; éthique refusant de sacrifier l'infinité de perspectives au profit d'une seule.

Lorsqu'on raisonne selon les critères de la méthode analytique - qui, à travers son histoire, a diversifié les points de vue en les juxtaposant l'un à côté de l'autre ou plutôt l'un après l'autre, selon l'ordre chronologique de leur apparition - il devient impossible de concevoir un quelconque perspectivisme infini qui requiert un temps illimité pour se constituer. En revanche, lorsqu'on raisonne selon les critères de la méthode architectonique, la situation est toute autre : dès le départ, la dimension infinie est présente mais indéterminée et donc silencieuse, dépourvue de toute signification n'étant pas encore spécifiée ou quantifiée. Et ce silence, rempli d'innombrables potentialités qui restent à actualiser, va ouvrir sur un langage de type architectonique, avec des procédures de remplissage spécifiques, en mesure d'actualiser l'ensemble infini de ces potentialités. Leur formation va s'exprimer de façon relationnelle en s'auto-organisant, à travers des modes d'actualisation propres à l'architectonique, inconcevables par le langage analytique, trop pauvre pour les accueillir. Comme le note Wittgenstein : *« Les limites de mon langage signifient les limites de mon univers ».*

Ce qui vient d'être exposé ci-dessus de façons lapidaire et dépouillée apparaîtra dans toute sa clarté dans le prochain article, consacré au développement de l'approche architectonique qui étend les approches analytiques et les explique en remontant à leur source commune.

Note

Combinaison des principes de relativité et de conservation
Nous allons procéder de façon progressive en considérant d'abord la loi de composition additive, de Galilée et Newton : v' = v + V, ensuite non-additive, de Lorentz et Einstein :
$v' = v * V = (v + V)/(1 + vV/c^2)$ et enfin indéterminée : x' = x T X, où T indique l'idée de translation indéterminée.

Déduction de : p = dE/dv
Le principe de relativité de Galilée affirme que si E = f(v) est une entité conservée alors E' = f(v'), avec v' = v + V correspond aussi à une entité conservée. Pour les propriétés de conservation, on rappelle qu'une entité conservée est définie à une relation affine près et que si deux entités sont conservées alors leur combinaison linéaire correspond aussi à une entité conservée.

Ainsi, la combinaison linéaire particulière : (E' – E)/A = [f(v + V) – f(v)]/A, où A peut dépendre de V mais pas de la variable v, soit A = F(V), s'écrit aussi : K(V)[f(v + V) – f(v)]/V, avec K(V) = V/F(V) d'où l'on tire : dE/dv, dès lors qu'on suppose que K(V) est suffisamment régulière pour avoir : K(0) = C^{te}, qu'on peut identifier à l'unité sans perte de généralité.

Ainsi, la combinaison des deux propriétés de conservation et de l'exigence de relativité montre que si E = f(v) est une entité conservée alors p = dE/dv = f'(v) l'est aussi.

Extension à : v' = v * V et déduction de : p = d*E/dv
Le remplacement de la loi de composition additive des vitesses de Huygens et Newton :
v' = v + V par celle de Lorentz et Einstein : $v' = v * V = (v + V)/(1 + vV/c^2)$
entraîne le remplacement de d/dv par $d^*/dv = [(1 - v^2/c^2)\, d/dv]$

Pour voir cela, on effectue la même procédure que celle du paragraphe : ***Déduction de : p = dE/dv***, sauf qu'ici, il va falloir remplacer la loi de composition additive v' = v + V par celle non-additive : v' = v * V, ce qui revient à remplacer, dans : (E' – E)/A = [f(v + V) – f(v)]/A, l'expression de : f(v + V) par celle de : f(v * V).

Passage du cadre analytique déterminé à un cadre architectonique indéterminé
Afin de passer du cadre analytique déterminé (ici à travers la notion de vitesse) à un cadre architectonique indéterminé, il suffit de remplacer la loi de composition particulière : v' = v * V qui est bien-déterminée par la loi de composition générale : x' = x T X, où T indique l'idée de translation indéterminée, susceptible d'une multitude illimitée de déterminations possibles. En y appliquant toujours la même méthode, on est conduit à : $p = d_I E/dx = I\, dE/dx$, où $I = \hat{I}(x)$ est une fonction indéterminée du paramètre x, pouvant être spécifiée d'une infinité de manières. Cette multiplicité illimitée sera traduite explicitement par l'opérateur indéterminé $I_\mu d/dv_\mu$ où les paramètres du mouvement v_μ seront déterminés grâce à la combinaison de la procédure de **filtrage** et de **découplage** expliquées succinctement ci-dessus et en détails dans le prochain article.

Remerciements : Je voudrais remercier Claude-Alain Risset pour avoir lu et corrigé cet article en y apportant différentes critiques et remarques.

Annexe A

Procédure de simplification par changement de point de vue

Nous allons, pour simplifier la structure de la dynamique, repartir de l'équation (26) mais en lui appliquant une autre procédure de simplification, que celle consistant à introduire des entités intermédiaires (le lagrangien et le hamiltonien) en gardant le même paramètre du mouvement (le même point de vue). Cette autre méthode simplificatrice va révéler un nouveau point de vue, intéressant tant sur le plan mathématique que physique, faisant passer de la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton, avec la vitesse pour paramètre du mouvement, à la méthode géométrique, paramétrée par la célérité.

Passage de la vitesse à la célérité

Comme on l'a fait à différentes reprises dans le texte principal, on repart de :

$$M = d^*/dv(d^*E/dv) = (1 - v^2/c^2)^2\, d^2E/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, dE/dv = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad \text{(A 1)}$$

données en (26), équivalente à :

$$M = [(1 - v^2/c^2)\, d/dv][(1 - v^2/c^2)\, d/dv]E = m\,/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(A2)}$$

Compte tenu de $\Gamma = dt/d\tau = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, avec $v = dr/dt$, on en déduit :

$$M = [\Gamma^{-2}\, d/dv][\Gamma^{-2}\, d/dv]E = m\,\Gamma, \qquad \text{(A3)}$$

d'où l'on tire :

$$d/dv[\Gamma^{-2}\, dE/dv] = m\,\Gamma^3 \qquad \text{(A4)}$$

Une première intégration conduit à :

$$\Gamma^{-2}dE/dv = m(\int\Gamma^3dv) \qquad \text{(A5)}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\Gamma dE = m\,(\int\Gamma^3dv)\,(\Gamma^3dv) \qquad \text{(A6)}$$

soit :

$$\Gamma dE = mudu \qquad \text{(A7)}$$

avec :

$$u = \int\Gamma^3dv \qquad \text{(A8)}$$

Nous allons voir que cette nouvelle variable u – qui correspond à un nouveau point de vue – présente, au-delà de son intérêt mathématique simplificateur, un intérêt physique majeur.

En effet, compte tenu de (A8) et de l'expression de Γ, rappelée ci-dessus, on obtient :

$$u = \int(1 - v^2/c^2)^{-3/2}dv = v/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(A9)}$$

qui vérifie des propriétés remarquables, singulières et opérationnelles, puisqu'on a :

$$u = (\int\Gamma^3 dv) = v\Gamma \quad \text{avec} \quad \Gamma = dt/d\tau = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = (1 + u^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(A10)}$$

d'où l'on tire aussi u :

$$u = (\int\Gamma^3 dv) = v\Gamma = (dr/dt)(dt/d\tau) = dr/d\tau \qquad \text{(A11)}$$

Le nouveau paramètre u, appelé célérité, exprime un point de vue spatiotemporel sur le mouvement, comme la vitesse v, mais attachée à τ (temps propre) au lieu de l'être à t [partie temporelle des coordonnées spatio-temporelles : (ct, r)].

Ce changement de paramètre simplificateur montre aussi que, grâce à : $p = [(1 - v^2/c^2)\, d/dv]E = [\Gamma^{-2}\, d/dv]E$, déductible de (19) et (3) et combiné à (A8)-(A11), on peut écrire :

$$p = \Gamma^{-2}\, dE/dv = m(\int\Gamma^3 dv) = \Gamma dE/du = mu = m\, dr/d\tau \qquad \text{(A12)}$$

d'où l'on tire :

$$E = m\int(u/\Gamma)du = mc^2(1 + u^2/c^2)^{1/2} = mc^2\,\Gamma = mc^2 dt/d\tau \qquad \text{(A13)}$$

Rappelons que le facteur de Lorentz : $\Gamma = dt/d\tau$ se déduit de la métrique lorentzienne qui s'écrit : $c^2dt^2 - dr^2 = c^2d\tau^2$ ou encore $c^2\Gamma^2 - u^2 = c^2$.

Notons que la symétrie des équations permet de les exprimer sous forme unifiée et compacte à travers les couples :

$$(E/c, p) = \mathbf{p} \quad \text{et} \quad (c\Gamma, u) = (cdt, dr)/d\tau = d\mathbf{r}/d\tau = \mathbf{u} \qquad \text{(A14)}$$

qui conduisent à l'écriture géométrique :

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{u} = m\, d\mathbf{r}/d\tau \quad \text{avec} \quad \mathbf{u.u} = c^2 \qquad \text{(A15)}$$

où le produit scalaire : $\mathbf{u.u} = c^2$ est muni d'une signature minkowskienne : $\eta = (1, -1)$.

Ce changement de paramètre, faisant passer de la vitesse : $v = dr/dt$ à la célérité : $dr/d\tau$, opère un passage du point de vue variationnel à celui géométrique. Il est remarquable de voir que, dans le système d'unités naturelles ($c = 1$), la dynamique se réduit à un simple vecteur unitaire : $\mathbf{u.u} = 1$, défini par le rapport : $\mathbf{u} = \mathbf{p}/m$.

Remarque sur la contradiction associée à la méthode géométrique : *Lorsque, changeant de point de vue, on passe du formalisme variationnel au formalisme géométrique, exprimé de façon compacte en (A15), ou de façon explicite et détaillée par :*

$$p = mu = m\, dr/d\tau \qquad \text{et} \qquad E = mc^2\,\Gamma = mc^2dt/d\tau, \qquad \text{avec} \quad c^2\Gamma^2 - u^2 = c^2$$

la contradiction subsiste à travers : $E = mc^2\,\Gamma = mc^2dt/d\tau$. En effet, dans le cadre newtonien, où l'on a : $\Gamma = dt/d\tau = 1$, l'énergie se réduit à $E = mc^2$, ce qui s'oppose à la forme parabolique newtonienne : $E = ½\, mu^2 + C$.

Par contre, lorsqu'on adopte la méthodologie développée tout au long de cet article, tout rentre dans l'ordre comme on va le voir ci-dessous à travers (A22).

Grâce à ce changement de point de vue, la structure correspondant à la vitesse :

$$M = \Gamma^{-2}\, d/dv[\Gamma^{-2}\, dE/dv] = m\,\Gamma \qquad \text{avec} \quad p = \Gamma^{-2}\, dE/dv \qquad (A16)$$

se transforme en une structure correspondant à la célérité u :

$$M = \Gamma d/du[\Gamma dE/du] = m\,\Gamma \qquad \text{avec} \quad p = \Gamma\, dE/du \qquad (A17)$$

qui se révèle plus simple à résoudre. En effet, au lieu de : $d/dv[\Gamma^{-2}\, dE/dv] = dp/dv = m\,\Gamma^3$ on a alors :

$$d/du[\Gamma dE/du] = dp/du = m \qquad (A18)$$

immédiatement intégrable. Cette procédure de simplification rendant la structure plus facile à intégrer aurait pu rester purement mathématique mais la nouvelle variable se révèle exprimable par $u = dr/d\tau$, ce qui lui donne un sens physique précis, connu sous le nom de célérité.

Remarque : Au lieu du changement de variable (ou de paramètre) effectué ci-dessus, où l'on a posé : $u = (\int\Gamma^3 dv)$, avec $\Gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, on aurait pu, au vu de la forme initiale :

$$M = \Gamma^{-2}\, d/dv[\Gamma^{-2}\, dE/dv] = \Gamma^{-2}\, dp/dv = m\,\Gamma \qquad (A19)$$

effectuer un changement d'opérateur, en remplaçant : $\Gamma^{-2}d/dv$ par $\Gamma d/du$ ce qui aurait donné, au lieu de : $dp/dv = m\,\Gamma^3$, $dp/du = m$, conduisant aussitôt à : $p = mu$, avec $(u, p) = (0, 0)$ correspondant à l'état de repos. Cette relation de proportionnalité va jouer un rôle majeur comme on le verra plus loin dans (A25).

Retour au cadre newtonien

Lorsque $\Gamma = dt/d\tau = 1$, qui correspond au cadre newtonien, les deux points de vue attachés à v et u, donnés en (A16) et (A17), se confondent :

$$[d/dv][d/dv]E = d^2E/dv^2 = m \qquad \text{avec} \quad p = dE/dv \qquad (A20)$$

$$[d/du][d/du]E = d^2E/du^2 = m \qquad \text{avec} \quad p = dE/du \qquad (A21)$$

conduisant, par une double intégration, à la structure newtonienne :

$$E = \tfrac{1}{2}\, mv^2 + C = \tfrac{1}{2}\, mu^2 + C \qquad \text{avec } p = mv = mu \qquad (A22)$$

compatible avec le caractère absolu du temps newtonien ($dt = d\tau$) :

$$v = dr/dt = dr/d\tau = u \qquad (A23)$$

Double intérêt de la méthode géométrique

Adopter la méthode géométrique, avec la célérité u pour paramètre du mouvement au lieu de partir de la formulation variationnelle, avec la vitesse pour paramètre, aurait facilité certains des calculs développés dans le texte principal. En particulier, lorsqu'on remplace l'opérateur de dérivation : $(1 - v^2/c^2)d/dv$ par $(1 + u^2/c^2)^{1/2}\, d/du$ et on effectue les mêmes calculs que ceux donnés en (41)-

(49), on obtient, au lieu de $dp/m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = dv/(1 - v^2/c^2)$, l'expression suivante :

$$dp/m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = du/(1 + u^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(A24)}$$

On peut ainsi déterminer le lien entre l'impulsion et le paramètre du mouvement (ici u) de façon immédiate, soit : $p = mu$.

A cet intérêt s'y ajoute un second, propre à la relation de proportionnalité : $p = mu$ qui va jouer un rôle majeur pour la structuration de la dynamique. En effet, compte tenu de : $p = \Gamma\, dE/du = mu$, on déduit les deux relations :

$$\Gamma\, dE - pdu = \Gamma\, dE - udp = 0 \qquad \text{(A25)}$$

à partir desquelles on déduira deux autres points de vue (avec w et v pour paramètres du mouvement) : $dE - pdw = dE - vdp = 0$ où le facteur de Lorentz Γ disparaît des deux autres points de vue, étant désormais caché au sein de : $dw = du/\Gamma$ et de $v = u/\Gamma$. Ceci sera explicité dans la prochaine annexe où différentes procédures de simplifications, associées à divers points de vue seront comparées, révélant ainsi leurs avantages et inconvénients.

Annexe B

Procédures de simplification, avec ou sans changement de point de vue

On va mettre en évidence trois sortes de simplifications : deux directes et une indirecte. Les simplifications directes qui vont permettre de remplacer $p = d^*E/dv = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv$ par de simples dérivations : $p = dE°/dv$ et $p = dEdv°$, vont faire intervenir deux procédures de **gommage** et **collage**, où l'on gomme le facteur $(1 - v^2/c^2)$ pour le coller soit à dE, soit à dv. Dans le premier cas, la procédure de **gommage** et de **collage** est dite **hétérogène** : on remplace l'entité conservée E par une entité E°, de même dimension mais ne vérifiant plus la propriété de conservation. Dans le second cas, cette procédure est dite **homogène** : on remplace le paramètre du mouvement (ici la vitesse v) par un autre paramètre v°, de même dimension et (comme v) ne vérifiant pas la propriété de conservation. Il s'agit là d'un simple changement de point de vue, gardant l'entité conservée (ici l'énergie) intacte.

Il arrive qu'on passe, au-delà de ces simplifications directes, par des étapes intermédiaires donnant l'impression d'une complication, au niveau local. On comparera ces différentes transformations à divers niveaux : mathématique, physique, local et global.

Deux procédures de simplification directes (gommage-collage : hétérogène et homogène)

Partant de la forme explicite plutôt complexe :

$$(1 - v^2/c^2)^2\, d^2E/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, dE/dv = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(B1)}$$

donnée en (26), issue de la double application à E de l'opérateur d^*/dv :

$$d^{*2}E/dv^2 = [(1 - v^2/c^2)\, d/dv][(1 - v^2/c^2)\, dE/dv] = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(B2)}$$

on cherche à la simplifier de deux façons directes.

Elles consistent à remplacer l'opérateur de dérivation : d^*/dv appliqué à E, d^*E/dv par $dE°/dv$ puis par $dE/dv°$, ce qui revient à substituer E° à E et v° à v, en posant :

$$(1 - v^2/c^2)\, dE = dE° \qquad \text{(B3)}$$

ou bien

$$(1 - v^2/c^2)\, d/dv = d/dv° \qquad \text{(B4)}$$

La première substitution conduit à :

$$d^2E°/dv^2 = m/(1 - v^2/c^2)^{3/2} \qquad \text{(B5)}$$

et la seconde à :

$$d^2E/dv°^2 = m \cosh(v°/c) \qquad \text{(B6)}$$

où l'on a pris en compte :

$$dv° = dv/(1 - v^2/c^2) = c\, d[\tanh^{-1}(v/c)] \quad \text{et} \quad [1 - \tanh^2(v°/c)]^{-1/2} = \cosh(v°/c) \qquad \text{(B7)}$$

Dans le premier cas, la simplification est proprement mathématique : on remplace l'entité conservée E par une entité E° (de même dimension) mais qui ne vérifie plus la propriété de conservation. On vérifie ensuite que cette entité E° coïncide avec le lagrangien : $E° = L = - mc^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ qui, comme l'énergie, opère sur le paramètre du mouvement, correspondant ici au point de vue de la vitesse v qui n'est pas altéré.

Dans le second cas, c'est le paramètre du mouvement qui est altéré : v est remplacé par v°, tel que : $v = c \tanh(v°/c)$, coïncidant ainsi avec la rapidité w, soit : $v° = w$. Ici, c'est l'énergie qui n'est pas altérée.

Lien entre les lois de composition relatives à la rapidité et la vitesse

Pour établir le lien entre les lois de composition de la rapidité et de la vitesse, qui correspondent respectivement à : $w' = w + W$ et $v' = (v + V)/(1 + vV/c^2)$, il suffit de prendre en compte : $v = c \tanh(w/c)$, en posant $y = v/c$ et $x = w/c$, $y' = v'/c$, $x' = w'/c$, $Y' = V/c$ et $X' = W/c$, ainsi que la propriété mathématique :

$$y' = \tanh(x') = \tanh(x + X) = [\tanh(x) + \tanh(X)]/[1 + \tanh(x) \tanh(X)] = (y + Y)/(1 + yY)$$

Des calculs plus explicites seront donnés plus loin, lors du passage de la vitesse v à la célérité u.

Réhabilitation de la dynamique leibnizienne par la physique moderne

La deuxième simplification correspond à un changement de point de vue sur le mouvement. Après avoir été considéré durant longtemps comme une simple astuce mathématique simplificatrice, ce nouveau paramètre a acquis un statut proprement physique [8-10] et les approfondissements ultérieurs ont permis à la dynamique d'être abordée indépendamment de toute cinématique préalable [6-7].
C'est à partir de là que, comme le montre [6], on a commencé à comprendre que la démarche leibnizienne, avec sa dynamique autonome était scientifiquement recevable. C'est à elle qu'il faut recourir pour avoir un meilleur fondement de la pensée physique.

En effet, dans son « Essay de dynamique » de 1692 [13], Leibniz conclut son texte en écrivant : « *Le mouvement est une chose passagère qui n'existe jamais à la rigueur … c'est la force qui existe véritablement, ainsi outre hors de la masse, de la figure et de leur changement (qui est le mouvement) il* *y a quelque autre chose dans la nature corporelle : savoir la force. Il ne faut donc pas s'étonner si la nature (c'est-à-dire la sagesse souveraine) établit ses lois sur ce qui est le plus réel ».* Dans le même texte, conscient de l'ambiguïté du terme « force » signifiant différentes choses selon les auteurs, Leibniz juge nécessaire de préciser *: « ce que j'appelle la force se conserve, et non pas ce que d'autres ont appelé de ce nom ».* Il s'agissait de la force vive : mv^2, correspondant au double de l'énergie cinétique.

Une troisième procédure - indirecte - de simplification (gommage-collage : partiel)
Les deux premières simplifications directes cachent le facteur $(1 - v^2/c^2)$ dans E° et dans v°. Cette troisième procédure de simplification développée ci-dessous ne cherche plus à complètement gommer le facteur $(1 - v^2/c^2)$ mais à le transformer de façon judicieuse, éclairée par la forme globale de la structure. Et cette transformation va rendre le procédé de gommage et collage **partiel**, comme précisé ci-dessous.

Au lieu d'éliminer le facteur $(1 - v^2/c^2)$, on va l'exprimer autrement en tenant compte de l'identité :

$(1 - v^2/c^2) = (1 - v^2/c^2)^{3/2}/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

avant d'introduite l'opérateur : $d/d\hat{u} = (1 - v^2/c^2)^{3/2} d/dv$ qui va vérifier :

$$(1 - v^2/c^2)\, d/dv = (1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} d/d\hat{u}.$$

Cela conduit à :

$$p = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv = (1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} dE/d\hat{u}.$$

Cet étrange rapport : $(1 - v^2/c^2)^{3/2}/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, avec $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ au dénominateur trouve sa justification quand on examine l'ensemble de la structure donnée en (B2) qui fait apparaître ce dénominateur dans le second membre, et entraîne ainsi son élimination.

Ainsi, lorsqu'on remplace v par û, l'équation (B2) prend la forme :

$$M = d^{\circ 2}E/d\hat{u}^2 = (1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} d/d\hat{u}[(1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} dE/d\hat{u}] = m\,(1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} \quad \text{(B8, a)}$$

d'où l'on tire :

$$d/d\hat{u}[(1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} dE/d\hat{u}] = m \quad \text{(B8, b)}$$

Son intégration, quasi-immédiate, conduit à :

$$(1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} dE/d\hat{u} = m\hat{u} \quad \text{(B9)}$$

qui s'écrit aussi :

$$(1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} dE = m\hat{u}\, d\hat{u} \quad \text{(B10)}$$

Compte tenu de l'identité remarquable : $(1 + z^2)^{1/2} d(1 + z^2)^{1/2} = zdz$, et de (B10) qui correspond à :

$(1 + z^2)^{1/2}\, dY = zdz$, avec $z = \hat{u}/c$ et $Y = E/mc^2$, on peut déduire, par simple identification, l'expression de l'énergie : $Y = (1 + z^2)^{1/2}$ équivalente à : $E = mc^2\,(1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2}$. La nouvelle variable û coïncide avec la notion de célérité u, soit : $\hat{u} = u$.

Nous obtenons ainsi par simple identification et sans réelle intégration l'expression de l'énergie.

En bref et compte tenu de (A10), l'expression de p donnée en fonction de v et de û qui correspond à :

$p = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv = (1 + \hat{u}^2/c^2)^{1/2} dE/d\hat{u}$ prend la forme suivante : $p = \Gamma^{-2}\, d/dv = \Gamma d/d\hat{u}$

Commentaire sur le gommage et collage relatif à û : *Contrairement au passage de : $\Gamma^{-2}\, d/dv$ à $dE/dv°$, avec $v° = w$ (rapidité), qui correspond à un gommage-collage total, le passage de : $\Gamma^{-2}\, d/dv$ à $\Gamma d/d\hat{u}$, avec $\hat{u} = u$ (célérité) correspond à un gommage-collage partiel puisque le facteur Γ^{-2} n'est pas gommé mais seulement réduit en étant remplacé par le facteur de Lorentz Γ qui, au-delà de la place principale qu'il occupe dans la structure de la physique spatiotemporelle, acquiert ici une nouvelle signification puisqu'il renvoie à la loi de composition du mouvement associée à û comme on le verra plus loin. Et cela va jouer un rôle majeur dans la structuration de la dynamique.*

Cette procédure de simplification (indirecte) montre l'intérêt de ne pas se focaliser uniquement sur les aspects locaux en se contentant de remplacer $(1 - v^2/c^2)\, dE/dv = \Gamma^{-2}\, d/dv$ par : $dE°/dv$ ou $dE/dv°$: c'est la prise en compte de la structure formelle dans son intégralité qui suggère un changement de variable intéressant, révélant des propriétés remarquables et singulières.

Non seulement le facteur correspondant à l'opérateur $d°/du = (1 + u^2/c^2)^{1/2} d/du = \Gamma d/du$, coïncide avec le facteur de Lorentz Γ, ce qui lui confère une nouvelle interprétation physique, mais ce point de vue, vérifiant : $\Gamma dE - u dp = \Gamma dE - p du = 0$, va engendrer naturellement les deux points de vue, relatifs à la vitesse v et la rapidité w.

Avant de montrer ces divers aspects, résumons l'apport des trois points de vue relatifs à v, w et u dont les expressions générales correspondent à :

$$d^{*2}E/dv^2 = d^2E/dw^2 = d^{\circ 2}E/du^2 = E/c^2 \quad \text{et} \quad p = d^*E/dv = dE/dw = d°E/du \qquad (B11)$$

avec

$$d^*/dv = (1 - v^2/c^2)d/dv = d/dw = (1 + u^2/c^2)^{1/2} d/du = d°/du \qquad (B12)$$

Leurs expressions particulières correspondent, elles, à :

$$m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = m \cosh(w/c) = m\, (1 + u^2/c^2)^{1/2} = E/c^2 \qquad (B13)$$

et

$$p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = mc \sinh(w/c) = mu \qquad (B14)$$

De simples manipulations formelles issues de (B13) et (B14) conduisent à :

$$M/m = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = (1 + u^2/c^2)^{1/2} = u/v = du/dw = \cosh(w/c) \qquad (B15)$$

et à :

$$v = c \tanh(w/c) = u/(1 + u^2/c^2)^{1/2} = dE/dp \quad \text{et} \quad p = (1 + u^2/c^2)^{1/2} dE/du = dE/dw \qquad (B16)$$

Une nouvelle interprétation du facteur de Lorentz

La vitesse v, la célérité u et le facteur de Lorentz Γ, sont définis par :

$$v = dr/dt\ ,\ u = dr/d\tau \ \text{ et } \ \Gamma = dt/d\tau \qquad (B17)$$

On déduit de (B15) et (B17) :

$$\Gamma = dt/d\tau = (dr/d\tau)/(dr/dt) = u/v = (1 + u^2/c^2)^{1/2} \qquad (B18)$$

Le facteur : $(1 + u^2/c^2)^{1/2}$ associé à l'opérateur : $d°/du = (1 + u^2/c^2)^{1/2}d/du$ reflétant la loi de composition non-additive relative à la célérité $u' = u \circ U = u\,(1 + U^2/c^2)^{1/2} + U(1 + u^2/c^2)^{1/2}$, correspond donc au facteur de Lorentz Γ puisqu'on a : $d°/du = \Gamma d/du$!

Ainsi, d'après (B18), B(16) et (B14), l'impulsion p, vérifie :

$$p = d°E/du = \Gamma dE/du = mu \qquad \text{(B19)}$$

***La loi de composition non-additive relative à la célérité** :*

La loi de composition de la célérité :

$$u' = u \circ U = u\,(1 + U^2/c^2)^{1/2} + U(1 + u^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(B20)}$$

peut être déduite de celle de la vitesse : $v' = (v + V)/(1 + vV/c^2)$ ou de façon plus simple de celle de la rapidité : $w' = w + W$ (déduite plus haut). En effet, sachant qu'on a d'après (B14) :

$$u = c \sinh(w/c),\ \ U = c \sinh(W/c) \quad \text{et} \quad u' = c \sinh(w'/c) \qquad \text{(B21)}$$

on tire :

$$u' = c \sinh(w'/c) = c \sinh[(w + W)/c] = u\,(1 + U^2/c^2)^{1/2} + U(1 + u^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(B22)}$$

Ce résultat s'obtient grâce aux identités suivantes :

$$c \sinh[(w + W)/c] = c \sinh(w/c) \cosh(W/c) + c \sinh(W/c) \cosh(w/c) \qquad \text{(B23)}$$

et :

$$\cosh(w/c) = [1 + \{\sinh(w/c)\}^2/c^2]^{1/2} = (1 + u^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(B24)}$$

Déduction des points de vue de la vitesse et de la rapidité (Gommage et Collage)

Pour déduire, à partir de la célérité u, les points de vue relatifs à la vitesse et la rapidité, qui d'après (B16) vérifient respectivement : $v = dE/dp$ et $p = dE/dw$, il suffit de noter que : $p = mu$ implique : $pdu = udp$, ce qui permet de déduire de (B19) :

$$\Gamma dE - udp = \Gamma dE - pdu = 0 \quad \text{avec } \Gamma = (1 + u^2/c^2)^{1/2} \ \text{ et } \ u = dr/d\tau \qquad \text{(B25)}$$

Procédure de gommage et de collage : génératrice de deux nouveaux points de vue

Le passage des relations : $\Gamma dE = udp = pdu$, issues de (B25), exprimées à travers la célérité u à $dE = vdp = pdw$, exprimées à travers la vitesse v et la rapidité w respectivement, consistera à gommer le facteur de Lorentz Γ de ΓdE et de le coller à la célérité u de deux manières différentes, débouchant ainsi sur deux nouveaux paramètres du mouvement v et w, correspondants chacun à un nouveau point de vue. Cette procédure de **gommage** et de **collage** va faire disparaître le facteur de Lorentz Γ de la structure formelle finale : il sera caché au sein des nouveaux paramètres du mouvement.

Précisément, en divisant (B25) par Γ et sachant qu'on a : $v = u/(1 + u^2/c^2)^{1/2}$ et $dw = du/(1 + u^2/c^2)^{1/2}$ d'après (B16), soit : $v = u/\Gamma$ et $dw = du/\Gamma$, on déduit :

$$dE - vdp = dE - pdw = 0 \qquad \text{(B26)}$$

soit

$$v = dE/dp \quad \text{et} \quad p = dE/dw \qquad \text{(B27)}$$

Ainsi, le point de vue relatif à la célérité, fournit non seulement une nouvelle interprétation au facteur de Lorentz, mais présente aussi une richesse structurelle, permettant de déduire deux autres points de vue de base (singuliers, remarquables et opérationnels).

Les simplifications présentées ci-dessus, découlent d'une complexité formelle issue de la non-additivité de la loi de composition relative à la vitesse. La non-additivité engendre une certaine complexité mais c'est surtout son caractère exclusif qui l'ossifie, empêchant toute malléabilité et tout degré de liberté. Or, ce sont ces degrés de liberté qui permettent à la structure de s'ouvrir sur une multitude d'autres points de vue comme on l'a montré tout au long de cet article.
Mieux encore, l'infinité de degrés de liberté que prodigue la considération d'une loi de composition indéterminée permet à la structure formelle de s'auto-organiser de façon simple et naturelle alors que le choix, imposé plus ou moins arbitrairement, fixé à l'avance et ancré dans un cadre inapproprié, conduit à des formes d'organisation qui débouchent parfois sur des contradictions logiques, des encombrements formels et des difficultés conceptuelles, qu'on a vus au début de cet article. C'est typiquement le cas relatif au choix de la vitesse, en tant qu'unique paramètre du mouvement, qui s'est perpétué durant des siècles.

Références

[1] N. Daher, "Dynamics: Intrinsic and Relational Presentation", Fundamental Journal of Modern Physics, Volume 12, Issue 2, 2019, Pages 49-64.
[2] N. Daher, "Dynamics: From analytical principles to architectonical theorems", Fundamental Journal of Modern Physics, Volume 13, Issue 1, 2020, Pages 1-10.
[3] N. Daher, "Dynamics: From Architectonics to Geometry", Fundamental Journal of Modern Physics, Volume 13, Issue 1, 2020, Pages 35-48.
[4] N. Daher, "Dynamics: Architectonics in (1+3) dimensions", Fundamental Journal of Modern Physics, Volume 14, Issue 1, 2020, Pages 1-21.
[5] C.A. Risset : L'appropriation du monde, Bulletin de l'UDP, oct. 2022.
[6] C. Comte, Was it possible for Leibnitz to discover relativity? Eur. J. Phys. **7** 225-235 (1986).
[7] C. Comte, Langevin et la dynamique relativiste. In Epistémologiques, V 01.2, 1-2, EDP Sciences, Paris, (2002).
[8] B.V. Landau and S. Sampanther, "A new derivation of the Lorentz transformation, American Journal of Physics 40, 599-602 (1972).
[9] J.M. Lévy-Leblond and J.P. Provost, Additivity, rapidity, relativity. Am. J. Phys. 47(12),1979.
[10] J.M. Lévy-Leblond, Speed(s) Am. J. Phys. 48(5), May (1980).
[11] J. Barbour, "Absolute or relative motion?" The discovery of dynamics. Vol 1, Cambridge university press (2001).
[12] L. Hirsinger, N. Daher, M. Devel and G. Lecoutre "Principle of virtual power (PVP): Application to complex media, extension to gauge and scale invariances, and fundamental aspects. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature 2018 H. Altenbach et al (eds.), *"Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 2"*, Advanced structured Materials 90, https://doi.org/10.1007/978-3-319-77504-3_2
[13] P. Costabel, Leibniz et la dynamique en 1692, Paris, 1960, (seconde édition 1980).