Mouvement uniformément accéléré en relativité restreinte

Comment définir une particule animée d'une accélération uniforme en relativité restreinte?

L'espace de la relativité restreinte est l'espace affine réel de dimension 4 d'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de Minkowski muni de la métrique η = diag(1,-1,-1,-1). Soit **O** un observateur inertiel dont la ligne d'univers est la droite (O_0, **t** $\mathbb{R}$) où **t** est sa qadrivitesse (c'est à dire un vecteur unitaire de genre temps orienté vers le futur) et où O_0 est sa position à l'origine de sont temps propre t. A un instant t nous notons par $\mathcal{R}_O$ = (O, **t**, **i**, **j**, **k**) le repère η-orthonormé dit repère de l'observateur **O** où O est sa position à cet instant sur sa ligne d'univers.
La base (**i**, **j**, **k**) est la base du sous-espace vectoriel de dimension 3 le supplémentaire η-orthogonal à **t**, il définit l'espace physique de O à l'instant considéré.
O observe une particule M non inertielle de ligne d'univers $\mathcal{L}_M$. Cette ligne peut être décrite par ses coordonnées paramétriques dans le repère $\mathcal{R}_{O_0}$ = (O_0, **t**, **i**, **j**, **k**) avec pour paramètre le temps propre τ telque le vecteur tangent
$\frac{dM}{d\tau}$ est unitaire. Ce vecteur définit la quadrivitesse de M par rapport à O. qV est un quadrivecteur de genre temps orienté vers le futur : ⟨qV,qV⟩ = 1. (voir figure)
Soit M(τ) = (t(τ), x(τ), y(τ), z(τ)) les équations paramétriques de $\mathcal{L}_M$. On a

$$qV = \frac{dM}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

On pose $\Gamma = \frac{dt}{d\tau}$ (Γ est le facteur de Lorentz) et $V = \left(\frac{dz}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ (V est la vitesse d'espace de M mesurée par O avec son temps propre t) : qV = Γ(1, V).
La quadriaccélération qA de M s'écrit :

$$qA = \frac{d^2 M}{d\tau^2} = \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}, \frac{d^2 x}{d\tau^2}, \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \frac{d^2 z}{d\tau^2}\right)$$

De la relation ⟨qV,qV⟩ = 1 on déduit ⟨qV,qA⟩ = 0 c'est à dire que le vecteur qA est orthogonal à qV, ce qui signifie que qA est un vecteur d'espace qui appartient à l'espace physique de M au temps τ. cet espace est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}^4$, supplémentaire orthogonale de la droitevectorielle de vecteur qV. On remarque immédiatement que le quadrivecteur non nul qA ne peut être constant puisque la ligne d'univers est nécessairement courbe. En deux points distincts de $\mathcal{L}_M$ les vecteurs qA ne sont pas parallèles. Donc pour définir une accélération uniforme de M nous ne pouvons qu'imposer que la norme de qA est constante : ⟨qA,qA⟩ = - a^2. Nous imposons pour la définition d'un mouvement uniformément accéléré l'hypothèse supplémentaire : la ligne d'univers $\mathcal{L}_M$ est plane dans un plan Π contenant le vecteur **t**. En particulier il n'y a pas de torsion.

A présent nous pouvons définir un repère η-otrhonormé lié à la particule M en prenant pour plan Π le plan (M, **t**, **i**). Posons W1 = $\frac{qA}{a}$ où a est la constante réelle positive définissant l'accélération uniforme, W2 = j et W3 = k sont des vecteurs constants. Le repère $\mathcal{R}_M$ = (M, qV, W1,W2,W3) définit le repère de la particule. Dans le repère $\mathcal{R}_{O_0}$ les données du mouvement uniformément accéléré sont :

$$O_0\, M(\tau) = (t(\tau),\ x(\tau),\ 0,\ 0)$$

$$qV = \Gamma(1, v, 0, 0);\ \ v = \frac{dx}{dt}; \qquad \Gamma^2 \left(1 - v^2\right) = 1$$

(1)

$$qA = \frac{d\Gamma}{d\tau}(1, v) + \Gamma(0, \frac{dv}{d\tau})$$

Finalisons le calcul de qA :

$$\frac{d\Gamma}{d\tau} = \Gamma\ \frac{d\Gamma}{dt} \text{ avec la dérivée de léquation (1) : } \Gamma\ \frac{d\Gamma}{dt}(1 - v^2) - \Gamma^2\, v\ \frac{dv}{dt} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{d\Gamma}{dt} = \Gamma^3\, v\ \frac{dv}{dt}$$

On en déduit : $\quad qA = \Gamma^4 \frac{dv}{dt}(v, 1, 0, 0) \quad$ et $\ \langle qA, qA\rangle = - a^2 \ \Rightarrow\ a = \Gamma^3\ \frac{dv}{dt}$

en remarquant que a et $\frac{dv}{dt}$ doivent être de même signe. On en déduit la valeur de la quadriaccélération et le premier vecteur d'espace W1 unitaire de l'espace physique de M :

$$qA = \ \Gamma a\ (v, 1, 0, 0)$$
$$W1 = \Gamma\ (v, 1, 0, 0)$$

Boost tangent le long de la ligne d'univers

Notons par B la matrice de passage entre les deux bases des deux repères $\mathcal{R}_{O_0}$ et $\mathcal{R}_M$,

$$B = \begin{pmatrix} \Gamma & v\,\Gamma & 0 & 0 \\ v\,\Gamma & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

B est manifestement une matrice de Lorentz, cest le boost tangent le long de la ligne d'univers de M. B est une fonction du temps propre τ.

<u>Remarque</u> : B provient des calculs du § précédent. En fait l'expression de B s'obtient directement à partir du vecteur
qV = Γ(1, v, 0, 0) et du vecteur normé orthogonal W1 = Γ(v, 1, 0, 0) qui ne nécessite pas les calculs précédents. Disons que B est bien le boost de la droite tangente de $\mathcal{L}_{M1}$ en M(τ), ligne d'univers d'un point M1 inertiel qui coïncide avec M(τ) et de quadrivitesse qV. B est alors le **boost tangent** en M(τ) de la ligne d'univers $\mathcal{L}_M$ au point M(τ) à un instant τ et bien sûr B est une fonction de τ. (voir figure)

Calculons la matrice de l'algèbre de Lie associée à B que l'on note Λ. Par définition on a :

$$\Lambda = B^{-1}\ \frac{dB}{d\tau} = \eta\ {}^{T}B\ \eta\ \frac{dB}{d\tau}$$

en remplaçant dans le calcul de Λ : $\frac{dv}{d\tau}$ par $\Gamma\ \frac{dv}{dt} = \frac{a}{\Gamma^2}$ et $\frac{d\Gamma}{d\tau}$ par $\Gamma\ \frac{d\Gamma}{dt} = a\, v\, \Gamma$ et en simplifiant avec la relation (1) on obtient l'expression remarquable de Λ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice Λ est constante et que la solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$\frac{dB}{d\tau} = B\,\Lambda$ est

$$B(\tau) = K\, e^{\tau\,\Lambda} = K \begin{pmatrix} \mathrm{Cosh}[a\,\tau] & \mathrm{Sinh}[a\,\tau] & 0 & 0 \\ \mathrm{Sinh}[a\,\tau] & \mathrm{Cosh}[a\,\tau] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice K est reliée aux conditions initiales. Pour $\tau = 0$ M(0) est en O et les deux repères $\mathcal{R}_{O_0}$ et $\mathcal{R}_{M(0)}$ coïncident K est alors la matrice unité.
On en déduit les équations paramétriques de la ligne d'univers :

$$\Gamma(\tau) = \frac{dt}{d\tau} = \mathrm{Cosh}(a\,\tau)$$
$$\Gamma(\tau)\,v(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = \mathrm{Sinh}(a\,\tau)$$

d'où $$M(\tau) = (t(\tau), x(\tau), 0, 0) = \left(\frac{1}{a}\,\mathrm{Sinh}(a\,\tau), \frac{1}{a}(\mathrm{Cosh}(a\,\tau) - 1), 0, 0\right)$$

car M(0) est en O_0

On a donc la propriété suivante les sous-goupes à un paramètre du groupe de Poincaré-Lorentz caractérisent les mouvements relativistes uniformément accélérés.

Rappelons à présent que la matrice Λ intervient dans la règle de dérivation d'un point ou d'un vecteur défini par ses composantes W dans le repère mobile $\mathcal{R}_M$ selon la formule :

$$\left(\frac{dW}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}_{O_0}} = \left(\frac{dW}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}_M} + \Lambda\, W \qquad (3)$$

comme premier exemple calculons la quadriaccélération qA en dérivant par rapport à τ la quadrivitesse de composantes W = (1, 0, 0, 0) dans $\mathcal{R}_M$. On obtient les composantes de qA dans $\mathcal{R}_M$ la dérivée relative étant nulle :
(0, a, 0, 0) et en multipliant à gauche par B (exprimé en (2)) on obtient qA par ses composantes dans $\mathcal{R}_{M(0)}$:

$$qA = B\,\frac{dW}{d\tau} = a\,\Gamma\,(v, 1, 0, 0).$$

Quadrivitesse et quadriaccélération d'un point N voisin de M, au repos par rapport à M

Soit maintenant un point N au repos dans $\mathcal{R}_M$ et de coordonnées dans $\mathcal{R}_M$ X = (0, x, 0, 0); x est une constante et N décrit une ligne d'univers paramétrée par τ. Notons par $W = \frac{dN}{d\tau}$ son vecteur tangent, son calcul s'obtient simplement en appliquant la règle de dérivation dans le repère mobile $\mathcal{R}_M$.

$$\frac{dN}{d\tau} = \frac{dON}{d\tau} = \frac{dOM + dMN}{d\tau} = qV + \frac{dMN}{d\tau}; \quad \text{avec} \quad \frac{dMN}{d\tau} = \Lambda\, X = (a\,x, 0, 0, 0)$$

d'où les composantes de W dans $\mathcal{R}_M$: (1 + ax, 0, 0, 0).
On remarque que τ n'est pas le temps propre de de la particule N car $\langle W, W\rangle = (1 + a\,x)^2$.
Le temps propre de N, noté s, est déterminé par la relation

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dN}{ds}, \frac{dN}{ds} \right\rangle &= 1 \\ &= \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 \left\langle \frac{dN}{d\tau}, \frac{dN}{d\tau} \right\rangle \\ &= \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 (1 + a\,x)^2\end{aligned}$$

On en déduit le facteur de Lorentz de N relativement à $\mathcal{R}_M$:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{1 + a\,x}$$

Remarque : dans ces calculs le facteur ax est en fait $\frac{a\,x}{c^2}$ (avec c =1) si bien qu'il est sans dimention. On voit que la synchronisation des horloges dans $\mathcal{R}_M$ n'est pas possible. On remarque aussi que la quadrivitesse de N est la même que celle de M.

Calculons la quadriaccélération de N :

$$\frac{d^2 N}{ds^2} = \frac{d\tau}{ds} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dN}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} \right) = \left(\frac{d\tau}{ds} \right)^2 \frac{d^2 N}{d\tau^2}$$

avec

$$\frac{d^2 N}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dN}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(qV + \frac{dMN}{d\tau} \right) = qA + \frac{d^2 MN}{d\tau^2}$$

$$\frac{d^2 MN}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} (\Lambda\, X) = \Lambda^2\, X = \left(0,\ a^2\,x,\ 0,\ 0\right)$$

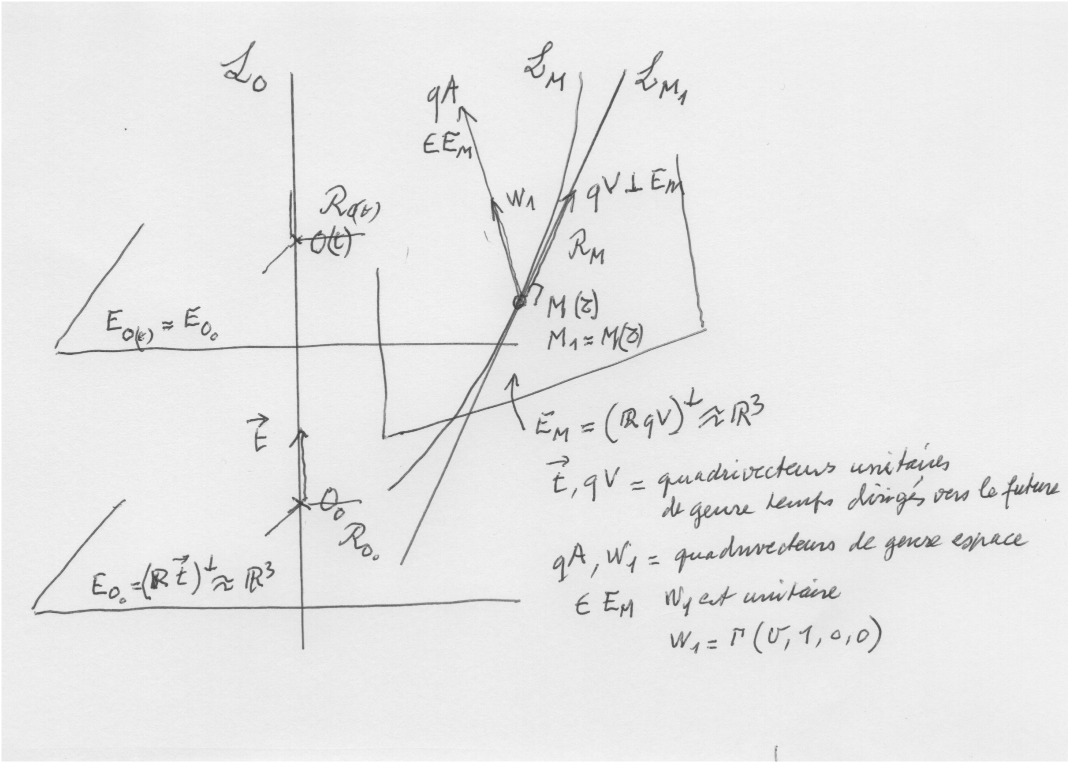
d'où la quadriaccélération de N par ses composantes dans $\mathcal{R}_M$

$$qA_N = \frac{d^2 N}{ds^2} = \frac{1}{(1+a\,x)^2} (0, a + a^2\,x, 0, 0) = \left(0, \frac{a}{1+a\,x}, 0, 0\right)$$

Ceci montre que N est uniformément accéléré avec pour valeur constante $a' = \frac{a}{1+a\,x}$

Nous proposons un calcul encore plus simple pour qA_N :
Dans $\mathcal{R}_M$ qV_N a pour composantes (1, 0, 0, 0)
donc

$$qA_N = \frac{d\,qV_N}{ds} = \frac{d\,qV_N}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{1 + a\,x} \frac{d\,qV_N}{d\tau} = \frac{1}{1 + a\,x}\, qA = \left(0, \frac{a}{1+a\,x}, 0, 0\right)$$


$\mathcal{L}_O$
$\mathcal{L}_M$
$\mathcal{L}_{M_1}$
qA
$\in E_M$
W_1
$qV \perp E_M$
$\mathcal{R}_{O(t)}$
$O(t)$
$\mathcal{R}_M$
$M(\tau)$
$M_1 = M(\tau)$
$E_{O(t)} \approx E_{O_0}$
$E_M = (\mathbb{R}qV)^\perp \approx \mathbb{R}^3$
$\vec{t}$
O_0
$\mathcal{R}_{O_0}$
$E_{O_0} = (\mathbb{R}\vec{t})^\perp \approx \mathbb{R}^3$
$\vec{t}, qV$ = quadrivecteurs unitaires de genre temps dirigés vers le futur
qA, W_1 = quadrivecteurs de genre espace
$\in E_M$ W_1 est unitaire
$W_1 = \Gamma(v, 1, 0, 0)$