Introduction au calcul stochastique

Séminaire Epiphymaths

Bruno Saussereau

Laboratoire de Mathématiques de Besançon.

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

MOTIVATIONS

Modèle de Langevin :

- $X(t)$ désigne la position d'une particule dans un liquide.
- La quantité de mouvement $m\dot{X}(t)$ est modifiée par deux types d'actions.
  - La première est la viscosité, opposée au déplacement et proportionnelle à la vitesse.
  - La seconde est celle des chocs multiples et fréquents avec d'autres particules.
- On écrira :

$$m\delta\dot{X} = -\alpha\dot{X}\delta t + \delta B \ .$$

HYPOTHÈSES DE MODÉLISATION SUR LE BRUIT

1. $\{B(t); t \geq 0\}$ est un processus homogène en temps : la loi de l'accroissement $B(t + \delta t) - B(t)$ peut dépendre de δt mais pas de t.
2. $\{B(t); t \geq 0\}$ est un processus à accroissements indépendants : les chocs reçus pendant l'intervalle de temps $[t, t + \delta t]$ ne dépendent pas de ceux reçus avant t.
3. $\{B(t); t \geq 0\}$ est à trajectoires continues : la quantité de mouvement δB due aux chocs est faible si l'amplitude δt de l'intervalle de temps est petite.

Les trois propriétés que nous venons d'énoncer constituent la définition d'un mouvement brownien.

POURQUOI LE CALCUL STOCHASTIQUE ?

$$m\delta \dot{X} = -\alpha \dot{X} \delta t + \sigma \delta B \, .$$

- Pour donner un sens à l'équation de Langevin (surtout si σ dépend du temps) :

$$mX_t = X_0 + \int_0^t -\alpha X_s ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s \, .$$

- Pour en trouver la ou les solutions
- Pour en étudier le comportement asymptotique
- Comment se comporte X lorsque $\alpha \to \infty$ et $\sigma / \alpha \to 1$?

Plan de l'exposé

Mouvement brownien

Définition 1 :
On appelle mouvement brownien un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles satisfaisant les propriétés

i) de continuité : $\mathbb{P}-$p.s. la fonction $s \mapsto B_s(\omega)$ est une fonction continue ;
ii) d'indépendance des accroissements : si $s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u\ ,\ u \leq s)$;
iii) de stationnarité des accroissements : si $s \leq t$, la loi de $B_t - B_s$ est identique à celle de B_{t-s}.

DÉFINITION 2 :

On appelle mouvement brownien (issu de 0) une famille $(B_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires telle que

I) $B_0 = 0$;

II) Pour tout $p \geq 1$, pour tout $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p$, les variables aléatoires $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_p} - B_{t_{p-1}}$ sont indépendantes, et pour tout $j = 1, ..., p$, $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $(t_j - t_{j-1})$;

III) Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

REMARQUE :

- La définition 1 permet de caractériser la loi de la variable aléatoire B_t (ce n'est pas immédiat).
- La définition 1 est plus historique. C'est seulement en 1900 qu'on a démontré qu'un processus vérifiant les propriétés de la définition 1 était alors gaussien.

LES TRAJECTOIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN

- Par définition, les trajectoires d'un mb sont continues.
- On peut démontrer en fait qu'elles sont $\alpha-$höldériennes pout tout $\alpha < 1/2$.

  Pour tout p et pour tout temps s et t, il existe une variable aléatoire $\xi_{s,t}$ et une constante C_p telle que

$$|B_t - B_s| \leq \times \xi_{s,t} \times \ |t-s|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}} \quad , \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\xi_{s,t}^p) \quad \leq C_p \times (t-s)^2 \ .$$

- Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire brownienne $t \mapsto B_t(\omega)$ est nulle part différentiable.
- Comment donner un sens à

$$\int_0^T f(t) dB_t \ ?$$

MÊME LES IDÉES SIMPLES POSENT DES PROBLÈMES !

Il n'existe pas de points $t \in \mathbb{R}^+$ tels que $\frac{dB_t}{dt}$ ait un sens. On ne peut donc pas définir l'intégrale $\int_0^t f(s)dB_s$ par une expression du type

$$\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^t f(s)\frac{dB_s}{ds}ds\ .$$

- La construction d'une intégrale stochastique sera abstraite
- On fera en sorte que l'intégrale pourra être vue comme un limite de somme de Riemann du type

$$\int_0^T f(s)dB_s = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^*)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

où $0 = t_0 < t_1 < .... < t_n = T$ est une subdivision de $[0, T]$ de pas $\delta = \sup_{i=1,\dots,n}(t_i - t_{i-1})$, et $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$.

Un calcul explicite

- En gardant en tête cette idée simple, un problème de taille surgit même pour une intégrale a-priori élémentaire comme $\int_0^t B_s dB_s$. On s'attend à trouver (penser à une intégrale de Stieltjes) $B_t^2/2$.
- $t_k = t \times k/n$ une subdivision de l'intervalle $[0,t]$.
- On considère les deux sommes de Riemann suivantes obtenues par différents choix de t_k^* :

$$I_n^1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

$$I_n^2(t) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \ .$$

Un calcul explicite (suite)

- $$I_n^2(t) - I_n^1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t/n}} \right)^2 = t \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Z_k \ ,$$
- On a :
  $$Z_k = \left(\frac{B_{t_{k+1}} - B_{t_k}}{\sqrt{t/n}} \right)^2$$
  définit une suite de v.a.i.i.d d'espérance commune 1.
- D'après la loi des grands nombres,
  $$I_n^2(t) - I_n^1(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} t \times \mathbb{E}(Z_0) = t \ .$$
- De plus il est facile de voir que
  $$I_n^1(t) + I_n^2(t) = B_t^2 \ .$$

- Finalement on obtient que

$$I_n^1(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}$$
$$I_n^2(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{B_t^2}{2} + \frac{t}{2} .$$

- Un autre calcul montre que si on choisit le milieu des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ on obtient

$$I_n^3(t) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{t_k+t_{k+1}}{2}} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{B_t^2}{2} .$$

- Ainsi les limites de somme de Riemann dépendent du choix de t_k^*, contrairement au cas déterministe !

On a donc différents choix pour définir une intégrale stochastique !

INTÉGRALES STOCHASTIQUES

- Les trois choix précédent conduisent à trois notions d'intégrales différentes :

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2} \qquad \text{Intégrale d'Itô}$$

$$\int_0^t B_s \circ dB_s = \frac{B_t^2}{2} \qquad \text{Intégrale de Stratonovitch}$$

$$\int_0^t B_s \overleftarrow{d} B_s = \frac{B_t^2}{2} + \frac{t}{2} \qquad \text{Intégrale d'Itô rétrograde (ou backward).}$$

- Ces trois intégrales ont leurs avantages et inconvénients.
  - L'intégrale de Stratonovitch permet de retrouver une forme de "calcul différentiel" standard.
  - L'intégrale d'Itô jouit d'une propriété importante et très chère aux probabilistes : l'intégrale obtenue sera une martingale (tout comme le mouvement Brownien) [1].

1. $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale si $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ pour $s \leq t$

PLAN DE L'EXPOSÉ

INTRODUCTION

MOUVEMENT BROWNIEN ET APPROCHE HEURISTIQUE D'UN CALCUL INTÉGRAL

INTÉGRATION STOCHASTIQUE

CALCUL D'ITÔ

RAPPELS

APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DE LANGEVIN

INTÉGRATION DES PROCESSUS SIMPLES

PROCESSUS ÉLÉMENTAIRES

On appelle processus élémentaire $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus de la forme

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}(t) \ ,$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$ et ϕ_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$−mesurable et bornée.

INTÉGRALE D'UN PROCESSUS SIMPLE

L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire $H = (H_t)_{0 \leq t \leq T}$ est définie par le processus continu $\big(I(H)_t\big)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1} \left(B_t - B_{t_k}\right), \text{ pour } t \in]t_k, t_{k+1}],\ k = 0, ..., p-1.$$

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE D'UN PROCESSUS SIMPLE

On note
$$\int_0^t H_s dB_s = I(H)_t \ .$$

- Continuité de $t \mapsto \int_0^t H_s dB_s$,
- $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale,
- Isométrie d'Itô : $\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$,

CAS DÉTERMINISTE : INTÉGRALE DE WIENER

Si $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ n'est pas aléatoire, $\int_0^t H_s dB_s$ est une v.a. gaussienne de loi
$$\mathcal{N}\left(0 \ ; \ \int_0^t H_s^2 ds\right) \ .$$

EXTENSION

PROCESSUS ADAPTÉS DE CARRÉ INTÉGRABLE

On définit la classe $\mathcal{H}$ des processus adaptés de carré intégrable par

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T} \ , \ \text{adapté à} \ (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T} \ , \ \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty \right\} .$$

INTÉGRALE DES PROCESSUS DE $\mathcal{H}$

Il existe une unique application linéaire J de $\mathcal{H}$ dans l'espace des $\mathcal{F}_t-$martingales continues définies sur $[0, T]$, telle que

1. SI $(H_t)_{t \leq T}$ est un processus élémentaire, pour tour $0 \leq t \leq T$ on a $J(H)_t = I(H)t \ \mathbb{P}-$p.s. .
2. Si $t \leq T$, $\mathbb{E}\left(J(H)_t^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$. Cette propriété est appelée isométrie d'Itô.

Pour $H \in \mathcal{H}$, on note $\int_0^t H_s dB_s = J(H)_t$.

INTÉGRALE DE WIENER

- Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $\int_0^t f(s) dB_s$ est bien définie.
- C'est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int_0^t f^2(s) ds$.
- $t \mapsto \int_0^t f(s) dB_s$ est continue.
- Si f est continue et dérivable,

$$\int_s^t f(r) dB_r = -\int_s^t f'(r) B_r dr + f(t) B_t - f(s) B_s \ .$$

- On ne sait toujours pas pourquoi

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2} \ ?$$

Plan de l'exposé

QUELQUES GÉNÉRALITÉS

- But : introduire un calcul "différentiel" sur des intégrales stochastiques.
- Formule d'Itô : analogue du développement de Taylor d'une fonction à l'ordre 1 avec un reste intégral
- Ici on développe des processus et le reste intégral se présente sous forme d'intégrale stochastique.

UN EXEMPLE

Le prolongement naïf du calcul différentiel est voué à l'échec.

- Supposons que l'on veuille "différencier" $t \mapsto B_t^2$ et l'exprimer en fonction de "dB_t".
- Pour une fonction $t \mapsto f(t)$ différentiable et nulle en 0 on a

$$f(t)^2 = 2\int_0^t f(s)f'(s)ds = 2\int_0^t f(s)df(s) \ .$$

- Dans le cas du mouvement brownien et de l'intégrale stochastique, on ne peut avoir une formule du même type :

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s \ .$$

- En effet : $\left(\int_0^t B_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale (car $\mathbb{E}\left(\int_0^t B_s^2 ds\right) < \infty$) nulle en 0.
- Si elle était égale à B_t^2, elle serait positive, et une martingale nulle en 0 ne peut être positive que si elle est nulle [2].

2. L'espérance d'une martingale est constante. Ici on aurait $\mathbb{E}(B_t^2) = \mathbb{E}(B_0^2) = 0$ et donc $B_t = 0$ ce qui est faux.

Formule d'Itô

- Soit $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \ ,$$

- f est une fonction deux fois continûment différentiable,
- on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d < X, X >_s$$

- où par définition

$$< X, X >_t = \int_0^t H_s^2 ds \ ,$$

et :

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s \ .$$

Un exemple

- Si $f(x) = x^2$ et $X_t = B_t$, on a $K_s = 0$ et $H_s = 1$, donc :
- $$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\, ds\ .$$
- On obtient :
$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s\ .$$
- Comme $\mathbb{E}\left(\int_0^t B_s^2 ds\right) < \infty$, c'est en fait le processus $\left(B_t^2 - t\right)_{t\geq 0}$ qui est une martingale.

Formule d'Itô sous forme Stratonovitch

Remarque :

- Si on écrit l'intégrale sous sa forme de Stratonovitch, on retrouve un calcul différentiel "standard" :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s \circ dB_s \ ,$$

- Pour f est une fonction trois fois continûment différentiable on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \circ dX_s \ .$$

Lien intégrale d'Itô et intégrale de Stratonovitch

Sous réserve d'existence des intégrales :

$$\int_0^t H_s \circ dB_s = \int_0^t H_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds \ .$$

PLAN DE L'EXPOSÉ

Quelques formules utiles

Intégrale de Wiener

- Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $\int_0^t f(s)dB_s$ est bien définie.
- C'est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int_0^t f^2(s)ds$.
- $t \mapsto \int_0^t f(s)dB_s$ est continue.
- Si f est continue et dérivable,

$$\int_s^t f(r)dB_r = -\int_s^t f'(r)B_r dr + f(t)B_t - f(s)B_s \,.$$

Formule d'intégration par parties

Si f et g sont deux fonctions régulières :

$$d(fg)(t) = f(t)dg(t) + g(t)df(t) \ .$$

Cas des processus d'Itô

- Pour deux processus du type :

$$\begin{aligned} df(t) &= b(t)dt + \sigma(t)dB_t \\ dg(t) &= \bar{b}(t)dt + \bar{\sigma}(t)dB_t, \end{aligned}$$

- on a la formule d'IPP :

$$\begin{aligned} d(fg)(t) &= f(t)dg(t) + g(t)df(t) + \sigma(t)\bar{\sigma}(t)dt \quad \text{avec} \\ f(t)dg(t) &= f(t)b(t)dt + f(t)\sigma(t)dB_t \\ g(t)df(t) &= g(t)\bar{b}(t)dt + g(t)\bar{\sigma}(t)dB_t \ . \end{aligned}$$

PLAN DE L'EXPOSÉ

ÉQUATIONS DE LANGEVIN

LES DONNÉES

- $t \mapsto x(t)$: position d'une particule brownienne au temps t
- sa vitesse $v = dx/dt$ satisfait l'équation de Langevin :

$$dv(t) = -\beta v(t)dt + \sigma dB_t$$

- β est une constante ayant la dimension d'une fréquence
- σ sera déterminée plus tard
- si m est la masse de la particule, formellement on a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\beta v + m\sigma\frac{dB_t}{dt}$$

- Loi de Newton $F = ma$ avec
  - une force de friction $F_0 = -m\beta v$ ($m\beta$ coefficient de friction)
  - une force de fluctuation $F_1 = m\sigma dB_t/dt$

Solution de l'Équation de Langevin

$$dv(t) = -\beta v(t)dt + \sigma dB_t$$

Avec $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$:

- $$v(t) = e^{-\beta t}v_0 + \sigma e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta s}dB_s$$
- $$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds$$

Vérification :

On utilise la formule d'intégration par parties.

LOI DE $v(t)$

- $$v(t) = e^{-\beta t} v_0 + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s$$
- $\int_0^t e^{\beta s} dB_s$ est une variable aléatoire de loi gaussienne
  - de moyenne (ou d'espérance) nulle
  - et de variance
    $$\int_0^t \left(e^{\beta s}\right)^2 ds = \frac{e^{-2\beta t} - 1}{2\beta}$$
- $v(t)$ sera aussi une gaussienne avec
  - une espérance vérifiant $\mathbb{E}(v(t)) = e^{-\beta t} v_0$
  - et une variance de $\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $v(t)$

- $v(t) = e^{-\beta t} v_0 + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s$ est de loi $\mathcal{N}\left(e^{-\beta t} v_0; \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})\right)$
- Pour toute vitesse initiale v_0, la loi limite est une gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma^2/2\beta$.
- D'après les lois de la mécanique statistique, l'énergie moyenne de la particule (en équilibre) doit être $\frac{1}{2}kT$ (k est la constante de Boltzmann et T est la temperature absolue)
- $$\frac{1}{2} m \frac{\sigma^2}{2\beta} = \frac{1}{2} kT$$
- On choisit
  $$\sigma^2 = 2\frac{\beta kT}{m} = 2\beta^2 D$$
  avec $D = kT/m\beta$ est le coefficient de diffusion dans les équations d'Einstein.

PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK

DÉFINITIONS

- Le processus

$$v(t) = e^{-\beta t} v_0 + \beta\sqrt{2D} e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s$$

  est le processus de vitesse d'Ornstein-Uhlenbeck de diffusion de coefficient D et temps de relaxation β^{-1}.
- Le processus de position correspondant $(x(t))_{t\geq 0}$ est appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck :
- $x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)ds$ est une variable aléatoire gaussienne
  - de moyenne $x_0 + \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} v_0$
  - et de variance $2Dt + \frac{D}{\beta}(-3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})$.

Comparaison avec la théorie d'Einstein

- D'après Einstein, la variance de la position est $2Dt$.
- Pour le processus d'O-U, la variance de la position est

$$2Dt + \frac{D}{\beta}(-3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})$$

- Si $\beta = 10^{-8}\,s$. et $t = 0,5\,s$. on fait une erreur sur la variance de l'ordre de 3.10^{-8}.
- La théorie d'Einstein est une bonne approximation de celle d'O-U pour une particule libre.

POURQUOI LA TRAJECTOIRE EST "BROWNIENNE" ?

On rappelle que la position de la particule au temps t est $x(t)$, variable aléatoire gaussienne

- de moyenne $x_0 + \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} v_0$
- et de variance $2Dt + \frac{D}{\beta}(-3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})$.

$\beta \to \infty$ ET D CONSTANT

- β et σ varient de telle sorte que $\beta \to \infty$ et $D = \sigma^2/2\beta^2$ reste constant.
- la moyenne de la position tend vers x_0
- la variance de la position tend vers $2Dt$
- On obtient un processus gaussien ayant même moyenne et variance que

$$\bar{x}(t) = x_0 + \sqrt{2D}B_t\ .$$

- $$x(t) \sim \bar{x}(t) \qquad \text{quand } \beta \to \infty \text{ avec } \sigma^2/2\beta^2 \text{ constant.}$$

On remarque que le processus de position qui permet d'obtenir un Wiener quand $\beta \to \infty$ provient du processus de vitesse d'O-U satisfaisant l'équation de Langevin suivante :

$$dv(t) = -\beta v(t)dt + \beta dB_t$$

Il en sera de même en présence d'un champs de force extérieur mais les équations deviennent plus difficiles à manipuler.

Références

Principalement le livre de Nelson disponible gratuitement sur sa page web.

Merci de votre attention