

## Initialisation 9

# Variété riemannienne avec la symétrie sphérique et le $ds^2$ de Schwarzschild

Février 2014

### Avertissement

## Introduction

Une variété Riemannienne  $(M, g)$  de dimension 4 possède la symétrie sphérique lorsque le groupe  $SO(3)$  des rotations autour d'un point est un groupe d'isométries de la variété.

L'algèbre de Lie de  $SO(3)$  constituée des rotations infinitésimales est caractérisée par trois générateurs  $K_1, K_2, K_3$  vérifiant les relations par rapport au crochet de Lie :

$$[[K_1, K_2]] = K_3, \quad [[K_2, K_3]] = K_1, \quad [[K_3, K_1]] = K_2,$$

(1)

L'invariance de la métrique  $g$  par ces rotations infinitésimales se traduit par les trois relations,  $\mathbb{L}_K$  définissant la dérivée de Lie dans la direction du vecteur  $K$ ,

$$\mathbb{L}_{K_i} g = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

(2)

$K_1, K_2, K_3$  sont dits vecteurs de Killing de la variété. Nous verrons par la suite et avec le théorème de Noether qu'ils engendrent des invariants des géodésiques de la variété  $M$ .

Les relations (1) définissent les conditions d'intégrabilité des équations aux DP qu'elles forment dans un système de coordonnées d'un ouvert  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ( $n$  entier  $\geq 2$ ). C'est à dire que  $K_1, K_2, K_3$  sont les vecteurs tangent d'une sous-variété de dimension 2 de  $U$ .

Calculs en deux temps :

1°) Construction des 3 générateurs  $K_1, K_2, K_3$  sur une carte  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Cela nous amène à la définition de 2 coordonnées cycliques  $\phi$  et  $\theta$  que l'on peut deviner immédiatement en réalisant que l'action de  $SO(3)$  sur  $\mathcal{M}$  engendre un feuilletage en sphères (l'orbite d'un point de  $\mathcal{M}$  sous l'action de  $SO(3)$  est une sphère et on obtient par cette action une partition de  $\mathcal{M}$  en un produit cartésien de sphères et d'un 2-plan). A partir de ceci on peut définir deux nouvelles coordonnées  $t$  et  $r$  :  $(\mathcal{M}, g) = \mathbb{R}^2 \times S^2$ .

2°) Résolution des 3 10 équations aux dérivées partielles des 10 fonctions  $g_{ij}$  définies par les équations (2).

Bien sûr dans  $(t, r, \phi, \theta)$  il faut s'interdire de penser aux coordonnées sphériques, ce sont les coordonnées adaptées à la définition de  $(\mathcal{M}, g)$  avec la symétrie sphérique. Plus tard lorsque  $g$  sera solution des équations d'Einstein on les appellera coordonnées de Schwarzschild.

## I Construction de 3 champs de vecteurs sur une carte de dimension 2 définissant l'algèbre de Lie de $SO(3)$

Cherchons à déterminer trois champs de vecteurs,  $K_1, K_2, K_3$  vérifiant les trois relations (1) définis sur un ouvert

$U \subset \mathbb{R}^2$ , de coordonnées  $(x, y)$ . On sait que c'est possible car les équations (1) en définissent les conditions d'intégrabilité.

Cela revient à résoudre 6 équations aux dérivées partielles en les 6 inconnues, les composantes de ces 3 champs.

### I°) Equations aux dérivées partielles déterminant $K_1, K_2, K_3$

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $(x, y)$ , écrivons les équations (1) :

**DimE = 2;**  
**coordonnées = {x, y};**  
**simp1 = aa\_[x, y] → aa;**  
**simp2 = aa\_[y] → aa;**

Remarquons que les équations (1) peuvent être transformées en les équations :

$$(2) \quad \llbracket K_1, \llbracket K_1, K_2 \rrbracket \rrbracket = -K_2, \quad \llbracket K_1, \llbracket K_1, K_3 \rrbracket \rrbracket = -K_3, \quad \llbracket K_2, K_3 \rrbracket = K_1,$$

l'intérêt de ces équations est que si on impose  $K_1 = \frac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$  les deux premières équations

se réduisent en une seule équation différentielle ordinaire du second ordre et que  $x$  s'interprète comme variable cyclique.

## Intégration des équation (2) en imposant $KI = (1, 0) = \frac{\partial}{\partial x}$

```
Clear[K1, K2]
K1 = {1, 0};
K2 = {A1, A2};

(equ1 = DLieV[K1, DLieV[K1, K2, 1], 1] == -ExprFonct[K2]) /. simp1
```

```
{A1(2,0), A2(2,0)} == {-A1, -A2}
```

```
ExprFonct[K2] /.
DSolve[MapThread[#1 == #2 &, {equ1[[1]], equ1[[2]]}], {A1, A2}, {x, y}][[1]]
{Cos[x] C[1][y] + Sin[x] C[2][y], Cos[x] C[3][y] + Sin[x] C[4][y]}
```

solution générale que nous écrivons sous la forme équivalente en remarquant que  $x$  est une première variable cyclique de l'intervalle  $(0, 2\pi)$ .

```
K2 = {W1[y] Cos[x - phi1[y]], W2[y] Sin[x - phi2[y]]}; Print["K2 = ", K2 /. simp2]
```

```
K2 = {W1 Cos[x - phi1], W2 Sin[x - phi2]}
```

et on obtient directement K3

```
K3 = DLieV[{1, 0}, K2]; Print["K3 = ", K3 /. simp2]
```

```
K3 = {-W1 Sin[x - phi1], W2 Cos[x - phi2]}
```

Les 4 fonctions  $W_i$  et  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2$  de la coordonnée  $y$  doivent satisfaire la dernière équation (2). Cela donne seulement 2 équations différentielles.

```
equ = MapThread[ (#1 == #2) &, {DLieV[K2, K3] // FullSimplify, K1}];
Print["", equ /. simp2]
{-W12 - W2 Cos[phi1 - phi2] W1' + W1 W2 Sin[phi1 - phi2] phi1' == 1, W2 (-W1 Sin[phi1 - phi2] + W2 phi2') == 0}
```

Cherchons une solution en fixant  $\phi_1$  et  $\phi_2$  comme constantes égales à  $\phi_0$

```
phi1 = Function[u, phi0];
phi2 = Function[u, phi0];
```

```
equ; Print["", equ /. simp2]
```

```
{-W12 - W2 W1' == 1, True}
```

Il reste une seule équation,  $W_2$  peut être choisi arbitrairement. Avec  $W_2 = 1$  nous obtenons la solution pour  $W_1$  :

```
W2 = Function[u, 1];
sol = DSolve[equ[[1]], W1, y][[1]]
```

```
{W1 -> Function[{y}, -Tan[y - C[1]]]}
```

On remarque que  $y$  est une deuxième variable cyclique de l'intervalle  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

```
K2 = K2 /. sol /. C[1] -> theta /. {x -> phi, y -> theta}; Print["K2 = ", K2]
```

```
K2 = {-Cos[phi - phi0] Tan[theta - theta0], Sin[phi - phi0]}
```

## Conclusion : une solution simple des équations (2) et signification géométrique

```
U : " (phi, theta) in ]0, 2pi [ x ] -pi/2, pi/2 ["
```

```
K1 = {1, 0}; Print["K1 = ", K1]
K2 = K2 /. sol /. C[1] -> theta /. {x -> phi, y -> theta};
Print["K2 = ", K2]
K3 = K3 /. sol /. C[1] -> theta /. {x -> phi, y -> theta};
Print["K3 = ", K3]
```

```
U : (phi, theta) in ]0, 2pi [ x ] -pi/2, pi/2 [
```

```
K1 = {1, 0}
```

```
K2 = {-Cos[phi - phi0] Tan[theta - theta0], Sin[phi - phi0]}
```

```
K3 = {Sin[phi - phi0] Tan[theta - theta0], Cos[phi - phi0]}
```

$K1, K2, K3$  définissent les trois degrés de liberté sur la carte : deux de translation et une de rotation autour d'un point  $(\phi_0, \theta_0)$

## Conclusion (provisoire ne pas ouvrir)

## Interprétation géométrique Flots de $K1, K2, K3$ au voisinage du point $(\phi_0, \theta_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$

### flot de $K1$

```
equ1 = MapThread[#1 == #2 &, {Map[D[#1[t], t] &, {phi, theta}], K1 /. {phi -> phi[t], theta -> theta[t]}}];
sol1 = Table[NDSolve[Join[equ1, {phi[0] == pi/4, theta[0] == pi/3 + n Pi/40}],
  {phi, theta}, {t, -1, 1}], {n, -4, 4, 2}];
G1 = ParametricPlot[{{pi/4, pi/3}, {phi[t], theta[t]}} /. sol1, {t, -1, 1},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{-pi, pi}, {-pi/2, pi/2}}, Frame -> True];
```

## flot de K2

```

P = {φ0 → π / 4, θ0 → π / 3};

L2 = K2 /. P;
equ2 =
  MapThread[#1 == #2 &, {Map[D[#1[t], t] &, {φ, θ}], L2 /. {φ → φ[t], θ → θ[t]}}];
sol2 = Table[NDSolve[Join[equ2, {φ[0] == π / 4 + n π / 50, θ[0] == π / 3}],
  {φ, θ}, {t, 0, 10}], {n, 1, 8, 2}];
G2 = ParametricPlot[{φ[t], θ[t]} /. sol2, {t, 0, 10}, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → {{-π, π}, {-π / 2, π / 2}}, PlotStyle → Red, Frame → True];

```

## flot de K3

```

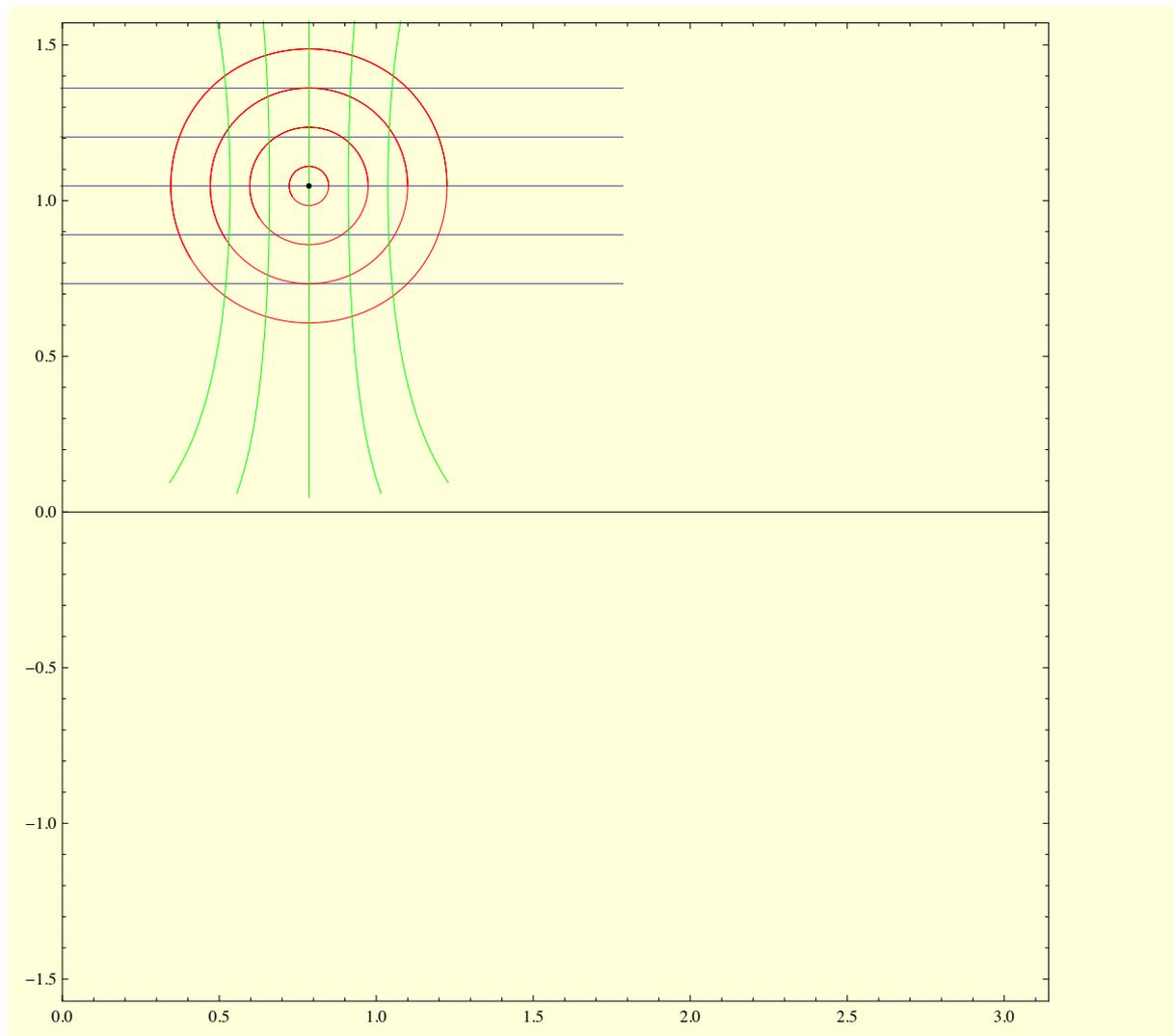
L3 = K3 /. P;
equ3 =
  MapThread[#1 == #2 &, {Map[D[#1[t], t] &, {φ, θ}], L3 /. {φ → φ[t], θ → θ[t]}}];
sol3 = Table[NDSolve[Join[equ3, {φ[0] == π / 4 + n π / 50, θ[0] == π / 3}],
  {φ, θ}, {t, -1, 1}], {n, -4, 4, 2}];
G3 = ParametricPlot[{φ[t], θ[t]} /. sol3, {t, -1, 1}, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → {{-π, π}, {-π / 2, π / 2}}, PlotStyle → Green, Frame → True];

```

Flots de K1 (en bleu), K2 (en rouge), K3 (en vert) au voisinage du point  $P = (\phi = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{4})$

K1 et K2 sont les deux translations infinitésimales, K3 est la rotation infinitésimale autour de P.

```
Show[G1, G2, G3, Graphics[Point[{ $\pi/4$ ,  $\pi/3$ }], PlotRange -> {{0,  $\pi$ }, {- $\pi/2$ ,  $\pi/2$ }}]
```



$\mathbf{K2} = \mathbf{K2} /. \{\phi \rightarrow -\pi/2, \theta \rightarrow 0\}$

$\{\text{Sin}[\phi] \text{Tan}[\theta], \text{Cos}[\phi]\}$

$\mathbf{K3} = \mathbf{K3} /. \{\phi \rightarrow -\pi/2, \theta \rightarrow 0\}$

$\{\text{Cos}[\phi] \text{Tan}[\theta], -\text{Sin}[\phi]\}$

## 2

### Forme générale d'une métrique à symétrie sphérique

#### Carte de $\mathcal{M}$ et les trois vecteurs de Killing

La symétrie sphérique induit un feuilletage de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{U}$ , on part d'un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  avec les coordonnées  $(t, r, \varphi, \theta)$  et une métrique  $g$  de signature lorentzienne et enfin avec les trois champs

de Killing K1, K2, K3 définis ci-dessous.  
On utilise l'option 2 de la fonction carte :

**Carte[]**

Choisir l'espace en entrant le numéro dans la liste suivante :

**ATTENTION !** : Cliquer sur le bouton OK de la fenêtre après le choix du numéro

```
Espace euclidien ordinaire -----1
Espace euclidien en base non orthonormée ----- 2
Espace de Minkowski ----- 3
Espace euclidien général -----4
coordonnées sphériques en dimension 3-----5
Sphère en dimension 4 -----6
Carte de Schwarzschild -----7
```

espace euclidien ordinaire en dimension 4 en base non orthonormée

----- Résumé -----

Variables globales disponibles : DimE, coordonnées, Gcov, Gcontr, detg

coordonnées : {x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>}

$$\text{métrique : } G_{\text{cov}} = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} & g_{1,4} \\ g_{1,2} & g_{2,2} & g_{2,3} & g_{2,4} \\ g_{1,3} & g_{2,3} & g_{3,3} & g_{3,4} \\ g_{1,4} & g_{2,4} & g_{3,4} & g_{4,4} \end{pmatrix} \quad G_{\text{contr}} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & h_{1,4} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & h_{2,3} & h_{2,4} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & h_{3,3} & h_{3,4} \\ h_{1,4} & h_{2,4} & h_{3,4} & h_{4,4} \end{pmatrix}$$

on peut utiliser les notations suivantes pour les bases  
dans l'algèbre tensorielle et extérieure sur la présente carte

BaseV[1] = {e<sub>x<sub>1</sub></sub>, e<sub>x<sub>2</sub></sub>, e<sub>x<sub>3</sub></sub>, e<sub>x<sub>4</sub></sub>}

BaseV[2][[{1,2,3}]] = {e<sub>x<sub>1</sub></sub> ⊗ e<sub>x<sub>1</sub></sub>, e<sub>x<sub>1</sub></sub> ⊗ e<sub>x<sub>2</sub></sub>, e<sub>x<sub>1</sub></sub> ⊗ e<sub>x<sub>3</sub></sub>}

BaseD[2][[2]] = dx<sub>1</sub> ⊗ dx<sub>2</sub>

BaseD[DimE][[DimE^2]] = dx<sub>1</sub> ⊗ dx<sub>1</sub> ⊗ dx<sub>4</sub> ⊗ dx<sub>4</sub>

BaseFD[DimE] = {dx<sub>1</sub> ∧ dx<sub>2</sub> ∧ dx<sub>3</sub> ∧ dx<sub>4</sub>}

.....

puis utiliser la Fonction Bases[n] (n=nombre d'éléments  
dans un produit) pour remplacer les symboles par leur valeurs

exemples : e<sub>x<sub>1</sub></sub>/.Bases[1] = {1, 0, 0, 0}

e<sub>x<sub>1</sub></sub> ∧ e<sub>x<sub>2</sub></sub>/.Bases[2] = {1, 0, 0, 0, 0, 0}

```

coordonnées = {t, r, ϕ, θ};
Print["coordonnées sur la carte  $\mathbb{R}^2 \times U$  : ", coordonnées]
K1 = Prepend[K1, {0, 0}] // Flatten; Print["K1 = ", K1]
K2 = Prepend[K2, {0, 0}] // Flatten; Print["K2 = ", K2]
K3 = Prepend[K3, {0, 0}] // Flatten; Print["K3 = ", K3]

```

```
coordonnées sur la carte  $\mathbb{R}^2 \times U$  : {t, r, ϕ, θ}
```

```
K1 = {0, 0, 1, 0}
```

```
K2 = {0, 0, Sin[ϕ] Tan[θ], Cos[ϕ]}
```

```
K3 = {0, 0, Cos[ϕ] Tan[θ], -Sin[ϕ]}
```

## Vérification

### Résolution des équation aux dérivées partielles $L_{K_i} g = 0$

? DLieF

Dérivée de Lie d'un p-tenseur covariant. Utilisation : DLieF[Direction, p-Tenseur, p]. Voir aussi DLieV, DLieT

```
simp = aa_[t, r, ϕ, θ] → aa;
```

### Dérivée de Lie de g dans la direction de K1

```
T0 = Table[DLieF[K1, Gcov, 2][[i, j]] == 0, {i, 4}, {j, i, 4}] /. simp // Flatten;
Print[" $L_{K1}g = 0 \Rightarrow$  ", T0]
```

```

 $L_{K1}g = 0 \Rightarrow$ 
 $\{g_{1,1}^{(0,0,1,0)} = 0, g_{1,2}^{(0,0,1,0)} = 0, g_{1,3}^{(0,0,1,0)} = 0, g_{1,4}^{(0,0,1,0)} = 0, g_{2,2}^{(0,0,1,0)} = 0,$ 
 $g_{2,3}^{(0,0,1,0)} = 0, g_{2,4}^{(0,0,1,0)} = 0, g_{3,3}^{(0,0,1,0)} = 0, g_{3,4}^{(0,0,1,0)} = 0, g_{4,4}^{(0,0,1,0)} = 0\}$ 

```

g ne dépend pas de la variable  $\phi$

```
Gcov1 = ExprFonct[Gcov, {t, r, θ}];
```

```
simp = aa_[t, r, θ] → aa;
```

### Dérivées de Lie de g dans les directions de K2 et K3

En examinant les deux dérivées  $L_{K2}g$  et  $L_{K3}g$  on remarque qu'il est intéressant de calculer les deux combinaisons

$$T1 = \cos(\phi) L_{K2}g - \sin(\phi) L_{K3}g = 0,$$

$$T2 = \sin(\phi) L_{K2}g + \cos(\phi) L_{K3}g = 0.$$

```

T1 = Table[Cos[ϕ] DLieF[K2, Gcov1, 2][[i, j]] - Sin[ϕ] DLieF[K3, Gcov1, 2][[i, j]] ==
0 // FullSimplify, {i, 4}, {j, i, 4}] // Flatten;
Do[Print[T1[[i]]] /. simp, {i, 10}]

```

$$g_{1,1}^{(0,0,1)} = 0$$

$$g_{1,2}^{(0,0,1)} = 0$$

$$g_{1,3} \tan[\theta] + g_{1,3}^{(0,0,1)} = 0$$

$$g_{1,4}^{(0,0,1)} = 0$$

$$g_{2,2}^{(0,0,1)} = 0$$

$$g_{2,3} \tan[\theta] + g_{2,3}^{(0,0,1)} = 0$$

$$g_{2,4}^{(0,0,1)} = 0$$

$$2 g_{3,3} \tan[\theta] + g_{3,3}^{(0,0,1)} = 0$$

$$g_{3,4} \tan[\theta] + g_{3,4}^{(0,0,1)} = 0$$

$$g_{4,4}^{(0,0,1)} = 0$$

```
T2 = Table[Sin[φ] DLieF[K2, Gcov1, 2][[i, j]] + Cos[φ] DLieF[K3, Gcov1, 2][[i, j]] ==
  0 // FullSimplify, {i, 4}, {j, i, 4}] // Flatten;
Do[If[(T2[[i]] // Head) == Equal, Print[T2[[i]] /. simp]], {i, 10}]
```

$$g_{1,4} = 0$$

$$\sec[\theta] g_{1,3} = 0$$

$$g_{2,4} = 0$$

$$\sec[\theta] g_{2,3} = 0$$

$$g_{3,4} = 0$$

$$\sec[\theta]^2 g_{3,3} = g_{4,4}$$

$$\sec[\theta] g_{3,4} = 0$$

D'où la deuxième expression simplifiée de g

```
rep1 = Map[# → 0 &, {g1,3, g1,4, g2,4, g2,3, g3,4}]
```

```
{g1,3 → 0, g1,4 → 0, g2,4 → 0, g2,3 → 0, g3,4 → 0}
```

```
rep2 = Map[# → ExprFonct[#, {t, r}] &, {g1,1, g1,2, g2,2, g4,4}]
```

```
{g1,1 → g1,1[t, r], g1,2 → g1,2[t, r], g2,2 → g2,2[t, r], g4,4 → g4,4[t, r]}
```

```
(Gcov2 = Gcov /. rep1 /. rep2 /. g3,3 -> g3,3[t, r, θ]) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} g_{1,1}[t, r] & g_{1,2}[t, r] & 0 & 0 \\ g_{1,2}[t, r] & g_{2,2}[t, r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{3,3}[t, r, \theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{4,4}[t, r] \end{pmatrix}$$

### Réécriture des deux combinaisons précédentes Solution des équations aux dérivées partielles

```
T1 = Table[Cos[φ] DLieF[K2, Gcov2, 2][[i, j]] - Sin[φ] DLieF[K3, Gcov2, 2][[i, j]] ==  
0 // FullSimplify, {i, 4}, {j, i, 4}] // Flatten;  
Do[If[(T1[[i]] // Head) == Equal, Print[T1[[i]] /. simp]], {i, 10}]
```

$$2 g_{3,3} \tan[\theta] + g_{3,3}^{(0,0,1)} = 0$$

```
T2 = Table[Sin[φ] DLieF[K2, Gcov2, 2][[i, j]] + Cos[φ] DLieF[K3, Gcov2, 2][[i, j]] ==  
0 // FullSimplify, {i, 4}, {j, i, 4}] // Flatten;  
Do[If[(T2[[i]] // Head) == Equal, Print[T2[[i]] /. simp]], {i, 10}]
```

$$\sec[\theta]^2 g_{3,3} = g_{4,4}[t, r]$$

D'où la forme générale de la métrique :

```
(Gcov2 = Gcov2 /. g3,3[t, r, θ] -> g4,4[t, r] Cos[θ]^2) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} g_{1,1}[t, r] & g_{1,2}[t, r] & 0 & 0 \\ g_{1,2}[t, r] & g_{2,2}[t, r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos[\theta]^2 g_{4,4}[t, r] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{4,4}[t, r] \end{pmatrix}$$

### Vérification

## 3

# Métrique à symétrie sphérique solution des équations d'Einstein le ds<sup>2</sup> de Schwarzschild

### I° Simplifications successives du ds<sup>2</sup>

Une première simplification consiste en le changement de variables en posant  $R = \sqrt{g_{4,4}[t, r]}$ .

En gardant la même notation pour la variable r le ds<sup>2</sup> prend la forme :

```
Clear[A, B]
d1 = {t, r, φ, θ};
ds2 = {-A[t, r], F[t, r], 0, 0},
      {F[t, r], B[t, r], 0, 0}, {0, 0, r^2 Cos[θ]^2, 0}, {0, 0, 0, r^2};
Print["Gcov = ", ds2 // MatrixForm]
Print["ds^2 = ", ExprForm1[ds2, "cov"] /. {dx1 -> dt, dx2 -> dr, dx3 -> dφ, dx4 -> dθ}]
```

$$Gcov = \begin{pmatrix} -A[t, r] & F[t, r] & 0 & 0 \\ F[t, r] & B[t, r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2[\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = B[t, r] dr \otimes dr - A[t, r] dt \otimes dt + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 d\phi \otimes d\phi \cos^2[\theta]^2 + dr \otimes dt F[t, r] + dt \otimes dr F[t, r]$$

Une seconde simplification consiste à faire disparaître le terme rectangle  $F(t, r)$  en décomposant dans le ds<sup>2</sup> les termes en dt et dr en carrés :

$$-A dt^2 + B dr^2 + 2F dr dt = -A \left( dt - \frac{F}{A} dr \right)^2 + \left( B - \frac{F^2}{A} \right) dr^2$$

et ensuite de calculer un multiplicateur  $\mu(t, r)$  telque  $\mu \left( dt - \frac{F}{A} dr \right) = dT$

(ce qui est possible puisque l'on a avec  $W = \left( dt - \frac{F}{A} dr \right)$ ,  $W \wedge dW = 0$ ).

le ds<sup>2</sup> devient la forme simplifiée :  $-\frac{A}{\mu^2} dT^2 + \left( B - \frac{F^2}{A} \right) dr^2 + r^2 (\cos^2(\theta) d\phi^2 + d\theta^2)$

Enfin avec le changement de variables  $T(t, r) = t'$  et en remplaçant après ce changement  $t'$  par  $t$  et les nouvelles fonctions devant  $dt^2$  et  $dr^2$  par  $A$  et  $B$  on arrive à la forme équivalente remarquable :

```
ds2 = DiagonalMatrix[{-A[t, r], B[t, r], r^2 Cos[θ]^2, r^2}];
Print["Gcov = ", ds2 // MatrixForm]
Print["ds^2 = ",
      ExprForm1[ds2, "cov"] /. {dx1 -> dt, dx2 -> dr, dx3 -> dφ, dx4 -> dθ}] // Factor
```

$$Gcov = \begin{pmatrix} -A[t, r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B[t, r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2[\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = B[t, r] dr \otimes dr - A[t, r] dt \otimes dt + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 d\phi \otimes d\phi \cos^2[\theta]^2$$

## 2°) Equations d'Einstein et le ds<sup>2</sup> solution

Carte[d1, ds2]

Il s'agit d'étudier le comportement d'une particule de masse négligeable dans  $(\mathcal{M}, g)$  vide. Les équations d'Einstein s'obtiennent en annulant le tenseur de Ricci.

```

simp = aa_[t, r] → aa;

(ricci = CRicci // TrigFactor // Expand) // MatrixForm;

k = 1;
Do[If[Not[ricci[[i, j]] === 0], eq[k] = ricci[[i, j]];
  Print["eq(", k, ") : ", eq[k] /. simp, " = 0"]; k = k + 1], {i, 4}, {j, i, 4}]

```

$$\text{eq}(1) : \frac{A^{(0,1)}}{B r} - \frac{(A^{(0,1)})^2}{4 A B} - \frac{A^{(0,1)} B^{(0,1)}}{4 B^2} + \frac{A^{(0,2)}}{2 B} + \frac{A^{(1,0)} B^{(1,0)}}{4 A B} + \frac{(B^{(1,0)})^2}{4 B^2} - \frac{B^{(2,0)}}{2 B} = 0$$

$$\text{eq}(2) : \frac{B^{(1,0)}}{B r} = 0$$

$$\text{eq}(3) : \frac{(A^{(0,1)})^2}{4 A^2} + \frac{B^{(0,1)}}{B r} + \frac{A^{(0,1)} B^{(0,1)}}{4 A B} - \frac{A^{(0,2)}}{2 A} - \frac{A^{(1,0)} B^{(1,0)}}{4 A^2} - \frac{(B^{(1,0)})^2}{4 A B} + \frac{B^{(2,0)}}{2 A} = 0$$

$$\text{eq}(4) : \text{Cos}[\theta]^2 - \frac{\text{Cos}[\theta]^2}{B} - \frac{r \text{Cos}[\theta]^2 A^{(0,1)}}{2 A B} + \frac{r \text{Cos}[\theta]^2 B^{(0,1)}}{2 B^2} = 0$$

$$\text{eq}(5) : 1 - \frac{1}{B} - \frac{r A^{(0,1)}}{2 A B} + \frac{r B^{(0,1)}}{2 B^2} = 0$$

On obtient 5 équations; la deuxième nous indique que B ne dépend pas de t, cela permet de nouveau une simplification du ds<sup>2</sup>. D'autre part les équations 4 et 5 sont les memes à uncoefficient près.

Nous recalculons les équations d'Einstein :

```

(Gcov = Gcov /. B[t, r] → B[r]) // MatrixForm
Gcontr = Gcontr /. B[t, r] → B[r];

```

$$\begin{pmatrix} -A[t, r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B[r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{Cos}[\theta]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

```

simp = {aa_[t, r] → aa, aa_[r] → aa};

```

```

(ricci = CRicci) // MatrixForm;

```

```

k = 1;
Do[If[Not[ricci[[i, j]] === 0], eq[k] = ricci[[i, j]]; Print["eq(", k,
  ") : ", eq[k] /. simp // Factor, " = 0"]; k = k + 1], {i, 4}, {j, i, 4}]

```

$$\text{eq}(1) : -\frac{1}{4 A B^2 r} \left( -4 A B A^{(0,1)} + A r B' A^{(0,1)} + B r \left( A^{(0,1)} \right)^2 - 2 A B r A^{(0,2)} \right) = 0$$

$$\text{eq}(2) : -\frac{1}{4 A^2 B r} \left( -4 A^2 B' - A r B' A^{(0,1)} - B r \left( A^{(0,1)} \right)^2 + 2 A B r A^{(0,2)} \right) = 0$$

$$\text{eq}(3) : \frac{\text{Cos}[\theta]^2 \left( -2 A B + 2 A B^2 + A r B' - B r A^{(0,1)} \right)}{2 A B^2} = 0$$

$$\text{eq}(4) : \frac{1}{2 A B^2} \left( -2 A B + 2 A B^2 \text{Sec}[\theta]^2 - 2 A B^2 \text{Tan}[\theta]^2 + A r B' - B r A^{(0,1)} \right) = 0$$

il y a trois équations indépendantes (eq3 et eq4 donnent la même équation)  
D'autre part nous avons les simplifications et combinaisons évidentes suivantes :

```

eq1 = Numerator@Factor@(ricci[[1, 1]] B[r] / A^(0,1)[t, r]);
Print["eq1 : ", eq1 /. simp, " = 0"]
eq2 = Numerator@Factor@(ricci[[2, 2]] A[t, r] / A^(0,1)[t, r]);
Print["eq2 : ", eq2 /. simp, " = 0"]
eq3 = Numerator@Factor@(ricci[[3, 3]] B[r] / Cos[θ]^2);
Print["eq3 : ", eq3 /. simp, " = 0"]

```

$$\text{eq1} : 4 A B A^{(0,1)} - A r B' A^{(0,1)} - B r \left( A^{(0,1)} \right)^2 + 2 A B r A^{(0,2)} = 0$$

$$\text{eq2} : 4 A^2 B' + A r B' A^{(0,1)} + B r \left( A^{(0,1)} \right)^2 - 2 A B r A^{(0,2)} = 0$$

$$\text{eq3} : -2 A B + 2 A B^2 + A r B' - B r A^{(0,1)} = 0$$

**(eq1 + eq2 // Factor) == 0 /. simp**

$$4 A \left( A B' + B A^{(0,1)} \right) == 0$$

Nous en déduisons que le produit A B ne dépend pas de la variable r : A(t, r) B(r) = F(t). reportons dans eq1 pour obtenir une équation en B

```

eq4 = eq1 /. A -> Function[{t, r}, F[t] / B[r]] // Together // Numerator // Factor;
Print["eq4 : ", eq4 /. simp, "= 0"]
sol1 = DSolve[eq4 == 0, B, r]

```

$$\text{eq4} : -2 F[t]^2 \left( 2 B B' - 2 r (B')^2 + B r B'' \right) = 0$$

$$\left\{ \left\{ B \rightarrow \text{Function} \left[ \{r\}, \frac{r C[2]}{1 + r C[1]} \right] \right\} \right\}$$

L'équation 3 impose C[2] = C[1] = - 1/M

```
(eq3 /. A -> Function[{t, r}, F[t] / B[r]] // Together // Numerator) /. sol1 //
FullSimplify; Print[%, " = 0"]
```

$$\frac{2 r^2 C[2] (-C[1] + C[2]) F[t]}{(1 + r C[1])^2} = 0$$

```
Gcov1 = DiagonalMatrix[{-F[t] / B[r], B[r], r^2 Cos[θ]^2, r^2}] /. sol1[[1]] /.
C[i_] -> -1 / M // Simplify
```

$$\left\{ \left\{ \frac{(M-r) F[t]}{r}, 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{r}{M-r}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, r^2 \cos^2[\theta], 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, r^2 \right\} \right\}$$

La fonction F est arbitraire mais elle doit être positive. On peut prendre d'emblée  $F = 1$  sinon, ce qui revient au même pour la forme du  $ds^2$ , on peut de nouveau simplifier en posant  $dT = \sqrt{F} dt$ . Nous en déduisons le  $ds^2$  de Schwarzschild :

```
ds2 = Gcov1 /. F[t] -> 1
```

$$\left\{ \left\{ \frac{M-r}{r}, 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{r}{M-r}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, r^2 \cos^2[\theta], 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, r^2 \right\} \right\}$$

#### Conclusion

On a la propriété remarquable suivante : La variété  $(\mathcal{M}, g)$  avec la symétrie sphérique admet une métrique **stationnaire** et possède les quatre vecteurs de Killing :

$K_t = e_t$ ,  $K_1 = e_\phi$ ,  $K_2 = (0, 0, \sin(\phi) \tan(\theta), \cos(\phi))$ ,  $K_3 = (0, 0, \cos(\phi) \tan(\theta), -\sin(\phi))$

```
Carte[coordonnées, ds2]
```

## ----- Résumé -----

Variables globales disponibles : DimE, coordonnées, Gcov, Gcontr, detg

coordonnées : {t, r, φ, θ}

$$\text{métrique : } Gcov = \begin{pmatrix} \frac{M-r}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{M-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2[\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad Gcontr = \begin{pmatrix} \frac{r}{M-r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sec^2[\theta]}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

on peut utiliser les notations suivantes pour les bases  
dans l'algèbre tensorielle et extérieure sur la présente carte

BaseV[1] = {e<sub>t</sub>, e<sub>r</sub>, e<sub>φ</sub>, e<sub>θ</sub>}

BaseV[2][[1,2,3]] = {e<sub>t</sub> ⊗ e<sub>t</sub>, e<sub>t</sub> ⊗ e<sub>r</sub>, e<sub>t</sub> ⊗ e<sub>φ</sub>}

BaseD[2][[2]] = dt ⊗ dr

BaseD[DimE][[DimE^2]] = dt ⊗ dt ⊗ dφ ⊗ dθ

BaseFD[DimE] = {dt ∧ dr ∧ dφ ∧ dθ}

.....

puis utiliser la Fonction Bases[n] (n=nombre d'éléments  
dans un produit) pour remplacer les symboles par leur valeurs

exemples : e<sub>t</sub>/.Bases[1] = {1, 0, 0, 0}

e<sub>t</sub> ∧ e<sub>r</sub>/.Bases[2] = {1, 0, 0, 0, 0, 0}

## Vérification

**CRicci // FullSimplify**

{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

# 4

## équations d'Einstein avec une constante cosmologique

Voir aussi NB "SCHW2" Septembre 2011

On reprend les calculs précédents avec la constante  $\Lambda$

$$ds2 = \begin{pmatrix} -A[t, r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B[t, r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos[\theta]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix};$$

Carte[d1, ds2]

notons par TE le tenseur d'Einstein avec la constante cosmologique

```
TE = FullSimplify[CRicci - Λ Gcov] // Together;
Print["TE = ", TE /. simp]
```

$$TE = \left\{ \left\{ \frac{1}{4 A B^2 r} (4 A^2 B^2 r \Lambda + 4 A B A^{(0,1)} - A r B' A^{(0,1)} - B r (A^{(0,1)})^2 + 2 A B r A^{(0,2)}), 0, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, \frac{1}{4 A^2 B r} (-4 A^2 B^2 r \Lambda + 4 A^2 B' + A r B' A^{(0,1)} + B r (A^{(0,1)})^2 - 2 A B r A^{(0,2)}), 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, 0, -\frac{1}{2 A B^2} \cos[\theta]^2 (2 A B - 2 A B^2 + 2 A B^2 r^2 \Lambda - A r B' + B r A^{(0,1)}), 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, 0, 0, \frac{-2 A B + 2 A B^2 - 2 A B^2 r^2 \Lambda + A r B' - B r A^{(0,1)}}{2 A B^2} \right\} \right\}$$

k = 1;

```
Do[If[Not[TE[[i, j]] == 0], eq[k] = TE[[i, j]];
Print["eq(", k, ") = ", eq[k], " = 0"]; k = k + 1], {i, 4}, {j, i, 4}]
```

On obtient 4 équations comme précédemment la même combinaison des deux premières nous indique que B ne dépend pas de t, cela permet de nouveau une simplification du ds<sup>2</sup>. Nous recalculons les équations d'Einstein :

```
(Gcov = Gcov /. B[t, r] → B[r]) // MatrixForm
Gcontr = Gcontr /. B[t, r] → B[r];
```

$$\begin{pmatrix} -A[t, r] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B[r] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos[\theta]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

```
(TE = CRicci - Λ Gcov) // MatrixForm;
```

k = 1;

```
Do[If[Not[TE[[i, j]] == 0], eq[k] = TE[[i, j]];
Print["eq(", k, ") = ", eq[k], " = 0"]; k = k + 1], {i, 4}, {j, i, 4}]
```

$$eq(1) = \Lambda A[t, r] + \frac{A^{(0,1)}[t, r]}{r B[r]} - \frac{B'[r] A^{(0,1)}[t, r]}{4 B[r]^2} - \frac{A^{(0,1)}[t, r]^2}{4 A[t, r] B[r]} + \frac{A^{(0,2)}[t, r]}{2 B[r]} = 0$$

$$eq(2) = -\Lambda B[r] + \frac{B'[r]}{r B[r]} + \frac{B'[r] A^{(0,1)}[t, r]}{4 A[t, r] B[r]} + \frac{A^{(0,1)}[t, r]^2}{4 A[t, r]^2} - \frac{A^{(0,2)}[t, r]}{2 A[t, r]} = 0$$

$$eq(3) = \cos[\theta]^2 - r^2 \Lambda \cos[\theta]^2 - \frac{\cos[\theta]^2}{B[r]} + \frac{r \cos[\theta]^2 B'[r]}{2 B[r]^2} - \frac{r \cos[\theta]^2 A^{(0,1)}[t, r]}{2 A[t, r] B[r]} = 0$$

$$eq(4) = -r^2 \Lambda - \frac{1}{B[r]} + \sec[\theta]^2 - \tan[\theta]^2 + \frac{r B'[r]}{2 B[r]^2} - \frac{r A^{(0,1)}[t, r]}{2 A[t, r] B[r]} = 0$$

il y a trois équations indépendantes (eq3 et eq4 donnent la même équation)

D'autre part nous avons les simplifications et combinaisons évidentes suivantes :

**eq1 = TE[[1, 1]] B[r] / A^(0,1)[t, r] // Expand**

$$\frac{1}{r} - \frac{B'[r]}{4B[r]} + \frac{\Delta A[t, r] B[r]}{A^{(0,1)}[t, r]} - \frac{A^{(0,1)}[t, r]}{4A[t, r]} + \frac{A^{(0,2)}[t, r]}{2A^{(0,1)}[t, r]}$$

**eq2 = TE[[2, 2]] A[t, r] / A^(0,1)[t, r] // Expand**

$$\frac{B'[r]}{4B[r]} - \frac{\Delta A[t, r] B[r]}{A^{(0,1)}[t, r]} + \frac{A[t, r] B'[r]}{rB[r] A^{(0,1)}[t, r]} + \frac{A^{(0,1)}[t, r]}{4A[t, r]} - \frac{A^{(0,2)}[t, r]}{2A^{(0,1)}[t, r]}$$

**eq3 = TE[[3, 3]] B[r] / Cos[θ]^2 // Expand**

$$-1 + B[r] - r^2 \Delta B[r] + \frac{r B'[r]}{2B[r]} - \frac{r A^{(0,1)}[t, r]}{2A[t, r]}$$

**(eq1 + eq2 // Together // Numerator) == 0**

$$A[t, r] B'[r] + B[r] A^{(0,1)}[t, r] == 0$$

Nous en déduisons que le produit A B ne dépend pas de la variable r : A(t, r) B(r) = F(t). reportons dans eq1 pour obtenir une équation en B

**eq1 /. A → Function[{t, r}, F[t] / B[r]] // Together // Numerator**

**sol1 = DSolve[% == 0, B, r]**

$$-2 r \Delta B[r]^3 + 2 B[r] B'[r] - 2 r B'[r]^2 + r B[r] B''[r]$$

$$\left\{ \left\{ B \rightarrow \text{Function} \left[ \{r\}, -\frac{3 r}{r^3 \Delta + 3 C[1] + 3 r C[2]} \right] \right\} \right\}$$

L'équation 3 impose C[2] = -1 et on pose C[1] = 2m

**(eq3 == 0 /. A → Function[{t, r}, F[t] / B[r]] // Together // Numerator) /. sol1 // FullSimplify**

$$\left\{ \frac{r (1 + C[2])}{r^3 \Delta + 3 C[1] + 3 r C[2]} == 0 \right\}$$

**Gcov1 = DiagonalMatrix[{-F[t] / B[r], B[r], r^2 Cos[θ]^2, r^2}] /. sol1[[1]] /. C[2] → -1 /. C[1] → 2 m**

$$\left\{ \left\{ \frac{(6 m - 3 r + r^3 \Delta) F[t]}{3 r}, 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{3 r}{6 m - 3 r + r^3 \Delta}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, r^2 \text{Cos}[\theta]^2, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, r^2 \right\} \right\}$$

La fonction F est arbitraire mais elle doit être positive. On peut prendre d'emblée F = 1 sinon, ce qui revient au même pour la forme du ds<sup>2</sup>, on peut de nouveau simplifier en posant dT = √F dt

**ds2 = Gcov1 /. F[t] → 1 // ExpandAll**

$$\left\{ \left\{ -1 + \frac{2m}{r} + \frac{r^2 \Lambda}{3}, 0, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, -\frac{3r}{6m - 3r + r^3 \Lambda}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, r^2 \cos^2[\theta], 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, r^2 \right\} \right\}$$

## Conclusion

On a la propriété remarquable suivante : La variété  $(\mathcal{M}, g)$  avec la symétrie sphérique admet une métrique stationnaire (théorème de Birkhoff)

de plus  $g$  possède les quatre vecteurs de Killing :  $K_t = e_t$ ,  $K_1 = e_\phi$ ,  $K_2 = \sin(\phi) \tan(\theta) e_\phi + \cos(\phi) e_\theta$ ,

$K_3 = \cos(\phi) \tan(\theta) e_\phi - \sin(\phi) e_\theta$

**A[r\_] = A[r] /. sol /. C[1] → -2 M // FullSimplify**

$$1 - \frac{2m}{r} - \frac{r^2 \Lambda}{3}$$

**(ds2 = DiagonalMatrix[{-A[r], 1/A[r], r^2 Cos[θ]^2, r^2}]) // MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} -1 + \frac{2m}{r} + \frac{r^2 \Lambda}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{r^2 \Lambda}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2[\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$