La démarche architectonique leibnizienne appliquée à la dynamique

N. Daher

Institut FEMTO-ST, Université de Franche Comté, CNRS

Remarque préliminaire : Le présent article fait suite à un précédent article intitulé : « *Remèdes aux insuffisances de la rationalité analytique* », consacré à l'amélioration de la rationalité usuelle de la physique et à son dépassement. Cette rationalité présente un certain nombre d'insuffisances et de contradictions dont la résolution a conduit à une autre conception de la physique du mouvement ; conception qui s'est révélée plus proche de la conception de Leibniz, rejetée durant des siècles, que de celle de Newton, adoptée avant d'être améliorée et prolongée jusqu'à nous. Afin de se familiariser avec la démarche leibnizienne, en rappelant certains de ses traits principaux, un préambule est présenté ci-dessous, qu'on peut, éventuellement, ne pas lire en premier et passer directement au texte principal.

Préambule

En mécanique ont été développées différentes démarches analytiques, limitées chacune à un point de vue : la démarche architectonique de Leibniz, avec son perspectivisme infini, est restée ignorée des physiciens. Elle n'a été formalisée que récemment [1-5].

Le perspectivisme infini de Leibniz trouve pourtant sa place en dynamique car, contrairement aux entités conservées dont le nombre doit être limité, les paramètres exprimant le mouvement sont des paramètres internes, susceptibles d'avoir un nombre illimité de déterminations. C'est ce qui justifie le relativisme infini de Leibniz et le rend scientifiquement recevable.

Les approches analytiques se sont révélées tellement fructueuses [6-10] que cette approche leibnizienne semble étrange aux physiciens, habitués à travailler avec un seul point de vue et à ne s'en détacher que pour s'attacher à un autre (variationnel, géométrique, dynamique…).

Pour ce qui est de la possibilité d'une démarche architectonique, Leibniz était convaincu que ses successeurs allaient pouvoir la formaliser et l'appliquer à la physique. Mais sa conception a été mal comprise et dénaturée avant d'être oubliée sans qu'on tente de la formaliser, ce qui était sans doute difficile à réaliser à cette époque, par manque de certains acquis scientifiques sur les mondes mécaniques possibles et sur leur rapport au mouvement. C'est ainsi qu'au regard d'une telle possibilité, l'absence de preuve a fini par être prise pour une preuve d'absence !

Si la structure de la dynamique rend possible une démarche infiniment perspectiviste, toutes les perspectives ne vont pas se matérialiser dans le réel. Leibniz en était conscient grâce à ses investigations mathématiques tant sur le calcul infinitésimal que sur les coniques, qui l'on conduit à affirmer : *« beaucoup d'appelés, mais peu d'élus »*.

Cette affirmation peut être illustrée par une métaphore : si l'on peut voir, sur un écran, d'innombrables projections d'un cylindre par exemple, seules deux ombres se révèlent clairement identifiables et reconnaissables : une surface circulaire et une rectangulaire. Leibniz pouvait ainsi justifier tant son perspectivisme infini que le nombre restreint de perspectives (ou points de vue) remarquables qui en découlent.

Trois siècles après, la rupture méthodologique faisant passer des approches analytiques, avec leurs perspectives uniques, à l'architectonique, avec son perspectivisme infini a pu être mise en œuvre avec succès.

Les scientifiques qui ont discuté l'approche de Leibniz de la dynamique, prolongeant celle de Huygens [11], ont restreint leurs investigations à son « Essay de dynamique » de 1692 [12], qui synthétise le cadre dynamique de son époque, à travers une approche analytique, initiée par Descartes. On s'est aperçu dans la seconde moitié du 20ème siècle, que l'approche leibnizienne qui affirme l'autonomie de la dynamique mérite d'être revisitée et développée en vue d'une meilleure rationalité scientifique. Ainsi, la rupture méthodologique qui se produit lors du passage de l'analytique à l'architectonique ne pouvait pas être pensée tant qu'on se référait exclusivement à l'« Essay de dynamique ».

La pensée de Leibniz a évolué sur ce sujet sans qu'il puisse formaliser sa conception architectonique pour l'incarner dans ses mathématiques et sa physique. Pour lui, sa métaphysique infiniment perspectiviste, susceptible d'une formulation mathématique, était destinée à rendre compte du monde sensible, particulièrement la physique. Or, si la conception architectonique de Leibniz est étudiée en philosophie, elle n'a été prise au sérieux en science physique que très récemment [1-5].

S. Carvallo-Plus [13], relève que, vers la fin de sa vie, Leibniz change sa vision de la dynamique afin de résoudre certaines difficultés et contradictions relatives à sa conception initiale. « Leibniz renonce à l'hypothèse de la monade dominante : cette conception risque fort d'entraîner une régression à l'infini ... Il propose à la place l'hypothèse d'un lien substantial… ».

Contrairement à la « monade dominante » qui constitue un point de vue central, mais correspond à une perspective particulière, le « lien substantial » a pour but de substantialiser ou d'actualiser une multiplicité infinie de perspectives, en fournissant leur raison d'être. Ce lien se traduit formellement par l'apparition d'une raison mathématique qui, à travers des itérations successives, engendre une infinité de fonctions reflétant chacune un point de vue (une perspective). Si la démarche analytique, fondée sur l'idée de « monade dominante », avec la logique exclusive qui la sous-tend, s'accorde avec celle de C. Comte [6-7], elle s'oppose résolument à la démarche architectonique de Leibniz, avec sa logique inclusive et son perspectivisme infini. Seule la démarche fondée sur le « lien substantial » est en accord avec un tel perspectivisme, dont l'infinité est un trait essentiel, même si dans la pratique, on peut s'en passer : en témoignent les multiples points de vue analytiques développées en physique.

Au-delà de ce qui s'est fait jusqu'ici en science physique, où l'on a cherché à viser sans réellement voir, nous allons adopter la démarche leibnizienne, en quête d'une vue d'ensemble avant de viser tel ou tel aspect de la réalité sensible. Cette exigence qui fut exclue du règne de la physique, jusqu'à être complètement oubliée, va nous servir ici de boussole qui guidera notre cheminement scientifique, consacré au dépassement des approches analytiques et à l'ascension vers leur source commune.

Notons enfin que contrairement à la démarche générale proposée dans [1-5], le présent travail, composé de deux articles complémentaires, est à visée didactique. Même si ce second article peut être lu de façon autonome, le terrain a déjà été préparé dans le premier article où l'on a pris la peine de procéder de façon progressive à partir de ce qui est bien-connu et enseigné en physique générale.

Texte principal

Introduction

Dans un précédent article (*Remèdes aux insuffisances de la rationalité analytique*), nous sommes partis du cadre de la physique spatio-temporelle, fondé sur des approches analytiques, reflétant chacune un point de vue. Nous avons procédé de façon progressive, mettant en évidence les insuffisances et contradictions rencontrées par ces démarches analytiques avant de les faire disparaître grâce à un approfondissement permettant de remonter à la source de chacune d'elles. On a aussi souligné, preuve à l'appui, le fait que certains développements et résultats remarquables qui apparaissent dans un contexte particulier, associé à un certain point de vue, restent valables dans un contexte général, « hors points de vue ».

Dans le présent article, nous allons bénéficier de ces résultats remarquables obtenus à partir de développements particuliers et progressifs ainsi que de la synthèse qui en découle, faisant passer de la dimension analytique, avec ses différents points de vue, à la dimension architectonique « hors points de vue » et susceptible d'en engendrer une infinité. Cette approche architectonique abordera ainsi la dynamique de façons directe et générale, permettant de déduire les démarches analytiques à partir d'une source commune, transformant ainsi les principes analytiques en de simples théorèmes architectoniques.

En s'affranchissant de tout point de vue on va à l'essentiel, à ce qui est nécessaire pour avoir un problème physique bien-posé, privilégiant ainsi, dans un premier temps, l'explication à l'exploration avant qu'une alliance ne se noue entre elles durablement. On évite d'imposer telle ou telle hypothèse, révélatrice de nos propres choix, préférant ainsi se taire plutôt que d'imposer un quelconque point de vue, aussi-pertinent soit-il pour l'exploration scientifique.

Ici, c'est le silence qui règne à propos du choix d'un quelconque point de vue ; silence résultant de l'application du principe de raison suffisante de Leibniz qui affirme que le choix a priori et libre d'un quelconque point de vue ressort d'une raison insuffisante. Et cette insuffisance enjoint de garder le silence, pour laisser la nature parler d'elle-même au lieu de parler pour elle : cette retenue est lourde de potentialités qui attendent d'être actualisées. Le perspectivisme infini de Leibniz va être matérialisé de façon relationnelle et rationnelle, incarné par une fonction indéterminée, susceptible d'une infinité de déterminations, donnant naissance à une structure infiniment arborescente, où chaque branche exprime un point de vue particulier.

Cette infinité empêche de dénommer les points de vue et leurs paramètres : les dénominations des paramètres du mouvement n'apparaîtront qu'en fin de parcours. Un nombre restreint d'entre eux se révélant remarquables, et opérationnels. Les points de vue seront caractérisés par un langage formel spécifique apte à en rendre compte avec des paramètres du mouvement qu'on notera v_μ, où l'indice μ prend une infinité de valeurs. Les divers paramétrages du mouvement par la vitesse v, la célérité u ou encore la rapidité w apparaîtront - ordonnés grâce à l'indice μ - au sein de la structure infiniment arborescente des v_μ.

Ce saut de l'analytique (avec un point de vue choisi librement) à l'architectonique (réservé et récusant un tel choix) empêche l'obtention d'une structure formelle prédictive, puisqu'en refusant, au préalable, tout point de vue, on est conduit à un cadre formel sous-déterminé. Mais le contenu de ce cadre formel n'est pas quelconque, il est structuré et organisé, suggérant certaines déterminations plutôt que d'autres. Et c'est cette générativité mathématique qui va contribuer à l'actualisation des points de vue.

On obtiendra d'abord, par une procédure de **filtrage**, une relation quantitative intrinsèque reliant les entités conservées sans recours à un quelconque point de vue. Ceci permettra alors d'extraire de l'ensemble des mondes possibles les mondes dynamiquement admissibles - « compossibles » dira Leibniz : compatibles avec les principes de relativité et de conservation.

Parmi l'ensemble des mondes dynamiquement admissibles, on s'intéressera au monde d'Einstein, étudié selon divers points de vue dans la progression historique de la mécanique. On l'abordera d'abord de façon intrinsèque, c'est à dire indépendamment de tout point de vue : en n'utilisant que les grandeurs fondamentales, conservées : l'énergie et l'impulsion avant de déterminer l'infinité de points de vue qui lui correspondent. Pour cela on aura recours à la relation quantitative intrinsèque, obtenue par la procédure de **filtrage**, qui sera combinée à une autre procédure, dite de **découplage**. Celle-ci est issue de la structure extrinsèque du monde d'Einstein qui correspond à une structure couplée et dont le **découplage** fournit un point de vue de référence sur lequel vont pouvoir se greffer une infinité d'autres points de vue. Cela s'obtient, par auto-organisation, en combinant les résultats obtenus à partir des deux procédures : **filtrage** et **découplage**. Et parmi cette infinité, quatre points de vue harmonieux de base (singuliers, remarquables et opérationnels) se détachent dont les trois développés, au cours de l'histoire scientifique, par différentes méthodes analytiques, exprimées à travers les notions de vitesse, de célérité et de rapidité.

Mieux encore, on montre que la démarche architectonique permet non seulement de fournir les solutions associées aux trois points de vue analytiques rappelés ci-dessus, mais aussi de déduire les structures formelles de ces points de vue ; structures usuellement postulées (calcul variationnel, géométrie moderne, théorie des groupes…) et qui reflètent respectivement divers principes physiques autonomes (moindre action, puissances virtuelles, relativité dynamique…).

Cette déduction des structures analytiques à partir de l'architectonique sera obtenue de deux manières différentes, les faisant apparaître pour la première, sur un pied d'égalité, avec une certaine horizontalité dans la démarche, et pour la seconde, sur deux niveaux différents, avec une certaine verticalité hiérarchique.

La démarche horizontale qui déduit les structures analytiques en les faisant apparaître sur un pied d'égalité va s'appuyer sur une procédure de **découpage** et **partage**. Quant à la démarche verticale qui les fait apparaître sur deux niveaux, l'un générique, l'autre spécifique, elle va s'appuyer sur deux procédures : une de **découplage** appliqué au niveau générique, et l'autre de **gommage** et **collage** appliquée au niveau spécifique, résultant de la procédure de **découplage**. En particulier, le **découplage**, qui conduit à un point de vue formellement identique à la version scalaire du point de vue géométrique, s'avère être englobant et suffisamment riche pour engendrer de façons naturelle et directe deux autres points de vue. Plus de détails sur les démarches : horizontale et verticale sont fournis dans la Note exposée ci-dessous.

Contrairement au formalisme variationnel ou encore à la méthode géométrique, la démarche architectonique générale n'a nul besoin de postuler une quelconque métrique ou cinématique préalable : elle est purement dynamique. Ici, la cinématique n'est pas première, imposée a priori, comme en physique spatiotemporelle ; elle découle naturellement de la dynamique, comme on le montre dans la dernière section de cet article : *« Déduction de la structure spatio-temporelle à partir de la dynamique »*.

Note :

[Si la lecture de cette note qui synthétise en langage courant divers développements formels semble trop abstraite et difficile à saisir, on peut la délaisser provisoirement et y revenir après avoir lu l'article. Sa compréhension sera grandement facilitée].

*La démarche horizontale qui se situe sur un même niveau général, va s'appuyer sur une procédure de **découpage** et **partage**. La complexité de la structure formelle initiale – difficilement intégrable -*

se traduisant par une équation différentielle, mélangeant inextricablement des différentiations du premier et du second-ordre réparties sur deux groupes de termes, va pouvoir être simplifiée grâce à un procédé de ***découpage*** *donnant lieu à deux équations différentielles équivalentes à l'équation initiale, mais plus réduites : l'une du second-ordre et l'autre du premier ordre (sans mélange entre les deux ordres). Ce découpage simplificateur introduit deux changements de variables, ce qui va faire apparaître deux nouvelles entités, jouant chacune un rôle complémentaire à l'autre, avec un* ***partage*** *des tâches qui va permettre à la structure de pouvoir s'intégrer par les méthodes élémentaires d'intégration.*

La démarche verticale, avec ses deux niveaux : général et particulier, va s'appuyer sur deux procédures : ***découplage*** *pour le niveau général, puis* ***gommage*** *et* ***collage*** *pour le niveau particulier (spécifié grâce à la procédure de* ***découplage****). Ici, la structure formelle initiale qui est générale, compliquée et couplée va être réduite à une structure particulière grâce à une procédure de* ***découplage****. Le point de vue qui en découle se révèle englobant et suffisamment riche pour engendrer naturellement deux autres points de vue. Il présente la particularité d'être le seul à faire apparaître le facteur relatif à la composition du mouvement comme le dual de l'énergie, et le paramètre du mouvement comme le dual de l'impulsion. Ce point de vue spécifique, résultant de la procédure* ***découplage****, va être soumis à une procédure de* ***gommage*** *et* ***collage****. Il s'agit de gommer le dual de l'énergie pour le coller sur le dual de l'impulsion, générant ainsi un nouveau point de vue. Et comme ce procédé de gommage et collage peut se faire de deux manières différentes, appliquées à deux endroits distincts de la structure formelle découplée, on est conduit à deux nouveaux points de vue singuliers ayant chacun sa spécificité.*

Notons enfin que ce procédé de gommage et collage présente un caractère universel : s'il a permis ci-dessus de passer d'un point de vue englobant à deux autres points de vue, il sert aussi pour passer plus simplement d'un point de vue à un autre ou même d'une entité conservée à une entité non-conservée mais plus simple à manier, en restant confiné au sein d'un même point de vue, avec des variantes, mixant points de vue et propriétés de conservation, qu'il serait trop long de présenter en langage courant. Comme on l'a déjà indiqué dans le précédent article, selon la situation étudiée, le procédé de gommage et collage sera dit homogène ou hétérogène, total ou partiel, simple ou mixte, élémentaire ou composé… Ces spécificités apparaissent sous leurs diverses formes dans les deux articles complémentaires : particulier pour le premier et général pour le second.

Le cadre dynamique général « hors points de vue »

La combinaison des principes de relativité et de conservation, abordée ici dans sa généralité [1], sans spécifier une quelconque loi de composition du mouvement (mouvement exprimé par le paramètre x), conduit à l'introduction d'un opérateur de dérivation indéterminé : $d_I/dx = I\ d/dx$ (*I pour indéterminée*). Celui-ci découle de la loi de composition indéterminée : $x' = x\ T\ X$, (*T pour Translation quelconque*), comme le précise la Note, donnée à la fin de l'article, où l'on rappelle succinctement l'histoire de la rationalité mécanique, allant de Huygens et Leibniz jusqu'à Lagrange et Hamilton, en passant bien sûr par Newton, avant d'établir progressivement les opérateurs de dérivation : d/dv {additif, associé à : v' = v + V [Huygens et Newton)}, ensuite d*/dv et d°/du {non-additifs, associés à v * V et u ° U [Lorentz et Einstein]} : et enfin d_I/dx {indéterminé, associé à : x' = x T X [Leibniz]}.

Contrairement aux cadres analytiques spatio-temporels de la physique (d/dv : pour Newton, d*/dv et d°/du pour Einstein), le cadre architectonique de Leibniz est susceptible d'accueillir une infinité de points de vue. En particulier, dans ce cadre général, les spécifications de l'opérateur général : $d_I/dx = I\ d/dx$, issu de la loi de composition indéterminée : x' = x T X, seront déterminées ultérieurement au lieu d'être spécifiées à l'avance comme pour le cadre analytique.

L'impulsion p va découler de l'énergie E, grâce à l'application de cet opérateur indéterminé, ce qui conduit à :

$$p = d_I E/dx = I\ dE/dx \qquad (1)$$

où le facteur $I = \hat{I}(x)$ correspond à une fonction indéterminée de x. Quant à l'opérateur de dérivation : $d_I/dx = I\ d/dx$, il joue le rôle d'un générateur d'entités conservées : le résultat de son application à une entité conservée, donne une autre entité conservée.

Comme le problème de la dynamique que nous envisageons requiert deux et seulement deux entités conservées [1], on impose une contrainte C, à ce stade indéterminée, sur l'opérateur du second ordre : $d_I^2/dx^2 = (Id/dx)(Id/dx)$ appliqué à E, de manière à empêcher toute autre entité conservée d'advenir. On obtient ainsi une *structure extrinsèque :*

$$C = d_I^2 E/dx^2 = d_I/dx(d_I/dx)E = I\ d/dx(I\ dE/dx) = P(x) \qquad (2)$$

doublement indéterminée, en raison des fonctions générales : C = P(x) et de $I = \hat{I}(x)$, qui restent à spécifier et qui vont exprimer respectivement les mondes dynamiques possibles et les points de vue sur chaque monde.

La notation C = P(x), avec P pour Point de vue (ou Perspective), explicite le fait que la contrainte C, qui exprime la structure d'un monde, dépend ici du paramètre du mouvement x. Comme démontrer plus loin, la contrainte C peut être exprimée en fonction des entités conservées (E et p), grâce à une procédure de ***filtrage*** *qui élimine les points de vue sur le mouvement x au profit des entités conservées E et p. Cette contrainte C prendra alors une forme intrinsèque qui renvoie à la structure d'un monde (à ce stade indéterminé). Symboliquement, on écrit : C = M(E, p) au lieu de C = P(x), avec M pour monde et P pour point de vue sur ce même monde.*

Procédure de filtrage (Passage de l'extrinsèque à l'intrinsèque)

Partant de la *structure extrinsèque* (2), liée au mouvement à travers le couple (I, x), encore indéterminé, nous montrons à travers une procédure de **filtrage**, la possibilité d'éliminer tout ce qui relève du mouvement au profit des seules entités conservées E et p. Nous déduirons ainsi une *structure* *intrinsèque*, exprimant un monde quelconque, indépendant de tout point de vue, ce qui va se traduire par :

$$C = pdp/dE = M(E, p) \qquad (3, a)$$

comme on va le démontrer plus loin à travers (4)-(7). Ici, la notation $C = M(E, p)$, avec M pour Monde, renvoie à la *structure intrinsèque* de la dynamique qui, contrairement à la *structure extrinsèque* (2), ne dépend d'aucun point de vue, seulement des entités conservées E et p.

Mondes dynamiquement admissibles (ou compossibles)

Partant de la *structure intrinsèque* (3, a), générale et indéterminée, celle-ci sera soumise à l'exigence de conservation qui va la déterminer en restreignant considérablement sa généralité. On obtient ainsi l'ensemble des mondes dynamiquement admissibles (i.e. compatibles avec les propriétés de conservation), se traduisant par :

$$M(E, p) = \lambda E + \gamma p + \eta \qquad (3, b)$$

Malgré la particularité de (3, b) par rapport à la forme générale : $M(E, p) = \sum A_{mn}E^m p^n$, avec sa double infinité, relative aux indices m et n (m = 0, 1, 2, 3… et n = 0, 1, 2, 3…), celle-ci reste suffisamment générale, pour concevoir une multitude de mondes dynamiquement admissibles (compossibles dira Leibniz), dont ceux développés au cours de l'histoire scientifique (précisés dans le prochain paragraphe).

Conséquences de la structure intrinsèque et de sa quantification

Avant de démontrer le passage de la structure extrinsèque (2) à la structure intrinsèque (3, a), correspondant à : $C = pdp/dE = M(E, p)$ puis sa quantification : $M(E, p) = \lambda E + \gamma p + \eta$, donnée en (3, b), notons la généralité de cette dernière expression par rapport aux mondes de Newton ($M = m$) et d'Einstein ($M = E/c^2$). Ces deux mondes apparaissent comme étant doublement particuliers :

$$(\lambda, \gamma, \eta) = (0, 0, m) \text{ pour Newton et } (\lambda, \gamma, \eta) = (1/c^2, 0, 0) \text{ pour Einstein.}$$

D'autres mondes comme : $M = \lambda E + \gamma p$ ou encore : $M = \lambda E + \eta$ se révèlent en accord avec deux généralisations de la dynamique einsteinienne obtenues à travers les deux programmes de recherche relatifs respectivement à la géométrie pseudo-finslérienne et aux théories DSR (Doubly Special Relativity). Cela est précisé et explicité dans la Ref.[1].

Démonstrations relatives à la procédure de filtrage et aux mondes compossibles

Dans les deux prochains paragraphes, nous démontrerons d'abord le passage de (2) à (3, a) où la contrainte C imposée à l'opérateur du second-ordre, appliqué à E : $C = d_I{}^2E/dx^2 = P(x)$ et qui dépend des points de vue, va pouvoir exprimer un monde quelconque : $C = pdp/dE = M(E, p)$, indépendant de tout point de vue. Ensuite, on déterminera l'ensemble des mondes dynamiquement admissibles (ou compossibles) : $M(E, p) = \lambda E + \gamma p + \eta$, donnés en (3, b) et déduits des exigences qu'imposent les propriétés de conservation.

Démonstration de $C = d_I{}^2E/dx^2 = pdp/dE = M(E, p)$: Procédure de Filtrage

Un simple calcul, utilisant $p = d_IE/dx = I\, dE/dx$, défini en (1), montre que l'opérateur $I\, d/dx$ peut s'exprimer en fonction de p et E comme suit :

$$d_I/dx = I\, d/dx = (I\, dE/dx)\, d/dE = p\, d/dE = d_p/dE \qquad (4)$$

Sa double application qui conduit à l'opérateur extrinsèque du second-ordre :

$$d_I^2/dx^2 = (I\, d/dx)(I\, d/dx) = I^2\, d^2/dx^2 + (I\, dI/dx)d/dx \qquad (5)$$

se transforme en l'opérateur intrinsèque du second-ordre suivant :

$$d_p^2/dE^2 = (p\, d/dE)(p\, d/dE) = p^2\, d^2/dE^2 + (p\, dp/dE)d/dE \qquad (6)$$

Lorsqu'on applique les deux opérateurs (extrinsèque et intrinsèque) du second-ordre à l'énergie E, on constate que l'expression extrinsèque du second-ordre se réduit à une expression intrinsèque du premier-ordre, soit :

$$C = [I^2\, d^2/dx^2 + (I\, dI/dx)d/dx]E = p\, dp/dE = M(E, p) \qquad (7)$$

puisque : $[p^2\, d^2/dE^2]E = 0$ et $[(p\, dp/dE)d/dE]E = p\, dp/dE$.

Remarque : On aurait pu exprimer l'équation différentielle du second-ordre : $C = d_I^2E/dx^2$ sous la forme de deux équations différentielles du premier-ordre, soit : $C = d_Ip/dx$ et $p = d_IE/dx$ ou explicitement : $C = I\, dp/dx$ et $p = I\, dE/dx$ avant de leur appliquer : $I\, d/dx = p\, d/dE$ donnée en (4). On obtient ainsi : $C = (pd/dE)p = p\, dp/dE = M$ et $p = (pd/dE)E = pdE/dE = p$, ce qui redonne (7) pour la première équation et l'identité : $p = p$ pour la seconde.

Il peut parfois être utile d'adopter une autre méthode de filtrage en raisonnant directement sur les expressions de C et de p, à travers leur rapport, conduisant à : $p/C = dE/dp$. C'est ce qui avait été fait dans le précédent article sur le cas particulier de la vitesse où l'on avait $(1 - v^2/c^2)\, d/dv$ au lieu de $I\, d/dx$. Ceci avait permis de déduire la formulation hamiltonienne comme on le rappelle ci-dessous.

Autre méthode de filtrage utilisée dans le précédent article : *La procédure de* ***filtrage*** *exprimée ci-dessus sous sa forme la plus générale a déjà été rencontrée dans le cadre particulier du précédent article :* ***(Remèdes aux insuffisances de la rationalité analytique),*** *à travers (41)-(51), où l'opérateur de dérivation correspondait à : $(1 - v^2/c^2)\, d/dv$ au lieu de $I\, d/dx$. En particulier, l'élimination du paramètre du mouvement correspondant à la vitesse v, avait été obtenue d'une autre manière en considérant le rapport entre $p = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv$ et $M = (1 - v^2/c^2)\, dp/dv$, conduisant à : $p/M = dE/dp$ qui s'écrit aussi : $M = pdp/dE$, à comparer avec (7).*

Cette autre manière de procéder qui ne se contente pas d'opérer uniquement sur les opérateurs, comme ci-dessus à travers (4)-(6), permettait d'établir un lien direct avec la formulation hamiltonienne, ou plus exactement avec la première équation canonique de Hamilton ($v = dE/dp$). En effet, comme on avait montré, par ailleurs : $v = p/M$ et comme le filtrage utilisant le rapport avait conduit à : $p/M = dE/dp$, la déduction de $v = dE/dp$ devenait immédiate comme l'indiquent (50) et (51) du précédent article. C'était là une autre manière de remonter à la source du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton. Le but ici est plus ambitieux puisqu'il s'agit de remonter à la source des différentes méthodes analytiques (variationnelle, géométrique…) comme on le verra plus loin.

En bref, selon la situation dans laquelle on se trouve et la structuration ou l'orientation qu'on voudrait mettre en avant, on privilégie l'une ou l'autre de ces trois manières équivalentes d'aborder la procédure de **filtrage**. Une illustration en est donnée ci-dessus.

Démonstration de $M(E, p) = \lambda E + \gamma p + \eta$: Mondes Compossibles.

Nous allons montrer que la forme particulière de l'Eq.(3, b) va découler de l'ensemble indéterminé des mondes possibles $C = M(E, p) = \sum A_{mn}E^m p^n$, soumis à la propriété de conservation : $C_1 + C_2 = C_1' + C_2'$

ou explicitement : $M(E_1, p_1) + M(E_2, p_2) = M(E_1', p_1') + M(E_2', p_2')$

avec, pour E et p, les expressions :

$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$ et $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$

à satisfaire , où les indices 1 et 2 renvoient aux deux particules qui s'entrechoquent et le signe : « ' » indique l'état du système après le choc.

Les exigences requises par les propriétés de conservation s'avèrent être très restrictives : elles annulent l'ensemble des coefficients constants A_{mn} à l'exception de trois d'entre eux : A_{00}, A_{01} et A_{10}, (identifiés à η, γ et λ respectivement), les seuls coefficients à être différents de zéro. C'est ainsi qu'on déduit (3, b), soit : $M(E, p) = \lambda E + \gamma p + \eta$, exprimant les mondes dynamiquement admissibles (dits aussi compossibles).

Structures extrinsèque et intrinsèque de la dynamique (cadre général)

La combinaison des équations données en (1)-(3), permet d'exprimer la structure de la dynamique sous ses deux formes : extrinsèque et intrinsèque, correspondant respectivement à :

$$C = P(x) = I\, d/dx(I\, dE/dx) = \lambda E + \gamma I dE/dx + \eta \qquad (8, a)$$

et

$$C = M(E, p) = p\, dp/dE = \lambda E + \gamma p + \eta \qquad (8, b)$$

Rappelons que pour passer de la forme extrinsèque (sous-déterminée : indéterminée pour les points de vue : $\hat{I}(x)$ et déterminée pour les mondes : $\lambda E + \gamma I dE/dx + \eta$) à la forme intrinsèque bien-déterminée : $p\, dp/dE = \lambda E + \gamma p + \eta$, il suffit d'utiliser : $I\, d/dx = p\, d/dE$, établi en (4), connaissant la définition de l'impulsion donnée en (1), soit : $p = I\, dE/dx$.

Détermination d'une infinité de points de vue sur le monde einsteinien

Nous allons nous intéresser au monde dynamique d'Einstein, où : $M(E, p) = \lambda E + \gamma p + \eta$, se réduit à $M = E/c^2$, ce qui correspond à : $(\lambda, \gamma, \eta) = (1/c^2, 0, 0)$.

Compte tenu de : $p = I\, dE/dx$, donnée en (1), la combinaison des équations générales : extrinsèque et intrinsèque (8, a) et (8, b) peut être exprimée, de façon condensée, par :

$$C = I\, d/dx(I\, dE/dx) = I\, dp/dx = p\, dp/dE = E/c^2 = M \qquad (9)$$

Remarque : *La contrainte C renvoie à la structure extrinsèque couplée et la notation M (pour Monde) renvoie à la structure intrinsèque exprimant ici le Monde einsteinien. Sachant que la structure extrinsèque correspond à une structure couplée et que la structure intrinsèque fait apparaître la notion de masse relativiste à travers la fameuse relation $E = Mc^2$, les notations C et M - pour*

Contrainte et Monde - s'avèrent aussi correspondre à Couplage et Masse relativiste ! Cela pourra servir de moyen mnémotechnique.

L'intégration de la forme intrinsèque : $M = p\, dp/dE = E/c^2 = C$, issue de (9), permet d'exprimer M (ou E) en fonction de p :

$$M = m\, F(p/mc) = m(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = E/c^2 = C \qquad (10)$$

où l'on a considéré la condition initiale : $p = 0$, $M = m$. Cette forme hyperbolique qui spécifie le monde einsteinien va contribuer à la détermination de l'infinité de points de vue sur ce monde.

Il faut insister sur le fait que la détermination intrinsèque, obtenue en (10), liant les entités conservées : $E = mc^2\, F(p/mc)$, a été obtenue de façon déductive.

Une telle déduction n'est pas possible pour les relations extrinsèques, liant x à p et/ou à E, pouvant s'écrire : $x = c\, f(p/mc) = c\, g(E/mc^2)$. Une autre forme de déduction va devoir être mise en œuvre pour déterminer les fonctions f et g (infiniment multiples), reflétant chacune un point de vue.

Apparaissent alors deux sortes de déduction que Leibniz distingue comme ***« déduction logique »*** [celle obtenue en (10)] et ***« déduction morale (ou hypothétique) »*** qui, selon ses propres termes, ***« incline sans nécessiter »***, suggérant des choix particuliers (rares et exceptionnels), que nous allons préciser ci-dessous.

Notons d'abord que le choix de $I = 1$, réduit sensiblement l'équation différentielle extrinsèque et sous-déterminée issue de (9) : $C = I\, d/dx(I\, dE/dx) = E/c^2$ et la détermine, conduisant à $C = d^2E/dx^2 = E/c^2$. Mais ce choix n'est pas judicieux : il ne permet pas de préparer le saut vertigineux vers le perspectivisme infini recherché. Pour la préparation d'un tel saut, il importe de noter que la structure extrinsèque et sous-déterminée est aussi couplée. Et c'est une procédure de **découplage** qui, combinée à celle de **filtrage**, va rendre possible un tel perspectivisme illimité et sans bornes.

Structure extrinsèque sous-déterminée et couplée

La structure : $C = I\, d/dx(I\, dE/dx) = E/c^2$ qui correspond à une structure sous-déterminée et couplée, accueillant une infinité de points de vue, va pouvoir, grâce à un mécanisme (ou procédé) de **découplage** spécifier l'un de ces points de vue. Et ce point de vue découplé s'articulera notamment à la structure intrinsèque, issue de la procédure de filtrage, pour engendrer l'infinité de points de vue recherchée. C'est donc grâce à l'alliance entre **filtrage** et **découplage**, entre les dimensions intrinsèque et extrinsèque que le rêve métaphysique de Leibniz d'un perspectivisme architectonique infini va devenir réalité.

Remarque : *Rappelons qu'en expliquant sa démarche architectonique, fondée sur ses principes métaphysiques de raison et de plénitude, Leibniz avait annoncé, sans l'avoir pleinement justifié (ou validé), que sa métaphysique était mathématique et que ses mathématiques étaient destinées à rendre compte de la physique et plus généralement de l'étude du monde sensible. Et c'est précisément cette justification (ou validation) qu'on établit dans ce travail.*

Afin de préparer le chemin à la procédure de **découplage**, nous allons substituer : $p = I\, dE/dx$, donnée en (1) dans l'équation différentielle extrinsèque du second-ordre : $C = I\, d/dx(I\, dE/dx)] = E/c^2$, obtenant ainsi deux équations du premier-ordre :

$$C = I\, dp/dx = E/c^2, \qquad p = I\, dE/dx$$

De même que la procédure de **filtrage** a pu être réalisée de différentes manières, ayant chacune sa spécificité, la procédure de **découplage** va se manifester sous différentes formes, adaptées chacune à une situation ou une autre, selon l'orientation et la structuration requises. En outre, le découplage va opérer soit sur la première relation : $C = I\, dp/dx$, soit sur la seconde : $p = I\, dE/dx$.

Pour ce qui est de la détermination d'une infinité de points de vue sur la dynamique einsteinienne, qu'on cherche à établir ici, c'est la première relation extrinsèque : $C = I\, dp/dx$ qui va nous être utile et qui va être combinée avec la relation intrinsèque : $M = p\, dp/dE = E/c^2 = C$ ou plutôt avec la solution qui en découle, donnée en (10), admettant la forme générale : $E = mc^2 F(p/mc)$.

Par analogie à cette dernière forme et grâce à l'analyse dimensionnelle, on peut exprimer x en fonction de p, soit : $x = c\, f(p/mc)$, ce qui revient à traduire : $C = I\, dp/dx$ sous forme intégrale, soit : $x = \int(I/C)dp = c\, f(p/mc)$.

Cette dernière expression va être mise à profit pour découpler la structure initiale, qui est en général couplée. On obtient ainsi un point de vue de référence sur lequel vont se greffer une infinité d'autres points de vue, suggérés par l'une des propriétés issue de la structure intrinsèque. Ceci permet de déterminer : $x = \int(I/C)dp = c\, f(p/mc)$ d'une infinité de manières reflétant chacune un point de vue.

Pour compléter la détermination de la dynamique, il ne reste qu'à exprimer les x en fonction de E, en combinant : $x = \int(I/C)dp = c\, f(p/mc)$ avec $E = mc^2 F(p/mc)$ déduite en (10), ce qui transforme :

$$x = c\, f(p/mc) \quad \text{en} \quad x = c\, f[F^{-1}(E/mc^2)] = c\, g(E/mc^2)$$

Une simple inversion permet alors d'écrire les expressions de l'impulsion p et de l'énergie en fonction de x, soit : $p = mcf^{-1}(x/c)$ et $E = mc^2 g^{-1}(x/c)$, précisées plus loin.

Obtention du point de vue de référence (Procédure de découplage)

Notons que si le découplage peut se faire de différentes manières (au moins trois) : en raisonnant sur la forme intégrale : $x = \int(I/C)dp$, ou sur la forme dérivée liant C à x à travers p : $C = I\, dp/dx$, ou encore sur celle liant p à x à travers E : $p = I\, dE/dx$, c'est la forme intégrale qui se révèle la plus appropriée ici. On verra plus loin que les deux formes dérivées auront chacune sa spécificité et/ou sa raison d'être.

Découplage à travers la forme intégrale : $x = \int(I/C)dp$

Parmi l'infinité des points de vue, $x = \int(I/C)dp = c\, f(p/mc)$, exprimés ici en fonction de l'impulsion p, il en existe un seul qui découple la structure et permet de séparer les variables de telle sorte que le couple (I, x) soit proportionnel à (C, p) ou encore à (E, p) puisque $C = E/c^2$.

Il suffit de choisir pour la fonction indéterminée f la fonction déterminée la plus simple, la fonction identité : $f = I_d$. Pour distinguer ce point de vue de l'ensemble des autres points de vue couplés, on spécifie le couple (I, x) par (D, u), avec D pour découplage et u pour unique.

La forme intégrale indéterminée et donc infiniment multiple : $x = \int(I/C)dp = c\, f(p/mc)$ se trouve alors déterminée, conduisant à : $u = \int(D/C)dp = c\, I_d(p/mc) = p/m$, d'où l'on tire :

$$p = mu \quad \text{et} \quad C = mD \qquad (11)$$

ainsi que : $D^2 - u^2/c^2 = 1$, compte tenu de (10) qui vérifie : $C^2/m^2 - p^2/m^2c^2 = 1$.

Ce point de vue relatif à (D, u), issu de la procédure de **découplage** (aspect extrinsèque) constituera le point de vue de référence dont la combinaison avec une propriété issue de la procédure de **filtrage** (aspect intrinsèque) permettra d'engendrer une infinité de points de vue (bien-déterminés).

Utilisation du critère esthétique, du « simple et beau » :

Si le critère esthétique du « simple et beau » - avec son caractère arbitraire, externe à la dynamique - est discutable, servant d'argument, dans les approches analytiques, son utilisation ponctuelle est ici appréciable : il est issu de la dynamique elle-même et son utilisation n'y est pas limitée au choix d'un point de vue, mais ouvre sur une infinité de points de vue. Un même critère peut être critiquable ou souhaitable selon l'utilisation qu'on en fait et le cadre formel auquel il se rapporte. Comme dans les *méthodes analytiques rationnelles, les critères esthétiques, imposés sans raison suffisante (plus ou moins arbitrairement), donnent des résultats probants, il convient de ne pas les rejeter mais de rechercher leur raison d'être, enfouie au cœur de la dynamique. C'est ainsi qu'on a pu remonter à leur source commune.*

En effet, avec le cadre architectonique, fondé sur les principes métaphysiques (mais aussi éthiques) de raison et de plénitude qui accueillent une infinité de points de vue, apparaît une esthétique collective qui va engendrer diverses formes esthétiques individuelles parmi lesquelles celles postulées, sans raisons suffisantes, dans les diverses approches analytiques. Ainsi, le dicton populaire : « C'est trop beau pour être vrai » remplacé, en science, par : « C'est trop beau pour être faux » trouve ici sa pleine justification.

Remarque : On peut, en première lecture, passer directement à la détermination de l'infinité des points de vue (voir ci-dessous la Section : **Perspectivisme infini**…), les deux formes dérivées à travers l'opérateur : *(I d/dx)* données ci-après - la première appliquée à l'impulsion *(I dp/dx)*, l'autre à l'énergie *(I dE/dx)* - étant développées plus loin en vue d'autres déductions, issues du découplage.

Découplage à travers la forme dérivée : C = I dp/dx

En partant de la structure sous-déterminée et couplée : C = I dp/dx, qu'on exprime à travers le rapport : C/I = dp/dx, on considère parmi l'infinité des points de vue possibles, celui qui découple la structure, faisant intervenir une constante, notée : m°.

Le couple (I, x), qu'on note par (D, u), se trouve ainsi déterminé comme suit : C/D = dp/du = m°

Son intégration qui conduit à : p = m°u + b, peut se réduire à : p = mu (soit : m° = m et b = 0), sans perte de généralité, en vertu des propriétés de conservation, comme on le précisera plus loin.

Découplage à travers la forme dérivée : p = I dE/dx (symétrie, dualité et orthogonalité)

Le découplage peut se faire aussi à partir de la forme : p = I dE/dx (au lieu de : C = I dp/dx) en l'exprimant sous forme infinitésimale I dE – pdx = 0, avant de la modifier : I dE – xdp = pdx – xdp. Cette dernière écriture symétrise la structure puisqu'à gauche de l'égalité, le couple d'entités non-conservées (I, x) devient le dual du couple d'entités conservées (E, p), à travers leurs variations : dE et dp. Cette dualisation va permettre de déduire la métrique spatio-temporelle à partir de la dynamique, comme on le verra plus loin.
On notera qu'en choisissant le point de vue x = u qui annule les termes qui se trouvent à droite de l'égalité : pdx – xdp = pdu – udp = 0, on retrouve la relation de proportionnalité entre p et u, soit : p = mu. Il convient de noter que si l'on peut obtenir ce point de vue de différentes manières, seule cette dernière permettra d'établir un lien direct avec la version scalaire de la méthode géométrique, où les notions de symétrie, de dualité (et aussi d'orthogonalité précisée plus loin), jouent un rôle décisif.

Perspectivisme infini : Alliance de l'extrinsèque et de l'intrinsèque

Le rapport : D = C/m - issu de la structure extrinsèque (11) et combiné à l'une des propriétés de la structure intrinsèque (10) - va être mis à profit pour engendrer une infinité de points de vue.

Précisément, on a, d'après (11) et (10) : $D = C/m = E/mc^2 = (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}$ d'où l'on déduit : $D \geq 1$, ce qui vérifie : $D^\alpha \leq D \leq D^\beta$ pour $\alpha \leq 1$ et $\beta \geq 1$.

Cette propriété permet d'introduire un ordre infini en appliquant à la fonction indéterminée I une loi d'échelle infiniment multiple : D^η.

On obtient ainsi une infinité de points de vue où apparaissent quatre points de vue de base correspondant à η = 1, 0, –1, –2 (singuliers, remarquables et opérationnels) incluant les trois développés au cours de l'histoire scientifique. Quant aux innombrables points de vue restants, ils correspondent à des combinaisons plus ou moins compliquées des quatre points de vue de base.

Pour la commodité d'écriture, on ordonnera ces quatre points de vue par des nombres positifs et croissants. Pour cela, il suffit de remplacer η par $2 - \mu$.

On obtient alors : $\mu = 1, 2, 3$ et 4, au lieu de : $\eta = 1, 0, -1, -2$, ce qui spécifie la fonction indéterminée I, par : $I \rightarrow I_\mu = D^{2-\mu}$.

Avec la notation : $(I, x) \rightarrow (I_\mu, v_\mu) = (D^{2-\mu}, v_\mu)$, qui explicite et spécifie les points de vue, l'opérateur indéterminé $I\, d/dx$ prend la forme déterminée et infiniment multiple :

$$I\, d/dx \rightarrow I_\mu d/dv_\mu = D^{2-\mu}\, d/dv_\mu,$$

d'où l'on tire, d'après (9)-(11) :

$$C = I\, dp/dx = D^{2-\mu}\, dp/dv_\mu = m\, D, \quad \text{avec } D = C/m = (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} = E/mc^2 \qquad (12)$$

ou encore

$$v_\mu = (1/m) \int dp/D^{(\mu-1)} \quad \text{avec} \quad D = C/m = E/mc^2 = (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2} \qquad (13)$$

Picturalement cela correspond à une structure infiniment arborescente, chaque branche reflétant un point de vue. Une telle arborescence (architectonique) est inaccessible aux démarches scientifiques usuelles, qui se trouvent associées chacune à l'une des branches de l'arbre leibnizien. D'ailleurs, l'appellation branche reste étrangère à la science usuelle (analytique) : une telle dénomination suppose l'existence d'un arbre qui n'apparaît qu'au sein de la démarche architectonique, avec son perspectivisme infini (arborescent et unificateur).

Lien et ordre relatifs aux trois points de vue analytiques usuels

Les trois points de vue développés habituellement, à travers trois méthodes analytiques, utilisant le calcul variationnel, la méthode géométrique et la théorie des groupes, correspondent respectivement à trois valeurs de l'indice $\mu = \{4, 1 \text{ et } 2\}$, avec les formes explicites :

$$p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{pour } v_4 = v \qquad (14)$$

$$p = mu \quad \text{et} \quad E = mc^2(1 + u^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{pour } v_1 = u \qquad (15)$$

$$p = mc \sinh(w/c) \quad \text{et} \quad E = mc^2 \cosh(w/c) \qquad \text{pour } v_2 = w \qquad (16)$$

Quant au quatrième point de vue, relatif à l'ordre trois ($\mu = 3$), soit :

$$p = mc \tan(z/c) \quad \text{et} \quad E = mc^2/\cos(z/c) \quad \text{avec } z = v_3 \qquad (17)$$

il s'exprime avec un paramètre du mouvement qui correspond à un angle : $\varphi = z/c$, ce qui conduit à une interprétation inédite du mouvement. En se référant à la physique spatio-temporelle, déduite plus loin, d'où l'on tire : $E = mc^2\, dt/d\tau$, d'après (46) et (56), on pourra écrire :

$$E = mc^2\, dt/d\tau = mc^2/\cos(\varphi) \quad \text{et} \quad p = m dr/d\tau = mc^2 \tan(\varphi) \qquad (18)$$

soit :

$$dt = d\tau/\cos(\varphi) \text{ et } \quad dr = \tan(\varphi)\, ds, \quad \text{avec} \quad ds = c d\tau \qquad (19)$$

La contraction des longueurs et la dilatation des temps y apparaissent sous formes de rotations où le changement d'angle donne l'impression que la longueur se rétrécit et le temps s'allonge.

Commentaire relatif aux différentes notations

De même que la notation M renvoie à Monde mais aussi à Masse variable (comme ladite masse relativiste), la notation C renvoie à Contrainte mais aussi à Couplage (comme on l'a vu ci-dessus lors de la détermination de l'infinité de points de vue). Ainsi, même si C et M renvoient à la même origine à savoir $C = M = d_I{}^2E/dx^2 = P(x)$ *les deux notations présentent chacune sa spécificité.*

Lorsqu'on raisonne sur la structure extrinsèque, associées aux points de vue et donc en lien direct au couple (I, x), c'est la notation C qui prédomine en tant que contrainte imposée sur l'équation différentielle du second-ordre $d_I{}^2E/dx^2$ *mais aussi en tant que structure couplée.*

Lorsqu'on raisonne sur la structure intrinsèque, indépendante de tout point de vue, où l'on a : $C = M = pdp/dE = M(E, p)$, *c'est la notation M qui prime puisqu'elle renvoie à la structure d'un monde en plus du fait qu'elle a la dimension d'une masse qui, dans le cadre einsteinien, s'identifie à la notion de masse relativiste.*

Ainsi, selon l'aspect étudié, l'une des deux notations semble adaptée, ne serait-ce que comme un moyen mnémotechnique, servant à se situer au bon endroit dans la structure formelle. Ces notations formellement équivalentes sont suggérées par la grande richesse de la structure architectonique, englobant tant les mondes que les points de vue sur chacun d'eux.

Caractère relationnel du perspectivisme infini

Afin de souligner le caractère relationnel du perspectivisme infini de Leibniz, notons que si l'on pose : $U_\mu = dp/dv_\mu$ et $\hat{U}_\mu = dE/dv_\mu$, on déduit de (13) : $U_{\mu+1}/U_\mu = \hat{U}_{\mu+1}/U_\mu = D$

On voit que le rapport : $D = C/m$ qui correspond aussi à $D = M/m$, d'après (9) [masse variable M sur masse constante m], joue le rôle de la raison d'une suite géométrique de fonctions !

Comme on peut aussi écrire : $U_{\mu+k}/U_\mu = \hat{U}_{\mu+k}/U_\mu = D^k$

il s'en suit qu'on peut passer de n'importe quel point de vue à n'importe quel autre, grâce à la seule connaissance de l'expression de la « raison » de la suite (ici D).

Beauté architectonique génératrice des beautés analytiques : Apparaît là une Beauté globale et collective (architectonique), commune à tous les points de vue. Cette Beauté qui engendre les beautés locales et individuelles (analytiques) en remontant à leur source commune, relève du sublime et renvoie à la démesure, générant une multitude illimitée de points de vue. Cette Beauté globale, relationnelle et collective transcende toute beauté locale, isolée et individuelle (analytique), imposée par le choix d'un simple point de vue, en ayant recours au critère esthétique du « simple et beau », correspondant à une propriété remarquable issue d'un cadre formel analytique bien identifié (calcul variationnel, géométrie moderne, théorie des groupes…). On peut se référer à l'annexe B qui distingue les ordres : analytique et architectonique en révélant les spécificités de chacun d'eux et en montrant l'intérêt du développement d'un ordre architectonique. Celui-ci dépasse l'ordre analytique qui se contente de placer la beauté au service de l'utilité et de l'exploration, en renonçant à l'intelligibilité et à l'explication que seul l'ordre architectonique est en mesure de satisfaire.

Obtention des structures analytiques à partir de l'architectonique

Nous allons voir comment la démarche architectonique, qui a fourni les solutions quantitatives associées aux points de vue développés au cours de l'histoire scientifique, conduit aussi aux structures formelles relatives à ces points de vue, à partir desquelles se déduisent ces mêmes solutions. Cela va se produire après avoir simplifié la structure architectonique grâce à une procédure de **découpage** et **partage**, déjà présentée dans l'article précédent dans un cas particulier qui va être rappelée avant d'être étendu et généraliser.

Rappel et extension de la procédure de découpage et de partage
La stratégie qui va être adoptée ci-dessous va étendre, à un cadre général « hors points de vue », celle adoptée dans l'article précédent : *« Remèdes aux insuffisances de la rationalité analytique »* ; stratégie développée dans le cas particulier relatif au point de vue de la vitesse explicité dans la section intitulée : « ***Origine du formalisme de Lagrange et Hamilton »***.

Il s'agissait de simplifier l'opérateur compliqué : $d^{*2}/dv^2 = (1 - v^2/c^2)^2\, d^2/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, d/dv$, qui, appliqué à l'énergie E, se révèle difficilement maniable en tant que tel, avec ses deux groupes de termes du second et du premier ordre : $(1 - v^2/c^2)^2\, d^2E/dv^2$ et $2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, dE/dv$. Cette structure formelle a été sensiblement réduite et dédoublée de manière à séparer les deux groupes de termes au lieu de les traiter conjointement. Et cette double réduction a été faite grâce à un mécanisme (ou procédé) de **découpage** en deux parties l'une du second-ordre, en d^2E/dv^2, l'autre du premier-ordre, en dE/dv. Ces deux parties simples à manier ont joué chacune un rôle complémentaire à l'autre, avec un **partage** des tâches, qui a permis à la structure formelle de devenir intégrable par les méthodes élémentaires d'intégration. Et ce sont ces deux mécanismes (ou procédés) de **découpage** et de **partage** qui ont révélé l'origine de la structure du formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton.

Nous avons aussi montré la possibilité d'extension de cette double réduction en écrivant dans le paragraphe intitulé, **Extension directe :** *« Ce dédoublement structurel (…) va se révéler directement extensible à d'autres points de vue et même à un cadre dynamique « hors points de vue », établissant ainsi une jonction naturelle entre le présent article et le suivant qui va le systématiser et le généraliser, en restant conforme aux exigences de base de la physique (relativité et conservation) ».*

Et c'est précisément ce que nous allons accomplir ci-dessous. En bref, au lieu d'avoir un opérateur compliqué, appliqué à l'énergie E ; opérateur combinant inextricablement des différentiations du premier et du second ordre, on aura deux opérateurs simples, du second-ordre et du premier ordre, appliqués respectivement à deux entités intermédiaires complémentaires : F et G.

Ce qui a été appliqué à l'opérateur particulier, bien-déterminé du second-ordre (relatif au point de vue de la vitesse), correspondant à :

$$d^{*2}/dv^2 = (1 - v^2/c^2)\, d/dv[(1 - v^2/c^2)d/dv] = (1 - v^2/c^2)^2\, d^2/dv^2 - 2v[(1/c^2 - v^2/c^4)\, d/dv$$

sera appliqué à l'opérateur général, indéterminé du même ordre, donné en (5) et correspondant à :

$$d_I^2/dx^2 = I\, d/dx(I\, d/dx) = I^2\, d^2/dx^2 + (I\, dI/dx)d/dx$$

Ainsi, la simplification de cet opérateur du second-ordre, grâce à la mobilisation de mécanismes (ou procédés) de **découpage** et de **partage**, va permettre de remonter à l'origine de différentes méthodes analytiques (rationnelles), reflétant chacune un point de vue.

Pour cela, on commence par expliciter la forme extrinsèque (2) :

$$C = d_I^2E/dx^2 = I\, d/dx(I\, dE/dx) = I^2\, d^2E/dx^2 + (I\, dI/dx)dE/dx \qquad (20)$$

en y distinguant deux groupes de termes : $I^2\, d^2E/dx^2$ du second-ordre et $(I\, dI/dx)dE/dx$ du premier-ordre, qu'on va simplifier de deux manières différentes pour obtenir, à chaque fois, un seul groupe de termes (du second-ordre pour l'un et du premier ordre pour l'autre).

Dans cette procédure, vont apparaître deux nouveaux opérateurs et deux nouvelles entités ayant les dimensions de l'opérateur initial du second ordre : d_I^2/dx^2 et de l'entité correspondante E.

On part donc de l'opérateur indéterminé du second-ordre :

$$d_I^2/dx^2 = Id/dx[Id/dx] = I^2\, d^2/dx^2 + [IdI/dx]d/dx,$$

appliqué à l'énergie E, avec ses deux groupes de termes qu'on simplifie en introduisant deux nouveaux opérateurs :

$$Id/dx[d/dx] \quad \text{et} \quad [1/x][Id/dx]$$

qu'on applique à deux nouvelles entités F et G, d'où l'on tire trois formes sous-déterminées équivalentes :

$$Id/dx[Id/dx]E = Id/dx[d/dx]F = [1/x][Id/dx]G \qquad (21)$$

soit :

$$I^2 d^2E/dx^2 + [IdI/dx]dE/dx = I\, d^2F/dx^2 = [I/x]dG/dx \qquad (22)$$

Les deux dernières expressions sont plus simples que la première. On vérifie que la simplification qui introduit F correspond à :

$$p = I\, dE/dx = dF/dx \qquad (23)$$

Comme $I\, d^2F/dx^2 = [I/x]dG/dx$ conduit à : $x\, d^2F/dx^2 = dG/dx$, compte tenu de l'identité $x\, d^2F/dx^2 = d/dx[x\, dF/dx - F]$, on obtient la forme intégrale :

$$G = x\, dF/dx - F \quad \text{(à une constante additive près)} \qquad (24)$$

qui s'écrit aussi :

$$G = xp - F \quad \text{avec} \quad p = dF/dx \qquad (25)$$

Cette forme intégrale indéterminée est remarquable : elle va pouvoir se déterminer de trois façons différentes, permettant de déduire les trois structures formelles développées au cours de l'histoire scientifique, à travers le calcul variationnel, la géométrie moderne et la théorie des groupes.

Ces structures vont émerger respectivement quand on impose les égalités : G = E, G = F et F = E (à des constantes additives près).

Rappel succinct des procédures de découpage et de partage : L'opérateur différentiel initial (relativement compliqué), appliqué à E, donné en (20) est découpée en deux opérateurs plus simples, appliqués à deux nouvelles entités complémentaires : F et G, données en (21) et (22). Et ces deux entités partagent la même structure formelle en l'exprimant sous forme intégrale, comme l'indiquent (24) et (25).

(i) Point de vue utilisant le formalisme variationnel

Lorsqu'on pose G = E, on obtient :

$$G = E = xp - F \quad \text{avec } p = dF/dx \qquad (26)$$

d'où l'on tire :

$$dG = dE = xdp \qquad (27)$$

C'est directement identifiable à la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton, correspondant à : $H = E = vp - L$ avec $p = dL/dv$, ce qui vérifie aussi : $dH = dE = vdp$.

Cette dernière expression qui s'obtient par l'élimination de L et se présente usuellement sous la forme :

$$v = dH/dp \quad \text{ou } v = dE/dp$$

est connue sous le nom de première équation canonique de Hamilton, à la base de la formulation hamiltonienne.

La variable x s'identifie à la vitesse v et les entités simplificatrices G et F au hamiltonien H et au Lagrangien L, respectivement.

(ii) Point de vue utilisant la méthode géométrique

Lorsqu'on pose G = F, on obtient :

$$G = F = xp - F \quad \text{avec } p = dF/dx \qquad (28)$$

et donc : $dG = dF = xdp + pdx - dF$.

Comme $dF = pdx$, d'apès (28), on déduit : $dF = xdp$, d'où l'on tire : $pdx = xdp$ dont l'intégration conduit à la relation de proportionnalité entre l'impulsion p et le paramètre du mouvement x, soit :

$$p = m^\circ x \text{ à comparer à : } p = mu \qquad (29)$$

Cela correspond au point de vue géométrique avec l'identification de m° à la masse m et de x à la célérité u ; point de vue caractérisé par une relation de proportionnalité entre l'impulsion p et la célérité u.

(iii) Point de vue utilisant la théorie des groupes

Lorsqu'on pose F = E, on obtient :

$$p = dF/dx = dE/dx, \text{ comparable à } p = dE/dw \qquad (30)$$

ce qui correspond à l'approche utilisant la théorie des groupes avec le paramètre x correspondant à la rapidité w.

Comme on l'a déjà indiqué, la démarche architectonique de Leibniz, avec son perspectivisme, tant fini qu'infini, a été développée récemment dans divers articles complémentaires [1-4]. En particulier, ce qui vient d'être exposé dans ce paragraphe, se trouve exprimé, à quelques nuances près, dans l'article [2], ayant pour but de montrer que les principes analytiques apparaissent comme de simples théorèmes issus d'un principe architectonique conceptualisé par Leibniz, mais dont la formalisation n'a été réalisée que ces dernières années.

Retour sur les trois points de vue obtenus analytiquement

Les Eqs.(26)-(30) montrent que les trois cas : $G = E$, $F = E$ et $G = F$ (à des constantes additives près) conduisent respectivement à :

$$dE = vdp \neq pdv, \qquad dE = pdw \neq wdp \qquad \text{et} \qquad dE \neq pdu = udp \tag{31}$$

Ces inégalités se transforment en des égalités dans le cadre newtonien parabolique.

Aussi, dès lors qu'on a la structure d'un monde, issu de la structure intrinsèque : $C = pdp/dE = M$, donnée en (3, a), son application à l'un des points de vue, relatifs à v, w et u donnés en (31), conduit aux expressions de l'énergie et de l'impulsion en fonction de v, w et u.

En particulier, pour $M = E/c^2$ (Einstein), on obtient les résultats respectifs données en (14), (16) et (15).

Pour $M = m$ (Newton), on obtient :

$$E = \tfrac{1}{2}\, mv^2 + C = \tfrac{1}{2}\, mw^2 + C = \tfrac{1}{2}\, mu^2 + C \quad \text{et} \quad p = mv = mw = mu \tag{32}$$

Les trois points de vue u, v et w s'y confondent malgré leurs conceptions différentes :

$$dE = vdp, \qquad dE = pdw \qquad \text{et} \qquad pdu = udp$$

Cela a conduit à de multiples débats et malentendus tout au long de la période newtonienne où diverses relations formellement identiques laissaient croire, à tort, à des identités conceptuelles !

Plus généralement, toute différence conceptuelle qui conduit à des égalités formelles est source de confusion, comme on peut le voir dans l'annexe A.

Une autre déduction des structures analytiques

Nous avons vu comment les trois structures mises en évidence par le développement scientifique, découlent d'une structure formelle indéterminée, se déterminant par de simples identifications :

$$G = E, \quad G = F \quad \text{et} \quad F = E$$

Ces identifications restent mystérieuses et méritent d'être approfondies. Leur approfondissement va révéler un mécanisme interne à la structure indéterminée, qui va permettre de déterminer directement les différentes structures, sans recours aux changements de variables, effectués ci-dessus et conduisant aux entités intermédiaires : F et G.

Il existe d'autres manières de procéder pour intégrer la structure de la dynamique. L'une d'entre elles va contribuer à cet éclaircissement. Elle a d'ailleurs joué un rôle majeur dans la détermination de l'infinité de points de vue, associés à la physique einsteinienne, abordée ci-dessus à travers (9)-(13). Il s'agit du mécanisme de **découplage** qui a fourni le point de vue de référence dont la combinaison avec la relation fondamentale et intrinsèque (10), issue de la procédure de **filtrage**, a permis d'engendrer l'ensemble infini de points de vue.

Ce mécanisme de **découplage** va ouvrir sur d'autres propriétés remarquables, permettant d'engendrer deux autres points de vue singuliers et opérationnels. Elles conduiront non seulement aux solutions quantitatives particulières, fournies à travers (14)-(16), mais aussi aux structures formelles générales, correspondants aux formulations analytiques bien-connues, résumées conjointement à travers les trois points de vue donnés en (31).

En faisant apparaître de nouvelles propriétés formelles, issues de la procédure de **découplage**, on reste en contact direct avec la structure formelle donnée en (20), sans chercher à la simplifier comme on l'a fait dans le passage de (25) à (30). On déduit ainsi directement les structures analytiques sans recourir aux choix particuliers : G = E, G = F et F = E.

Nous allons montrer, dans les prochains paragraphes, que la procédure de découplage qui fait apparaître le point de vue relatif au point de vue géométrique (*correspondant ci-dessus à G = F)* va engendrer naturellement les deux autres points de vue, obtenus classiquement par le calcul variationnel et la théorie des groupes (*correspondant ci-dessus à G = E et F = E*).

Ainsi, les trois points de vue, qui se présentaient ci-dessus sur un pied d'égalité, vont apparaître sous un nouveau jour, avec une certaine hiérarchie : le point de vue initial, issu de la procédure de découplage (associé à la célérité u) va se révéler suffisamment riche pour faire émerger des propriétés formelles remarquables, singulières et opérationnelles, conduisant aux deux autres points de vue, associés à la vitesse v et la rapidité w.

Procédure de découplage (Forme dérivée relative à : C = I dp/dx)

Au lieu d'introduire F et G pour simplifier l'équation (20) correspondant à la formulation extrinsèque :
$C = d_I{}^2E/dx^2 = I^2d^2E/dx^2 + [IdI/dx]dE/dx$, obtenant ainsi : $C = I\, d^2F/dx^2 = [I/x]dG/dx$,
nous allons scinder cette équation du second-ordre : $C = d_I{}^2E/dx^2$ – en deux équations du premier-ordre :

$$C = d_Ip/dx = Idp/dx \quad \text{et} \quad p = d_IE/dx = IdE/dx \qquad (33)$$

Et c'est la première de ces équations qu'on réécrit sous la forme de deux rapports (fini et infinitésimal), soit :

$$C/I = dp/dx \qquad (34)$$

qui va être mise à profit ici. Précisément, parmi l'infinité de points de vue que permet le couple indéterminé (I, x), il y en a un et un seul qui découple la structure, permettant une séparation des variables : le couple (C, p) devient proportionnel au couple (I, x), baptisé (D, u) pour signifier la singularité de ce découplage.

Ainsi, on spécifie : C/I = dp/dx, comme suit :

$$C/D = dp/du = m° \qquad (35)$$

qui, compte tenu de la condition initiale : u = 0, p = 0, conduit à :

$$C = m°\, D \quad \text{et} \quad p = m°\, u \qquad (36)$$

La constante m° qui indique le coefficient de proportionnalité peut être identifiée à la masse : m° = m, sans perte de généralité.

En effet, si au lieu de $m = m°$, on pose : $m° = am$, où m exprime la notion usuelle de masse, alors a devient une constante adimensionnelle. Il s'en suit que : $dp/du = am$, dont l'intégration conduit à : $p = amu + b$. Comme une entité conservée est définie à une relation affine près, les expressions de $p = mu$ et $p = amu + b$ s'avèrent être équivalentes, ce qui permet de poser $a = 1$ et $b = 0$, sans perte de généralité.

On voit là que si l'identification directe de m° à la masse : m et la considération de la condition initiale : $u = 0$, $p = 0$, adoptées ci-dessus, se révèlent pratiques, elles sont non nécessaires, comme le montrent les propriétés de conservation.

Ce résultat, identique à celui déjà déduit en (11), est obtenu ici de façon détaillée, ce qui le rend plus aisé à comprendre.

Richesse structurelle du point de vue issu de la procédure de découplage
La proportionnalité issue de la procédure de découplage, attachée au point de vue géométrique, va se révéler suffisamment riche pour englober les deux autres points de vue développés au cours de l'histoire scientifique, fondés sur la théorie des groupes et le calcul variationnel.

En effet, on considère l'expression : $p = d_IE/dx$, valable pour tout point de vue, qu'on applique au point de vue découplé, remplaçant ainsi (I, x) par le couple (D, u), ce qui conduit à :

$$p = d_DE/du = DdE/du \qquad (37)$$

d'où l'on tire :

$$DdE - pdu = 0 \qquad (38)$$

Compte tenu de la relation : $p = m°u$, issue de (36), on déduit $pdu = udp$, ce qui conduit aux deux expressions infinitésimales :

$$DdE - pdu = DdE - udp = 0 \qquad (39)$$

Nous allons voir ci-dessous que ces deux expressions portent en elles implicitement deux points de vue singuliers, développés indépendamment (à des époques éloignées).

Procédures de gommage et de collage
Le passage des relations : $DdE = pdu = udp$ - issues de (39), relatives au point de vue géométrique, exprimé à travers la célérité u - à $dE = pdw = vdp$, relatives aux deux points de vue (l'un dynamique, l'autre variationnel) exprimés à travers la rapidité w et la vitesse v respectivement, consiste à gommer le facteur D de DdE pour le coller à la célérité u de deux manières différentes, débouchant ainsi sur deux nouveaux paramètres du mouvement w et v, correspondants chacun à un nouveau point de vue. Ces procédures de **gommage** et de **collage** vont faire disparaître le facteur D de la structure formelle finale : il sera caché au sein des nouveaux paramètres du mouvement.

Précisément, pour déduire ces deux nouveaux points de vue et les exprimer de façon explicite, il suffit de diviser (39) par le facteur D avant de le cacher et le faire disparaître grâce à la définition de w et v, comme suit :

$$dw = du/D \text{ et } v = u/D \qquad (40)$$

conduisant ainsi à :

$$dE - pdw = dE - vdp = 0 \qquad (41)$$

Ainsi, l'énergie prend les deux formes intégrales :

$$E = \int p\,dw \quad \text{et} \quad E = \int v\,dp \qquad (42)$$

Les deux paramètres w et v correspondent à ceux usuellement obtenus par le recours à la théorie des groupes (avec la rapidité w pour paramètre du mouvement) et au calcul variationnel (avec la vitesse v pour paramètre du mouvement).

C'est la richesse structurelle qui découle du point de vue directement issu de la procédure de découplage qui permet cette déduction. Le cheminement inverse n'est pas possible. En effet, l'entité D présente dans (39) se trouve cachée dans la définition de v et celle de w comme l'indique (40), ce qui rend impossible de remonter directement de (42) à (39) : une étape intermédiaire avec une hypothèse supplémentaire est nécessaire.

Notons enfin que les trois points de vue déduits en (39) pour l'un, avec la procédure de **découplage** et en (42), pour les deux autres, avec le mécanisme (ou procédé) de **gommage** et de **collage** sont identiques à ceux de (31), obtenus sur un pied d'égalité à travers le procédé de **découpage** et de **partage**.

Remarque : *Pour ce qui est de l'histoire de la dynamique einsteinienne, notons que le point de vue le plus récent, relatif à la rapidité w, est obtenu à partir d'un théorème issu de la théorie des groupes [6-10]. Il a été analysé en profondeur par C. Comte [6-7], qui a montré son ancrage dans la dynamique : il peut être abordé indépendamment de toute cinématique ou métrique spatio-temporelle, quand le point de vue relatif à la vitesse repose sur une cinématique préalable.*
Notons aussi que ce point de vue dynamique est formellement identique à celui déjà obtenu à travers la démarche de Huygens et Leibniz à l'époque pré-newtonienne. Mais cette démarche avait été négligée puis oubliée au profit de la démarche spatio-temporelle de Newton. Cette dernière qui correspond à la version vectorielle de la méthode géométrique est rappelée dans [3] et comparée à la version scalaire, fondée sur la notion de dualité. On n'entre pas ici dans ces considérations afin de ne pas trop alourdir la présentation.

Obtention de la structure spatio-temporelle à partir de la dynamique

Nous avons montré que la dynamique peut être développée de façon autonome, indépendamment de toute cinématique (ou métrique spatio-temporelle). Elle peut même l'être de façon intrinsèque sans avoir spécifié, à l'avance, un quelconque point de vue qu'il soit spatio-temporel ou non.

Contrairement à ce qui correspond à la formulation variationnelle ou à la méthode géométrique, la cinématique et sa métrique spatio-temporelle n'y sont plus premières. La dynamique va précéder la cinématique et l'engendrer.

Rappel historique : A ce propos, Leibniz est en accord avec Aristote selon lequel le temps est le nombre du mouvement, ce qui revient à déterminer le temps à partir du mouvement et non l'inverse. Usuellement et au moins depuis Descartes, on a recours à la géométrie pour fonder la physique du mouvement. Einstein fait d'ailleurs l'éloge de Descartes pour le rôle primordial qu'il fait jouer à la géométrie. En faisant du temps une coordonnée du cadre géométrique spatio-temporel (la chrono-géométrie), Einstein réaffirme l'option cartésienne.
Leibniz, lui, s'opposait à la notion d'étendue cartésienne, ravivant la conception aristotélicienne, selon laquelle : *« l'être se dit de plusieurs manières »* qu'il adapte à son perspectivisme dynamique, en accord avec l'idée de mouvement qui précède toute métrique spatio-temporelle et contribue à sa détermination.
Pour expliquer de façon métaphorique ce qu'il entendait par la dynamique engendrant l'étendue cartésienne (et par extension, l'espace quadridimensionnel d'Einstein), sans entrer dans les détails et

les subtilités de sa conception architectonique, Leibniz donne l'image d'un ressort élastique qui engendre son espace à mesure qu'il s'allonge.

Procédure de découplage (Forme dérivée relative à : p = I dE/dx)
Nous avons déjà utilisé une procédure de découplage, développée en (33)-(36), issue de la forme dérivée relative à : C = Idp/dx, permettant de déduire les structures analytiques de façon directe sans effectuer des changements de variables comme pour (20)-(30). Ce découplage va ici être obtenu d'une autre manière, en partant de p = I dE/dx et en l'exprimant sous forme infinitésimale, avec des modifications qui vont donner lieu à des propriétés remarquables, singulières et opérationnelles, particulièrement adaptées à l'émergence de la structure cinématique (avec sa métrique spatiotemporelle), déduite de la dynamique.

Nous avons montré l'autonomie de la dynamique et sa capacité de s'affranchir de toute cinématique et métrique préalables, avec les notions d'espace et de temps ou d'espace-temps. Mais si on veut suivre Leibniz jusqu'au bout, il faut montrer comment la dynamique peut engendrer la cinématique qui lui correspond, d'où la nécessité d'identifier le critère (ou le mécanisme) qui va permettre un tel engendrement.

La procédure de **découplage** qui a conduit à une structure dynamique similaire à celle rencontrée par la méthode géométrique va être vue ici sous un nouveau jour.

Dualité et orthogonalité (autre procédure de découplage)
Au lieu de reprendre la même procédure de **découplage**, en partant de : C = Idp/dx, nous allons en présenter une variante, où l'on part de : p = I dE/dx qui aboutit au même résultat formel, mais avec une différence conceptuelle notable où l'on distinguera les entités qui se conservent de celles qui ne sont pas soumises à cette propriété de conservation. Ces dernières, ouvertes à une infinité de déterminations, vont en présenter une qui va se révéler particulièrement intéressante.

Mais, avant de présenter cette variante de la procédure de découplage, notons que la forme intrinsèque et générale de la dynamique : M = pdp/dE, avec M = M(E, p) = $\lambda E + \gamma p + \eta$, déduite de (8, b), peut être réécrite sous forme infinitésimale comme suit : MdE – pdp = 0. Ainsi, si l'on introduit la notation vectorielle : $\mathbf{P}$ = (Mc, p) et $\mathbf{p}$ = (E/c, p), elle prend la forme d'une relation d'orthogonalité : $\mathbf{P}.\mathrm{d}\mathbf{p} = 0$, exprimée par un produit scalaire nul, associé à une signature minkowskienne : $\eta = (1, -1)$. En particulier, cette notation, à ce stade applicable à n'importe quel monde dynamique, se révèle particulièrement adaptée au monde einsteinien (Mc = E/c), puisqu'on a alors : $\mathbf{P} = \mathbf{p}$. On obtient ainsi : $\mathbf{p}.\mathrm{d}\mathbf{p} = 0$ et donc $\mathbf{p}.\mathbf{p} = C^{te}$ ou plus explicitement :

$$\mathbf{p}.\mathbf{p} = M^2c^2 - p^2 = E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2 \qquad (43)$$

où l'on a pris en compte la condition aux limites : p = 0, M = m.

La notation compacte du type : $\mathbf{y}.\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$ va se révéler particulièrement intéressante lorsqu'on adopte, parmi l'infinité des points de vue, celui permettant à l'expression extrinsèque de l'impulsion : p = IdE/dx de prendre la forme d'une relation d'orthogonalité : $\mathbf{u}.\mathrm{d}\mathbf{p} = 0$, formellement similaire à celle de la structure intrinsèque : $\mathbf{P}.\mathrm{d}\mathbf{p} = 0$. Nous allons voir cependant que l'obtention de $\mathbf{u}.\mathrm{d}\mathbf{p} = 0$ ne sera pas aussi immédiate que celle de $\mathbf{P}.\mathrm{d}\mathbf{p} = 0$.

En effet, lorsqu'on exprime l'expression générale, extrinsèque de l'impulsion : p = I dE/dx sous la forme infinitésimale suivante : I dE – pdx = 0, on obtient une forme dissymétrique où les entités conservées (E, p) et celles non-conservées (I, x) ne peuvent pas être rassemblées dans deux vecteurs distincts, soient : $\mathbf{x}$ = (Ic, x) et $\mathbf{p}$ = (E/c, p). En revanche, si l'on remplace l'écriture dissymétrique : I dE – pdx = 0 par une écriture équivalente, en apparence, plus encombrante : I

$dE - xdp = pdx - xdp$, mais néanmoins symétrique, permettant l'écriture compacte : $I\, dE - xdp = \mathbf{x.dp}$, alors la structure va pouvoir s'organiser convenablement : il ne reste qu'à considérer, parmi l'infinité des points de vue disponibles, vérifiant : $I\, dE - xdp = pdx - xdp$, celui qui annule le second membre et qui sera noté par : $\mathbf{x} = (cI, x) = (cD, u) = \mathbf{u}$, obtenant : $D\, dE - udp = \mathbf{u.dp} = 0$.

Ainsi, l'annulation du second membre : $pdx - xdp$ pour $x = u$, revient à égaliser pdu à udp, soit : $pdu = udp$, ce qui conduit à une relation de proportionnalité entre p et u, semblable à celle qui a déjà été déduite de deux manières différentes à travers la forme intégrale donnée en (11) ou la forme dérivée donnée en (36). Ici, s'y ajoute la relation d'orthogonalité : $\mathbf{u.dp} = 0$ qui va jouer un rôle majeur dans la détermination de la métrique spatiotemporelle.

Pour résumer, on identifie : (cI, x), vérifiant : $I\, dE - xdp = pdx - xdp$, à (cD, u), lorsque le second membre est nul, ce qui conduit à :

$$D\, dE - udp = pdu - udp = 0 \tag{44}$$

d'où l'on tire :

$$p = m°u = mu \tag{45}$$

où m° est une constante d'intégration qui, en vertu des propriétés de conservation, peut être identifiée à la notion de masse, soit $m° = m$, sans perte de généralité.

On déduit de la combinaison de (43)-(45) :

$$E/c = mcD \quad p = mu \quad \text{avec} \quad c^2D^2 - u^2 = c^2 \tag{46}$$

qu'on peut exprimer, en posant :

$$(E/c, p) = \mathbf{p} \quad \text{et} \quad (cD, u) = \mathbf{u} \tag{47}$$

sous la forme géométrique compacte :

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u.u} = c^2 \tag{48}$$

Le produit scalaire : $\mathbf{u.u} = c^2$ est muni d'une signature minkowskienne : $\eta = (1, -1)$.

L'expression infinitésimale : $D\, dE - udp = 0$ prend la forme compacte :

$$\mathbf{u.dp} = 0 \tag{49}$$

qu'on peut transformer en une expression finie dès lors qu'on pose :

$$\mathbf{F} = \mathbf{dp}/d\kappa \tag{50}$$

obtenant ainsi la relation d'orthogonalité :

$$\mathbf{u.F} = 0 \tag{51}$$

Le paramètre κ sera précisé plus loin. Il aura un intérêt particulier, puisqu'il reflètera l'invariant cinématique associé à la structure spatio-temporelle de la physique einsteinienne.

En effet, la substitution de (50) dans (51) et la prise en compte de la propriété de commutativité : $\mathbf{u.F} = \mathbf{F.u} = 0$ permettent d'écrire :

$$\mathbf{u.dp} = \mathbf{u.F}d\kappa = \mathbf{F.}d\boldsymbol{\chi} = 0 \qquad (52)$$

où l'on a posé :

$$d\boldsymbol{\chi} = \mathbf{u}d\kappa \qquad (53)$$

Ainsi, compte tenu de : $\mathbf{u.u} = c^2$, déduite en (48), l'expression de : $d\boldsymbol{\chi}.\, d\boldsymbol{\chi} = \mathbf{u.u}\, d\kappa^2$ se réduit à :

$$d\boldsymbol{\chi}.\, d\boldsymbol{\chi} = c^2\, d\kappa^2 \qquad (54)$$

formellement identique à la définition de la métrique minkowskienne :

$$d\mathbf{r}.\, d\mathbf{r} = c^2\, d\tau^2 \qquad (55)$$

Son développement conduit à la métrique lorentzienne : $c^2dt^2 - dr^2 = c^2\, d\tau^2$, qui s'écrit aussi : $c^2\, (dt/d\tau)^2 - (dr/d\tau)^2 = c^2$, ce qui permet de l'identifier à : $c^2\, D^2 - u^2 = c^2$, issue de (46), d'où l'on tire :

$$D = dt/d\tau \quad \text{et} \quad u = dr/d\tau \qquad (56)$$

Sachant que $v = u/D$, d'après (40), on en déduit :

$$v = dr/dt \qquad (57)$$

Il est remarquable de constater que le simple fait de remplacer $\mathbf{u.dp} = 0$ par $\mathbf{u.F} = 0$ en introduisant le paramètre κ pour passer d'une écriture infinitésimale à une écriture finie montre que ce paramètre correspond au temps propre défini à travers la métrique minkowskienne.

Notons que la métrique spatio-temporelle qui apparaît ici en dernier, en résultat final, est première dans la rationalité usuelle de la dynamique, y étant un postulat initial. Le résultat final identifié ci-dessus au temps propre constitue la base sur laquelle repose la structure de la dynamique spatio-temporelle (einsteinienne).

De (1 + 1) dimensions à (1 + 3) dimensions

Sans entrer dans les détails, (c'est explicité dans l'article [4] consacré justement à cette question), on peut étendre la portée des équations (43)-(46), en passant de (1 + 1) dimensions à (1 + 3) dimensions :

$$E^2/c^2 - p_i\, dp_i = m^2c^2 \quad \text{ou encore} \quad EdE - c^2\, p_i\, dp_i = 0, \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

$$D\, dE - u_i\, dp_i = p_i\, du_i - u_i\, dp_i = 0$$

$$p = m^\circ\, u_i = m\, u_i$$

$$E/c = mcD \qquad p = m\, u_i \quad \text{avec} \quad c^2D^2 - u_i\, u_i = c^2$$

Les expressions (47)-(55), restent identiques, seule la signature minkowskienne passe de :

$$\eta = (1, -1) \qquad \text{à} \qquad \eta = (1, -1, -1, -1).$$

Note

De Huygens et Leibniz à Lagrange et Hamilton : clarification et extension

L'approche de Huygens consiste à déduire, à des détails près précisés plus loin, l'expression de l'impulsion $p = mv$ de celle de l'énergie : $E = \frac{1}{2} mv^2 + C$, en combinant les principes de relativité et de conservation, en vue de la résolution du problème du choc élastique frontal. Leibniz adhère à la démarche de Huygens (son maître en mécanique), qu'il exprime à travers son calcul infinitésimal, ce qui se traduit de façon compacte au travers d'une simple dérivation, soit : $p = dE/dv$. Mais il ne s'en contente pas : il cherche à l'étendre, sans succès, du cadre analytique à celui architectonique, avec son perspectivisme infini.

Si Newton a bénéficié de la solution de Huygens, fondée sur la notion d'énergie (baptisée par Leibniz force vive : double de l'énergie cinétique), il ne retient pas sa démarche, mais seulement le résultat : $p = mv$ qu'il adapte à sa conception, fondée sur la notion de force : $F = mdv/dt$ ou sa forme intégrale : $p = mv$. Cette conception sera à nouveau transformée, conduisant au formalisme de Lagrange et Hamilton, caractérisé par : $p = dL/dv$ ou $v = dE/dp$, le passage d'une forme à l'autre s'obtenant par une transformation de Legendre.

Ainsi, la démarche de Huygens, améliorée par Leibniz grâce à son calcul infinitésimal, a été négligée avant d'être oubliée et rejetée, considérée comme un simple échafaudage provisoire, à défaire une fois la construction est achevée. Elle a été remplacée par la physique spatiotemporelle newtonienne, rationalisée par la formulation de Lagrange et Hamilton.

On notera d'ailleurs que $p = dE/dv$ n'est plus valable dès lors qu'on quitte le cadre parabolique qui caractérise la chronologie newtonienne, alors que : $p = dL/dv$ ou $v = dE/dp$ restent valables lors du passage de la chronologie newtonienne à la chronologie einsteinienne. Mais comme nous allons le voir ci-dessous, si la démarche de Huygens reste incomplète et semble ne s'appliquer que dans un contexte particulier, celle-ci va pouvoir être élevée au rang d'un principe autonome à condition de saisir son essence et ne pas se contenter de la modalité d'existence, au sein de laquelle elle a fait sa première apparition. Mieux encore, ce principe va pouvoir être étendu, selon les exigences de Leibniz, à un cadre architectonique, « hors points de vue » et susceptible d'en engendrer une infinité.

Ce qui vient d'être énoncé, à propos de la démarche de Huygens et Leibniz, a été développé et publié dans une série d'articles [1-4], où l'on rappelle la démarche de Huygens en détail dans le premier article, en partant de la force vive : $F_v = mv^2$ au lieu de ce qui est devenu plus tard l'énergie : $E = \frac{1}{2} mv^2 + C$, sachant que les deux expressions sont équivalentes au regard des propriétés de conservation. En effet, rappelons à ce propos, qu'une entité conservée est définie à une relation affine près et que la combinaison linéaire de deux entités conservées correspond à une entité conservée.

Cette dernière propriété va jouer un rôle décisif dans le fait que l'impulsion se déduit de l'énergie par une simple dérivation : $p = dE/dv$. C'est dû au fait que la dérivée de E : dE/dv prend sa racine dans une combinaison linéaire particulière, soit : $[E(v + V) - E(v)]/V$. Et c'est ce qui explique que le principe de relativité de Galilée, affirmant que si $E(v)$ est une entité conservée, alors sa forme translatée : $E(v + V)$, l'est aussi, s'articule aux propriétés de conservation, à travers la notion de dérivée. Si la loi de composition des vitesses n'est pas additive : $v' \neq v + V$, comme c'est le cas en relativité einsteinienne : $v' = v * V = (v + V)/(1 + vV/c^2)$, la combinaison linéaire entre $E(v * V)$ et $E(v)$ ne coïncide plus avec la dérivée : dE/dv mais devient $d^*E/dv = (1 - v^2/c^2)\, dE/dv$, ce qui compliquera les équations. Plus généralement, si la loi de composition n'est pas spécifiée à l'avance : $x' = x\, T\, X$, où T indique l'idée de translation indéterminée, on a alors : $d_I E/dx = I\, dE/dx$, où $I = \hat{I}(x)$

indique le caractère indéterminé qui correspond à un cadre dynamique dont aucun point de vue n'est spécifié à l'avance.

Comme on l'a rappelé ci-dessus, historiquement, cette démarche est restée dans un état embryonnaire avant d'être remplacée d'abord par la démarche newtonienne puis par celle de Lagrange et Hamilton qui s'est révélée fructueuse dans divers champs de la physique contemporaine (mécanique, électromagnétisme, relativité einsteinienne, mécanique quantique…).

Comme la rationalité usuelle de la science physique moderne se fonde sur le formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton et comme la conception de Huygens et son dépassement par Leibniz, faisant passer du cadre analytique à celui architectonique n'a été formalisée que très récemment [1-4], nous avons fait le choix ici de rester en contact direct avec la rationalité usuelle de la science physique, comme le montre le premier article, avant de montrer son insuffisance et la possibilité de son dépassement. Et c'est dans ce contexte qu'on retrouve l'intérêt de la démarche de Huygens et surtout son prolongement par Leibniz, faisant passer du cadre analytique au cadre architectonique.

Combinaison des principes de relativité et de conservation

Nous allons procéder de façon progressive en considérant d'abord la loi de composition additive, de Galilée et Newton : v' = v + V, ensuite celles non-additive, de Lorentz et Einstein, associées à la vitesse v et la célérité u, soit : v' = v * V et u' = u ° U, précisées ci-dessous et enfin la loi indéterminée : x' = x T X, où T indique l'idée de translation générale (non encore spécifiée et susceptible d'une infinité de spécifications).

Déduction de : p = dE/dv

Le principe de relativité de Galilée affirme que si E = f(v) est une entité conservée alors E' = f(v'), avec v' = v + V correspond aussi à une entité conservée. Pour les propriétés de conservation, on rappelle qu'une entité conservée est définie à une relation affine près et que si deux entités sont conservées alors leur combinaison linéaire correspond aussi à une entité conservée.

Ainsi, la combinaison linéaire particulière : (E' – E)/A = [f(v + V) – f(v)]/A, où A peut dépendre de V mais pas de la variable v, soit A = F(V), s'écrit aussi : K(V)[f(v + V) – f(v)]/V, avec K(V) = V/F(V) d'où l'on tire : dE/dv, dès lors qu'on suppose que K(V) est suffisamment régulière pour avoir : K(0) = C^{te}, qu'on peut, en vertu des propriétés de conservation, identifier à l'unité sans perte de généralité.

Ainsi, la combinaison des deux propriétés de conservation et de l'exigence de relativité montre que si E = f(v) est une entité conservée alors p = dE/dv = f'(v) l'est aussi.

Le remplacement de la loi de composition additive des vitesses de Huygens et Newton : v' = v + V,
par celles de Lorentz et Einstein : $v' = v * V = (v + V)/(1 + vV/c^2)$ pour la vitesse et
$u' = u \circ U = u\,(1 + U^2/c^2)^{1/2} + U(1 + u^2/c^2)^{1/2}$ pour la célérité, entraîne le remplacement de d/dv par :

$d^*/dv = [(1 - v^2/c^2)\, d/dv]$ pour la vitesse et $d^\circ/du = [(1 + u^2/c^2)^{1/2}\, d/du]$ pour la célérité.

Plus généralement, le remplacement des lois de composition déterminées à l'avance :

v' = v * V ou u' = u ° U par une loi générale indéterminée : x' = x T X, entraîne le remplacement

de d*/dv ou d°/du par : $d_I/dx = I\, d/dx$, où I = Î(x) est une fonction indéterminée de x.

Remerciements : Je voudrais remercier Claude-Alain Risset pour avoir lu et corrigé cet article en y apportant différentes critiques et remarques.

Annexe A

Points clés relatifs aux différents points de vue sur le monde d'Einstein

Nous allons revenir sur certains points correspondant aux démarches analytique et architectonique : ayant mis en évidence les contradictions qui apparaissent dans la méthode analytique, en commençant par la version relative au formalisme variationnel de Lagrange et Hamilton (principe de moindre action), nous avions trouvé dans le premier article un moyen permettant de lever ces contradictions, grâce à l'opérateur de dérivation : $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$, qui synthétise les idées de relativité et de conservation, et joue le rôle d'un générateur d'entités conservées.

En partant de l'expression de l'énergie : $E = mc^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, déduite du principe de moindre action, et en exprimant la structure de la dynamique avec cet opérateur, on a obtenu :

$$(1 - v^2/c^2)\, d/dv[(1 - v^2/c^2)\, dE/dv] = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(A1)}$$

qu'on a aussi écrit :

$$(1 - v^2/c^2)\, d/dv[(1 - v^2/c^2)\, dE/dv] = E/c^2 \qquad \text{(A2)}$$

La première écriture a permis de lever la contradiction, qui apparaît lors du passage du cadre einsteinien au cadre newtonien, puisque pour $v^2/c^2 << 1$, on déduit : $M = d^2E/dv^2 = m$, ce qui est compatible avec le cadre parabolique de la physique newtonienne. Cette écriture a permis aussi de mettre en évidence le rôle simplificateur du lagrangien qui remplace $(1 - v^2/c^2)\, dE/dv$ par une forme plus simple dL/dv, facilitant l'intégration de (A1).

La seconde écriture (A2) montre qu'on peut élever cette structuration jusqu'ici purement formelle, au rang d'un principe physique qui va fournir une nouvelle interprétation à la fameuse relation : $E = Mc^2$, où la dite masse relativiste M joue désormais le rôle d'une contrainte à imposer à la structure de la dynamique.

On peut remplacer le facteur $(1 - v^2/c^2)$, associé à $d^*/dv = (1 - v^2/c^2)\, d/dv$ par sa valeur en fonction de l'énergie E, puisqu'on a : $(1 - v^2/c^2) = (E/mc^2)^{-2}$.

Les écritures données en (A1) et (A2) deviennent :

$$M = (E/mc^2)^{-2} d/dv[(E/mc^2)^{-2} dE/dv] = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \qquad \text{(A3)}$$

et

$$M = (E/mc^2)^{-2} d/dv[(E/mc^2)^{-2} dE/dv] = E/c^2 \qquad \text{(A4)}$$

A ce stade du raisonnement où l'on reste tributaire du point de vue de la vitesse, avec sa loi de composition non-additive, ces deux écritures, non seulement restent purement formelles mais elles deviennent aussi mystérieuses à cause de leur éloignement du cadre spatio-temporel au sein duquel elles ont pris naissance.

En revanche, lorsqu'on se réfère à l'approche architectonique [voir le passage de (9) à (13)], la forme : $(E/mc^2)^{-2}$ qui remplace : $(1 - v^2/c^2)$ trouve sa pleine justification, sa raison d'être et son sens.

Elle apparaît directement à travers la forme infiniment multiple : $D^{2-\mu}$, ave $D = E/mc^2$, spécifiant l'infinité de perspectives, ce qui correspond à :

$$M = (E/mc^2)^{2-\mu} d/dv_\mu \, [(E/mc^2)^{2-\mu} dE/dv_\mu] = E/c^2 \qquad (A5)$$

En particulier, parmi l'infinité des points de vue donnés en (A5), celui exprimé en (A4) correspond à l'ordre quatre, soit : $\mu = 4$, coïncidant effectivement avec la vitesse soit : $v = v_4$.

Si la démarche analytique spatio-temporelle fournie par la formulation variationnelle de Lagrange et Hamilton, conduit naturellement à (A1) et (A2), l'expression donnée en (A4) ne trouve sa pleine justification qu'avec la démarche architectonique, contenant une infinité de degrés de liberté et donc de points de vue au lieu d'un seul posé à l'avance. Et grâce à cette infinité de degrés de liberté que fournit (A5), le choix de $\mu = 1$, se révèle particulièrement intéressant, puisque, compte tenu de $p = (E/mc^2)dE/du$, (A5) se réduit alors à :

$$M = d/du \, [(E/mc^2)dE/du] = dp/du = m, \quad \text{avec } u = v_1 \qquad (A6)$$

Cette équation différentielle est facilement intégrable. On en déduit les expressions $p = mu$ et $E = mc^2(1 + u^2/c^2)^{1/2}$ qui correspondent au point de vue de la célérité, habituellement associé à la méthode géométrique. En particulier, il apparaît que le point de vue associé au paramètre vitesse est moins aisé à manipuler que celui associé à la célérité. C'est, pour cela, qu'on simplifie les choses, quand on utilise la vitesse en introduisant le lagrangien qui ne vérifie pas la propriété de conservation mais facilite les manipulations formelles.

Quelques clarifications

Lorsque la dynamique einsteinienne est abordée à travers le point de vue de la vitesse, dans le système d'unités naturelles ($c = 1$), la masse relativiste, l'énergie et le hamiltonien se trouvent confondus puisqu'on a :

$$M = E = H = m/(1 - v^2)^{1/2} \qquad (A7)$$

Pour les faibles vitesses, on obtient :

$$M = E = H = m \qquad (A8)$$

si l'on élimine v^2 devant 1, ou encore

$$M = E = H = m + \tfrac{1}{2} mv^2 \qquad (A9)$$

en effectuant un développement limité de $m/(1 - v^2)^{1/2}$ au premier ordre en v^2.

Dans le premier cas, seule la relation de M est valable ($M = m$).
Dans le second cas, ce sont les relations de E et H qui sont valables étant compatibles avec la structure parabolique newtonienne.
Au-delà de l'apparition de ces déficiences et contradictions, il convient de noter que dans tous les cas, les égalités : $M = E = H$ restent mystérieuses. Ceci explique d'ailleurs les débats et controverses à propos de la notion de masse relativiste M quant à son élimination ou sa sauvegarde en tant que concept physique pertinent. Pour ce qui est de $H = E$, on affirme parfois que lorsqu'on exprime l'énergie en fonction de la vitesse, on la note alors par E et lorsqu'on l'exprime en fonction de l'impulsion p, on la note alors par H (dite hamiltonien ou fonction hamiltonienne) mais tout ce discours reste problématique. Même si d'autres arguments plus pertinents sont parfois avancés, comme l'indique la remarque ci-dessous, certaines insuffisances et contradictions restent présentes.

Remarque : Lorsqu'on prend conscience du fait que le formalisme de Lagrange et Hamilton, constitue une méthode mathématique qui s'applique à d'autres domaines que la physique, où la notion d'énergie est absente, on comprend la nécessité de garder distinctes les notions d'énergie et de hamiltonien. Même au sein de la physique, ce formalisme se révèle pertinent en dehors du cadre strictement mécanique (électromagnétisme, physique quantique, statistique…). Tout cela plaide en faveur de la distinction entre le hamiltonien et l'énergie où leur identité ne semble apparaître qu'en mécanique, et encore. En effet, la situation est plus subtile qu'on y croit à première vue car même en mécanique, lorsqu'on adopte le point de vue de la célérité $u = dr/d\tau$ au lieu de la vitesse $v = dr/dt$, où l'on a : $H = vdL/dv - L = E$, H ne coïncide plus avec l'énergie E : $H = udL/du - L \neq E$.

C'est parfois évoqué dans les cours avancés de mécanique, en lien avec les multiplicateurs de Lagrange dont on se contente de signaler l'existence sans entrer dans les détails.

Avec notre démarche, chaque élément (M, E ou H) trouve la place qui lui est réservée au sein de la structure formelle de la dynamique. Et cela reste vrai dans tous les cas, qu'il s'agisse du cas général « hors points de vue », du cas particulier relatif à l'un des multiples points de vue (la vitesse par exemple) ou même lorsqu'on passe du cadre einsteinien au cadre newtonien où les différents points de vue deviennent identiques. Lors de ce passage, non seulement aucune contradiction n'est alors rencontrée mais les trois entités M, E et H gardent leur spécificité et leur raison d'être. Précisément, dans le cas général, où aucun point de vue ou monde n'est spécifié, on a :

$$M = I\, d/dx(I\, dE/dx) = (I/x)dH/dx = m\, f(x)\ , \text{ avec } f(0) = 1 \qquad \text{(A10)}$$

avec $M \neq H \neq E$ en général

Pour la dynamique einsteinienne et dans les cas particuliers relatifs à la vitesse v et à la célérité u, on a :

$$M = d^*/dv(d^*E/dv) = (1/v)d^*H/dv = m/(1 - v^2)^{1/2}, \quad \text{avec } d^*/dv = (1 - v^2)d/dv, \qquad \text{(A11)}$$

ainsi que : $M = E = H$, pour la vitesse et

$$M = d°/du(d°E/du) = (1/u)d°H/du = m(1 + u^2)^{1/2}, \quad \text{avec } d°/du = (1 + u^2)^{1/2}d/du, \qquad \text{(A12)}$$

ainsi que : $M = E \neq H$ pour la célérité.

Dans les cas particuliers donnés ci-dessus qu'on soumet à l'approximation des petits mouvements, on a :

$$M = d^2E/dv^2 = [1/v]\ dH/dv = m \qquad \text{(A13)}$$

avec $M = m \neq E = H$

$$M = d^2E/du^2 = [1/u]\ dH/du = m \qquad \text{(A14)}$$

avec $M = m \neq E = H$

Même dans les deux derniers cas, où les structures différentielles se confondent, on voit que les entités : M, E et H occupent des places distinctes, associées à des ordres différentiels différents, d'où l'intérêt de ne pas les éliminer même si ces entités se révèlent redondantes, dans certaines configurations, y étant quantitativement identiques.

Annexe B

Sur les règnes : analytique et architectonique

Depuis la mécanique analytique (dite aussi rationnelle) de Lagrange, le critère esthétique du « simple et beau », n'a cessé de jouer un rôle déterminant dans l'élaboration des points de vue analytiques et plus généralement dans le développement des théories scientifiques. Il a, en particulier, conduit à un progrès rapide et à des innovations scientifiques prodigieuses. Mais il y a à ces avancées de la physique rationnelle - avec ses canons de beauté - qui se sont succédés progressivement, un effet pervers : celui d'avoir fait basculer la connaissance dans des engrenages et des successions qui n'avancent qu'en écrasant sur son passage tous les modes d'existence (ou points de vue) possibles au profit d'un seul, celui que les savants ont retenu pour son efficacité et utilité pratique du moment. Si ce mode d'existence hégémonique se modifie de temps à autre de façon plus ou moins radicale, il n'en reste pas moins que l'on ne s'en détache que pour s'attacher à un autre ; au mieux en laissant le point de vue antérieur continuer sa marche, désormais plus lente et moins triomphante par rapport au nouveau venu. C'est ainsi qu'est apparu le « perspectivisme physique », où l'on admet désormais l'existence de différentes perspectives (ou modalités d'existence) rationnelles sur une réalité donnée ; perspectives ayant chacune sa spécificité, avec éventuellement une certaine hiérarchisation où les différentes perspectives ne se placeraient pas sur un pied d'égalité.

L'un des critères majeurs d'un choix par rapport à un autre réside dans le critère esthétique du « simple et beau » qui, pour garantir la rationalité scientifique en assurant son autonomie, se substitue au critère empirique premier, en lien direct à l'expérience. C'est ainsi que progresse la rationalité analytique usuelle, avec son esthétisme séducteur, écrasant tout ce qui ne se plie pas à sa visée ; une beauté chassant une autre !

Et c'est cet écrasement injustifié, déjà présent dès le début de la démarche analytique, initiée par Descartes, qui a conduit Leibniz à s'y opposer vivement en lui substituant sa démarche architectonique où, comme le dit le poète : *« il n'y a pas une place pour la beauté, toute la place est pour la Beauté »*. Les beautés locales et isolées, propres aux démarches analytiques, relèvent plutôt de la séduction, selon Leibniz, alors qu'elles doivent émerger par déduction, jaillissant d'une Beauté sublime et globale, qui les transcende, les engendre et les explique en remontant à leur source commune.

On passe ainsi du règne analytique, avec ses beautés ordinaires, proportionnées, locales, individuelles, désunies, isolées et indépendantes, exprimant chacune une perspective spécifique, se manifestant progressivement l'une à la suite de l'autre, au règne architectonique, avec sa Beauté extraordinaire, disproportionnée, globale, collective, unie, relationnelle et interdépendante, faisant surgir simultanément une multitude de beautés locales dont celles des différentes méthodes analytiques développées au cours de l'histoire scientifique. Il y a donc Beauté et beautés, la Beauté architectonique et les beautés analytiques qui en découlent. La première présente une dimension éthique qui fait défaut à toute démarche analytique quelle qu'en soit la version : elle est fondée sur les principes métaphysiques (aussi éthiques) de raison et de plénitude, qui s'incarnent dans l'architectonique leibnizienne, avec son perspectivisme infini.

A ses débuts, le jugement sous-jacent à la méthodologie analytique consistait à affirmer : *« Occupons-nous de l'immanence, la transcendance, on verra plus tard »,* ce qui ne déplaisait pas à Leibniz, ayant lui-même contribué activement au développement de la méthode analytique avant d'œuvrer à son dépassement. Mais, au lieu de cela, ce jugement s'est progressivement dégradé avant de finir par dégénérer, devenant : *« Occupons-nous de l'immanence, la transcendance n'est pas du ressort de la science ».* Et c'est cette attitude défaitiste qui a conduit Heidegger à affirmer : *« La science ne pense pas »,* expliquant que la science n'a pas pour vocation de dire le « pourquoi », seulement le « comment ».

Ainsi, l'architectonique leibnizienne, fondée sur la possibilité de transcender les méthodes analytiques, permettant ainsi d'accéder au « pourquoi » en plus du « comment » et du « combien », a fini par être reléguée au rang de pure métaphysique, ayant pour conséquence la disparition de l'éthique, avec sa Beauté globale, unificatrice d'une infinité de perspectives, au profit d'une simple esthétique, avec ses beautés individuelles et isolées, relevant chacune d'une unique perspective. Le sublime, avec son infinité potentielle de perspectives, a cédé la place au beau, avec sa seule perspective.

Avec l'adoption et la poursuite constante et ininterrompue jusqu'à nous de la méthodologie analytique, la vision globale et étendue, avec ses visées infiniment multiples, promue par Leibniz, s'est infiniment appauvrie. Réduite à une unique visée locale et étroite, il ne s'agit plus de concevoir la science à l'image d'une graine vivante qui mute pour devenir un arbre majestueux et imposant mais à l'image d'un grain de sable, inerte, qui se meut au gré de la force du vent. C'est ainsi que le monde enchanté, rayonnant, souple et plein de vie, soutenu par Leibniz, s'est réduit à un monde désenchanté, terne, raide et inerte. On voit là la distance abyssale qui sépare l'architectonique de l'analytique.

La démarche analytique, fondée sur un « coup de force » qui impose son mode d'existence (ou point de vue), peut être illustrée par la proclamation générale de Pascal, affirmant que *faute de n'avoir pas pu rendre la justice forte, on a rendu la force juste*. Et Leibniz, en accord avec Pascal, voulait empêcher cette *injustice*, nichée aussi, selon lui, au cœur même de la méthodologie scientifique, ce qui risque tant d'amoindrir sa perspicacité et sa portée que de révoquer sa prétendue rationalité et objectivité.

La justesse mathématique dont s'enorgueillit la physique rationnelle - exprimée par la physique mathématique, depuis la démarche analytique de Descartes, affinée et prolongée par ses contemporains et successeurs dont Newton et plus tard Lagrange, dans sa mécanique analytique (dite aussi rationnelle) - est, certes, nécessaire mais pas suffisante, pour Leibniz. Et cela, en raison du *« coup de force »*, évoqué ci-dessus, se traduisant par le critère esthétique qui se contente de séduire au lieu de déduire. Or, Leibniz récuse cette attitude séductrice, la considérant comme une raison insuffisante, ce qui le conduit à affirmer, haut et fort, l'importance de son principe métaphysique de raison suffisante, ayant une dimension éthique, permettant de remédier à l'injustice provoquée par la séduction qui propulse vers l'avant un unique point de vue, tuant ainsi dans l'œuf une infinité d'autres ayant droits à l'existence. Et c'est cela qui justifie le perspectivisme infini de Leibniz, découlant du principe de raison qui conteste l'hégémonie d'une quelconque perspective particulière, quelle qu'en soit l'utilité pratique ; principe qui nie, suivi aussitôt par un autre qui affirme : le principe de plénitude, requis pour l'actualisation et la détermination de l'infinité des perspectives.

En effet, à lui seul, le principe de raison présente un aspect contestataire et destructeur - négatif - à vocation strictement épistémologique (conceptuelle et qualitative), d'où l'importance d'être accompagné par un principe producteur et constructeur - positif - qu'est le principe de plénitude, à vocation proprement scientifique (formelle et quantitative).

Fort de ses principes métaphysico-éthique, Leibniz est en mesure d'allier : justesse et justice, exactitude formelle et rectitude conceptuelle, œuvrant, avec ardeur et vivacité, à l'évitement de la survenue d'un monde désenchanté, où l'illusion l'emporterait sur la raison. Il faut reconnaître cependant que Leibniz n'avait pas les moyens formels, dont nous disposons aujourd'hui, pour formaliser sa conception, en montrant, preuves à l'appui, la possibilité scientifique d'allier justesse et justice, esthétique et éthique, physique et métaphysique… Au lieu de suivre le chemin qu'il avait emprunté en l'améliorant, ses successeurs l'ont bouché en attribuant les idées généreuses et bénéfiques de Leibniz à un esprit trop optimiste et idéaliste, plein de rêves scientifiquement irréalisables, selon eux.

A défaut de faire vivre une vision dynamique pleine et entière, à la manière rêvée par Leibniz, avec une conscience en perpétuelle quête de son dépassement, remplie d'admirables rêves à accomplir, en vue d'une Beauté suprême, où règne le sublime, on s'est contenté de quelques visées, certes séduisantes et attrayantes, mais partielles et partiales, ne se détachant d'une belle perspective que pour s'attacher à une autre, jugée encore plus belle mais toujours isolée et coupée du Tout dont elle fait partie ; Tout, susceptible d'engendrer ces belles perspectives locales en les ordonnant au sein d'une Beauté globale issue d'un cadre architectonique totalisant, mais nullement totalitaire.

Désormais la beauté est au service de la seule utilité, laissant l'intelligibilité de côté. Quant au sublime il n'est plus le rêve ultime vers lequel on chemine. A force de répéter toujours la même méthodologie analytique, considérée, malgré son étroitesse écrasante, comme pièce maitresse, avec des variantes de plus en plus séduisantes mais aussi factices et simplificatrices, on a fini par oublier que cette étroitesse nébuleuse est traîtresse et trompeuse, ne reposant que sur son utilité pratique, dont la rationalité et l'objectivité restent relatives et abusives, avec un bénéfice local et partial, dissimulant un maléfice global et abyssal.

Références

[1] N. Daher, "Dynamics: Intrinsic and Relational Presentation", Fundamental Journal of Modern Physics, Volume 12, Issue 2, 2019, Pages 49-64.
[2] N. Daher, "Dynamics: From analytical principles to architectonical theorems", Fundamental Journal of Modern Physics, Volume 13, Issue 1, 2020, Pages 1-10.
[3] N. Daher, "Dynamics: From Architectonics to Geometry", Fundamental Journal of Modern Physics, Volume 13, Issue 1, 2020, Pages 35-48.
[4] N. Daher, "Dynamics: Architectonics in (1+3) dimensions", Fundamental Journal of Modern Physics, Volume 14, Issue 1, 2020, Pages 1-21.
[5] C.A. Risset : L'appropriation du monde, Bulletin de l'UDP, oct. 2022.
[6] C. Comte, Was it possible for Leibnitz to discover relativity? Eur. J. Phys. **7** 225-235 (1986).
[7] C. Comte, Langevin et la dynamique relativiste. In Epistémologiques, V 01.2, 1-2, EDP Sciences, Paris, (2002).
[8] B.V. Landau and S. Sampanther, "A new derivation of the Lorentz transformation, American Journal of Physics 40, 599-602 (1972).
[9] J.M. Lévy-Leblond and J.P. Provost, Additivity, rapidity, relativity. Am. J. Phys. 47(12),1979.
[10] J.M. Lévy-Leblond, Speed(s) Am. J. Phys. 48(5), May (1980).
[11] J. Barbour, "Absolute or relative motion?" The discovery of dynamics. Vol 1, Cambridge university press (2001).
[12] P. Costabel, Leibniz et la dynamique en 1692, Paris, 1960, (seconde édition 1980).
[13] S. Carvallo plus, "Leibniz", Les Textes Essentiels, Hachette 2001.