

## ETUDE ELEMENTAIRE DES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

(Serge CABALA )

Par une étude inédite, purement mathématique et très élémentaire, je montre :

Que les transformations de Lorentz sont interprétables dans un espace temps classique (euclidien),  
Qu'elles admettent des représentations mécaniques naturelles fondamentales,  
Qu'elles n'excluent pas d'autres transformations, telles celles de Galilée.

Que les vitesses plus grandes que  $c$ ,  $c$  vitesse limite d'utilisation des formules de Lorentz ,  
ne sont pas exclues par ces transformations,

Que le principe de relativité n'est pas conséquence de ces transformations.

### Début de l'étude.

Par simplification les formules ne sont étudiées ici que dans un espace à une dimension .

Soit  $S$  un axe  $Ox$  ,  $S_I$  un axe  $O_Ix_I$

$S_I$  est parallèle à  $S$  et  $S_I$  glisse sur  $Ox$  à la vitesse constante  $v$  ,  
 $v$  vérifiant  $-c < v < c$  ,  $c$  constante positive donnée.

Cela signifie que le mouvement de  $O_I$ , origine de  $S_I$ , est déterminé dans  $S$ , par l'équation  $x = vt + x_o$  .  
Par un choix adéquat de l'origine  $O$  de  $S$  , nous pouvons toujours avoir  $x_o=0$  .

Nous prendrons donc comme équation du mouvement de  $O_I$  par rapport à  $S$  , l'équation  $x = vt$

Si  $E$  est un événement de coordonnées  $(x,t)$  dans  $S$  , les coordonnées  $(x_I,t_I)$  de  $E$  dans  $S_I$  sont

par définition des transformation de Lorentz: 
$$x_I = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1) ; \quad t_I = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

Etant donné les deux systèmes  $S$  et  $S_I$ , on dit que l'on passe de  $S$  à  $S_I$  par les transformations de Lorentz de constante  $c$  .

Dans ce qui suit on pose:

$$b = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$b$  est une constante qui ne dépend que de  $v$  ,  $b$  vérifie :  $0 < b \leq 1$   
(  $c$  reste fixe )

### Autre expression de $t_1$

D'après (1) on a :  $x = vt + bx_1$ .

Remplaçons  $x$  par cette expression dans (2), nous obtenons :

$$t_1 = \frac{t - \frac{v(vt + bx_1)}{c^2}}{b} \quad \text{Soit} \quad t_1 = bt - \frac{v}{c^2} x_1$$

Cette dernière formule permet de nous rendre compte :

1°) Du ralentissement des horloges de  $S_1$  suivant le facteur multiplicatif  $b$ ,

2°) Du déphasage des horloges de  $S_1$  suivant le terme additif  $-\frac{v}{c^2} x_1$   
terme proportionnel à  $x_1$ .

De plus La formule  $x = vt + bx_1$  comparée à la formule de transformation galiléenne  $x = vt + x_1$ , permet de se rendre compte d'un raccourcissement des longueurs de  $S_1$  suivant la direction  $Ox$ , toujours suivant le facteur multiplicatif  $b$ .

Dans ce qui suit, je vais représenter les systèmes  $S$  et  $S_1$  en donnant à  $c$  et  $v$  des valeurs numériques assez faibles, valeurs qui permettent de faire des figures très explicites. Ces figures jamais vues, permettront de saisir pleinement la signification des formules de Lorentz.

### Représentation de $S$ et de $S_1$ dans le cas particulier où : $c = 2\sqrt{3}$ et $v = 3$

Avec ces valeurs, on obtient  $c^2 = 12$  et  $b = 1/2$ , ce qui donne pour  $x_1$  et  $t_1$  :

$$x_1 = 2x - 6t \quad ; \quad t_1 = 2t - \frac{1}{2}x$$

$$\text{Soit encore : } x_1 = 2x - 6t \quad ; \quad t_1 = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}x_1$$

L'unité de longueur dans  $S$  est prise égale à 2 centimètres. Ces différentes valeurs permettent de visualiser commodément les systèmes  $S$  et  $S_1$  à différentes dates  $t$  de  $S$ .  
(Voir les axes de la figure 1)

Les différents dessins de la figure 1 sont obtenus de la manière suivante.

Pour le dessin 1, on fait  $t=0$ , et on donne à  $x$  toutes les valeurs possibles dans les formules

$$x_1 = 2x - 6t \quad ; \quad t_1 = 2t - 1/2 x.$$

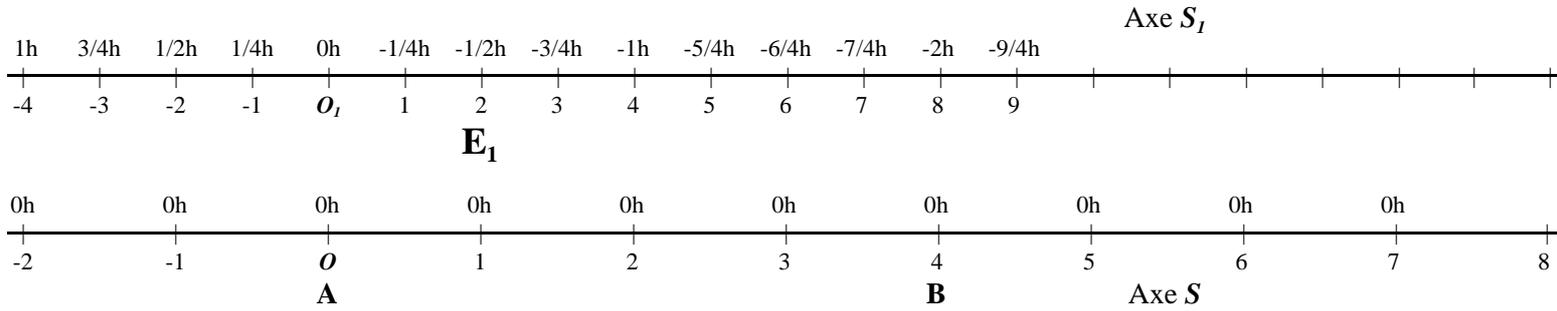
Avec  $t = 0$ , on a donc :  $x_1 = 2x$  et  $t_1 = -1/2 x$

Par exemple pour  $x = -1$ , on obtient :  $x_1 = -2$  et  $t_1 = 1/2$ .

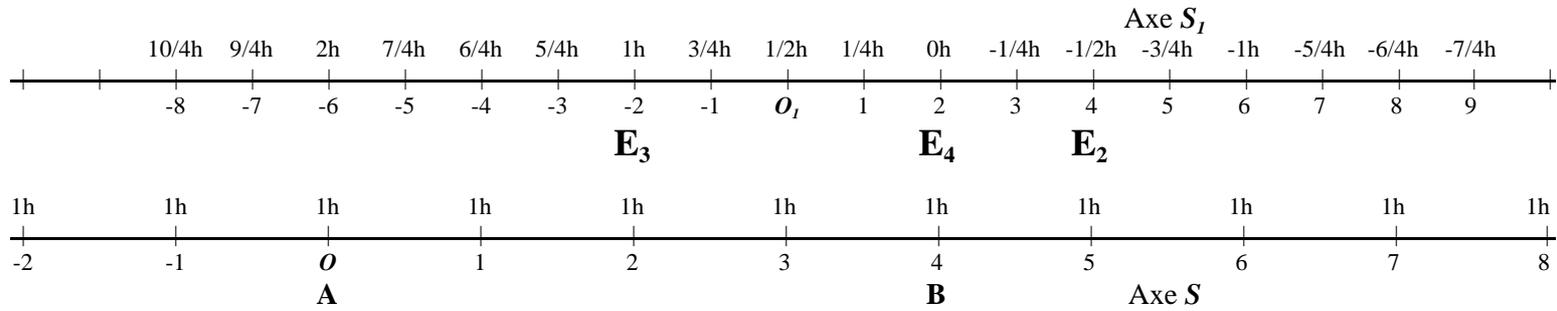
Cela signifie que le point de  $S_1$  en coïncidence avec le point de  $S$  d'abscisse  $-1$ , (à la date  $t = 0$  de  $S$ ) a pour abscisse  $x_1 = -2$ , et que l'horloge de  $S_1$  qui se trouve en ce point, indique  $+1/2$  (+1/2h pour signifier que le nombre lu est une date).

**Figure 1**

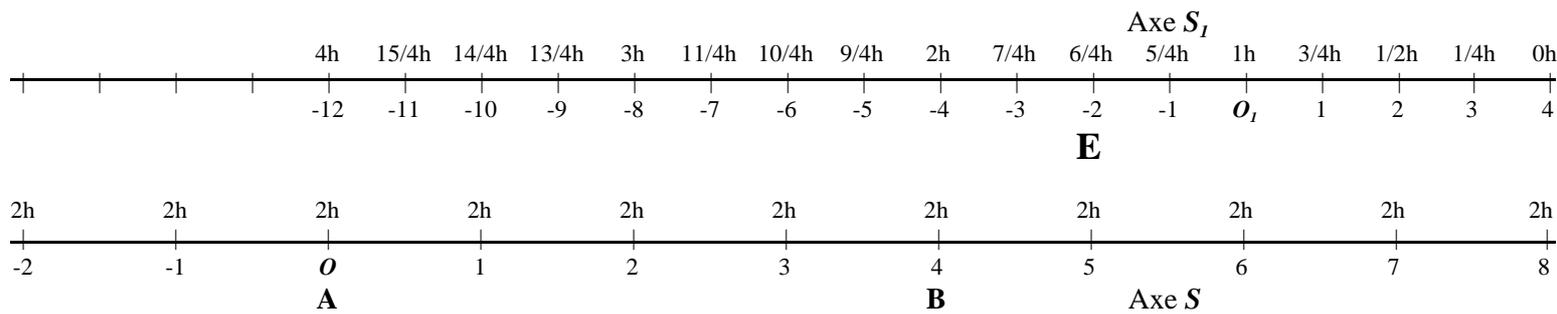
Dessin n°1 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 0$  de  $S$



Dessin n°2 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 1$  de  $S$



Dessin n°3 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 2$  de  $S$



La lettre h qui suit un nombre indique que ce nombre est une date (ou un temps si l'on préfère).

De même pour  $x = 1/2$  (toujours avec  $t = 0$ ), on obtient  $x_I = 1$  et  $t_I = -1/4$  ( $-1/4h$ ).  
 Le point de  $S_I$  en coïncidence avec le point de  $S$  d'abscisse  $+1/2$  (dans  $S$ ), a pour abscisse  $1$  (dans  $S_I$ ), et l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point, indique  $-1/4$  ( $-1/4h$ ).  
 On procède de même pour toutes les autres valeurs de  $x$ , toujours avec  $t = 0$ , ce qui donne le système  $S_I$  vu de  $S$  à la date  $t = 0$  de  $S$ . (Dessin 1 de la figure 1)

Pour obtenir le dessin 2, on prend  $t = 1$ , ce qui donne  $x_I = 2x - 6$  et  $t_I = 2 - 1/2 x$ , et on fait varier  $x$  comme précédemment, ce qui donne le système  $S_I$  vu de  $S$  à la date  $t = 1$  de  $S$ .

On procède de même pour obtenir le dessin 3 en prenant  $t = 2$  (dans  $S$ ), ce qui donne  $x_I = 2x - 12$  et  $t_I = 4 - 1/2 x$ .

Dans les dessins ne sont indiqués que les temps donnés par les horloges qui se trouvent aux abscisses entières des systèmes.

Les dessins de la figure 1 conduisent aux remarques suivantes:

1° Les unités de longueurs de  $S_I$  (dans la direction de la vitesse) sont constantes, et plus petites que les unités de longueurs de  $S$ . Dans le cas des dessins de la figure 1, l'unité de  $S_I$  (dans la direction de la vitesse) est la moitié de celle de  $S$ .

2° Dans  $S_I$ , en chaque point, nous devons disposer d'une horloge, horloge qui sert à dater les événements qui se déroulent en ce point de  $S_I$ .

Lorsque dans  $S_I$  se déroule un événement au point d'abscisse  $x_I$  de  $S_I$ , la date dans  $S_I$  de cet événement est donnée par l'horloge de  $S_I$  placée en  $x_I$ , et par celle là seulement. Ce qui est tout à fait comparable aux fuseaux horaires terrestre. Un événement qui se passe à Paris est daté par le fuseau horaire parisien, et non pas celui de Moscou.

Exemple: Sur le premier dessin,  $E_1$  représente un certain événement (explosion par exemple).

$E_1$  se déroule dans  $S$  au point d'abscisse  $x = 1$ , et l'horloge de  $S$  qui se trouve en ce point marque alors la date  $t = 0$ . Les coordonnées de cet événement dans  $S$  sont  $x = 1$  et  $t = 0$ .

Ce même événement se déroule dans  $S_I$  au point d'abscisse  $x_I = 2$  et à la date  $t_I = -1/2$ , date donnée par l'horloge de  $S_I$  qui se trouve au point d'abscisse  $x_I = 2$  de  $S_I$ . ( Voir figure 1);

3° Les événements simultanés dans un système ne le sont plus dans l'autre. Définissons d'abord ce que sont deux événements simultanés dans un système.

Deux événements (explosions par exemple) sont simultanés pour un système, si et seulement si les dates données par les deux horloges du système qui se trouvent aux endroits (aux coeurs) de ces événements, indiquent le même nombre (donnent la même date).

Exemple: L'événement  $E_1$  d'abscisse  $+2$  dans  $S_I$  et de date  $-1/2$  toujours dans  $S_I$  (événement indiqué

sur le premier dessin de la figure 1), et l'événement  $E_2$  d'abscisse  $+4$  dans  $S_I$  et de date  $-1/2$ , toujours dans  $S_I$  (événement marqué sur le deuxième dessin de la figure 1), sont simultanés par rapport à  $S_I$ .

On remarque que les coordonnées de  $E_1$  dans  $S$  sont  $x = 1$  et  $t = 0$ , et que les coordonnées de  $E_2$  dans  $S$  sont  $x = 5$  et  $t = 1$ .  $E_1$  et  $E_2$  ne sont pas simultanés dans  $S$ .

De même deux événements simultanés dans  $S$ , n'ayant pas même abscisse, ne sont pas simultanés dans  $S_I$ .

Exemple: Sur le dessin n° 2 de la figure 1, l'événement  $E_3$  a dans  $S$  pour coordonnées  $x = 2$  et  $t = 1$ . L'événement  $E_4$  a dans  $S$  pour coordonnées  $x = 4$  et  $t = 1$ .  $E_3$  et  $E_4$  sont donc simultanés dans  $S$ . Les coordonnées de  $E_3$  dans  $S_I$  sont  $x_I = -2$  et  $t_I = 1$ .

Les coordonnées de  $E_4$  dans  $S_I$  sont  $x_I = 2$  et  $t_I = 0$ .  
 $E_3$  et  $E_4$  ne sont pas simultanés dans  $S_I$ .

Plus simplement , en se référant aux fuseaux horaires de la terre , une explosion qui se produit à Paris à midi , heure donnée par le fuseau horaire parisien , et une autre explosion qui se produit à New-York à midi , heure donnée par le fuseau horaire de New-York , forment deux événements simultanés selon le système de fuseaux horaires terrestres. Par rapport à un autre système de mesure des temps, ces deux événements ne sont plus simultanés.

4° La mesure de la vitesse d'un point mobile par rapport à un système de référence (en mouvement) doit faire appel à une définition plus précise que celle communément admise, définition qui doit exclusivement reposer sur les abscisses et les horloges de ce système de référence.

Définissons donc ce qu'est la vitesse d'un mobile par rapport à un système de référence. La définition donnée l'est dans  $S_I$  , mais demeure valable dans tout autre système.

Soit un mobile  $M$  se déplaçant sur l'axe  $S_I$  .  $M$  passe au point d'abscisse  $x_I$  de  $S_I$  à la date  $t_I$  (date donnée par l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en  $x_I$  ).

Puis  $M$  passe au point d'abscisse  $x'_I$  de  $S_I$  à la date  $t'_I$  de  $S_I$  ( date donnée par l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en  $x'_I$  ).

La vitesse moyenne du mobile par rapport à  $S_I$  ,entre les points  $x_I$  et  $x'_I$  est :  $(x'_I - x_I)/(t'_I - t_I)$   
La limite de cette vitesse moyenne lorsque  $x'_I$  tend vers  $x_I$  ( ou lorsque  $t'_I$  tend vers  $t_I$  ) donne la vitesse exacte du mobile  $M$  au point  $x_I$  de  $S_I$  à la date  $t_I$  de  $S_I$  (  $t_I$  donné par l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en  $x_I$  ).

Exemple : Reprenons nos dessins, (voir figure 2) . Soit  $M$  un mobile se déplaçant le long de l'axe  $S_I$  , donc aussi le long de l'axe  $S$  . On suppose par simplification que la vitesse de  $M$  par rapport à l'axe immobile  $S$  est constante.

Sur le premier dessin de la figure 2,  $M$  se trouve en  $x_I = 8$  à la date  $t_I = -2$  de  $S_I$  (date donnée par l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point ).

Sur le second dessin de la figure 2 ,  $M$  se trouve en  $x'_I = 0$  à la date  $t'_I = 1/2$  (date donnée par l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point ).

La vitesse de  $M$  mesurée par rapport à  $S_I$  est :  $(x'_I - x_I)/(t'_I - t_I) = (0 - 8)/(1/2 - (-2)) = -3.2$  .

La vitesse de ce même mobile mesurée par rapport à  $S$  est  $-1$  .

Remarque : sur le troisième dessin de la figure 2 , les coordonnées de  $M$  par rapport à  $S_I$  sont

$$x''_I = -8 \quad \text{et} \quad t''_I = 3 .$$

Nous constatons que  $(x''_I - x'_I)/(t''_I - t'_I) = (x'_I - x_I)/(t'_I - t_I) = (x''_I - x_I)/(t''_I - t_I) = -3.2$

Ce qui permet de constater empiriquement que la vitesse de  $M$  par rapport à  $S_I$  est constante.

Si  $M$  se déplace par rapport à  $S$  à la vitesse  $c$  (ou  $-c$ ) , on peut constater expérimentalement sur les dessins que la vitesse de  $M$  par rapport à  $S_I$  reste égale à  $c$  (ou  $-c$ ) , à condition de faire les mesures comme dans le cas précédent. Je laisse au lecteur le soin de cette expérimentation éventuelle.

Je conseille de refaire les dessins des figures en prenant  $c = 5$  ,  $v = 4$  ce qui donne  $b = 3/5$  .

Les dessins , ainsi que la représentation de  $M$  qui se déplace à vitesse  $c$  , sont simples avec ces valeurs.

5° La mesure de la longueur d'un segment mobile par rapport à un système de référence (en mouvement) doit faire également appel à une définition beaucoup plus rigoureuse que celle donnée par l'intuition, définition qui doit de nouveau reposer exclusivement sur les abscisses et les horloges de ce système de référence.

La définition est la suivante: Soit  $AB$  un segment de droite parallèle à  $S_I$  , segment mobile ou immobile par rapport à  $S_I$  .

L'origine  $A$  de  $AB$  passe au point d'abscisse  $x_I$  de  $S_I$  et l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point  $x_I$  de  $S_I$  marque la date  $t_I$  .

Si l'extrémité **B** de **AB** passe en  $x'_I$  de  $S_I$  lorsque l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point  $x'_I$  de  $S_I$  marque la même date  $t_I$ , alors par définition, la mesure algébrique de segment **AB** est

$$x'_I - x_I$$

Ce nombre représente la différence d'abscisses des points de  $S_I$  d'où l'on voit simultanément par rapport à  $S_I$  les extrémités du segment **AB**.

Cette définition est valable dans tout système de référence.

Exemple : Soit le segment **AB** immobile par rapport à  $S$ .

**A** d'abscisse  $0$  dans  $S$ , **B** d'abscisse  $4$  dans  $S$  ( voir figure 1).

Sur le premier dessin de la figure 1, l'origine **A** de **AB** se trouve au point d'abscisse  $x_I = 0$  de  $S_I$ , et l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point marque la date  $t_I = 0$ .

Sur le second dessin de la figure 1, l'extrémité **B** de **AB** se trouve au point d'abscisse  $x'_I = 2$  de  $S_I$ , et l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point marque également la date  $0$ .

Donc dans  $S_I$ , à " l'instant "  $t_I = 0$  (de  $S_I$ ), l'origine **A** de **AB** est vue en  $x_I = 0$ , et l'extrémité **B** est vue en  $x'_I = 2$ . La mesure algébrique de **AB** par rapport à  $S_I$  est donc :

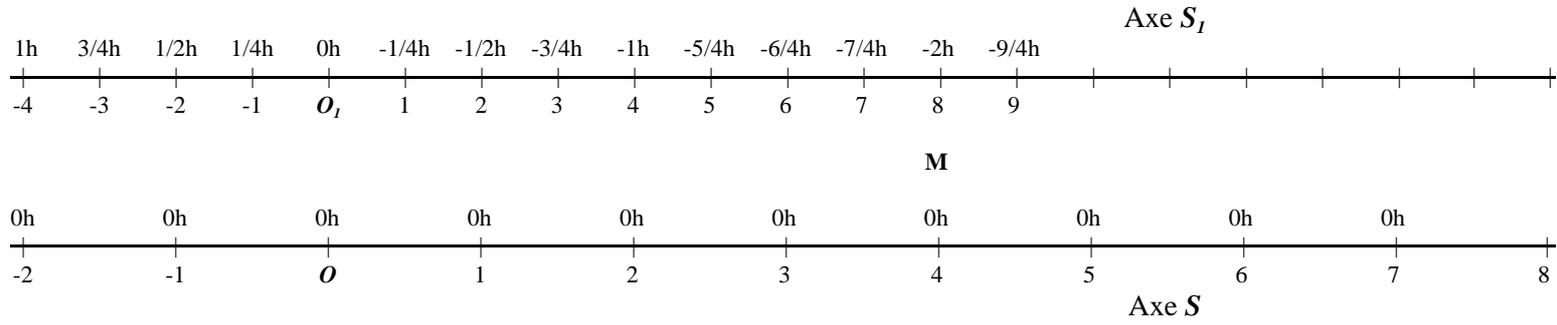
$$x'_I - x_I = 2 - 0 = 2.$$

Le segment **AB** a donc pour longueur  $2$  dans  $S_I$ . Un segment de longueur  $4$  de  $S$  est vu sous la longueur  $2$  dans  $S_I$ .

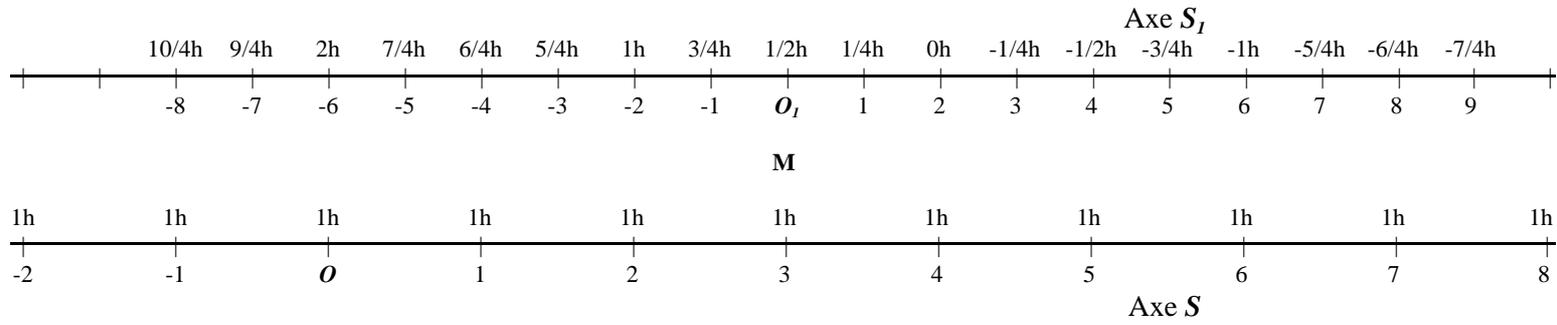
Nous voyons immédiatement grâce à nos dessins de la figure 1, qu'un segment de longueur  $4$ , pris sur  $S_I$  (et mesuré dans  $S_I$ ), a pour longueur  $2$  dans  $S$ .

**Figure 2**

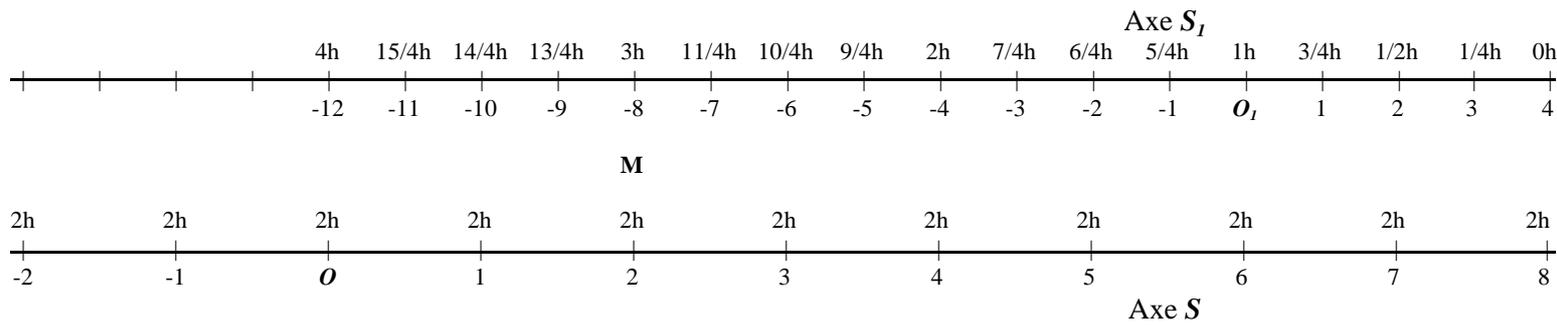
Dessin n°1 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 0$  de  $S$



Dessin n°2 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 1$  de  $S$



Dessin n°3 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 2$  de  $S$



La lettre h qui suit un nombre indique que ce nombre est une date (ou un temps si l'on préfère).

## Systèmes mécaniques obéissants aux transformations de Lorentz.

1° Système construit (d'apparence arbitraire) .

Soit un axe  $Ox$  immobile dans un espace-temps classique. L'axe est noté  $S$  .

Soit un axe  $O_1x_1$  noté  $S_1$  , parallèle à  $Ox$  et se déplaçant à la vitesse  $v = 3$  par rapport à  $Ox$  ( de façon classique ) .

De manière axiomatique nous prenons l'unité de longueur sur  $S_1$  égale à la moitié de celle de  $S$  , et en chaque point de  $S_1$  nous plaçons une horloge , horloges qui marchent toutes à une vitesse deux fois plus lente que celles de  $S$  , et qui sont déphasées les unes par rapport aux autres , déphasage qui vaut  $-1/4$  pour une différence d'abscisse de  $1$  sur  $S_1$  . De plus , l'horloge qui se trouve en  $O_1$  , origine de  $S_1$  marque  $\theta$  à la date  $t = \theta$  de  $S$  .

Plus rapidement , nous mesurons sur  $S_1$  les distances et les temps comme cela est indiqué sur les dessins de la figure 1 .

La manière de mesurer les temps dans  $S_1$  n'a rien de choquante , il suffit de penser aux fuseaux horaires terrestres .

Les événements qui se déroulent à Paris sont datés par les horloges parisiennes , tandis que ceux qui se déroulent à New York sont datés par les horloges de cette ville . Lorsque l'on dit qu'une explosion s'est produite à New York à midi , il est toujours sous-entendu que l'heure est donnée par l'horloge de cette ville . De même pour toute autre ville .

Revenons à nos systèmes . Soit  $E$  un événement (explosion par exemple) qui se produit au point d'abscisse  $x$  de  $S$  , à la date  $t$  de  $S$  .

$t$  est donné par l'horloge de  $S$  qui se trouve au point d'abscisse  $x$  de  $S$  , mais cela n'a pas d'importance , car  $S$  est un système classique dont toutes les horloges sont synchrones .

L'abscisse  $x_1$  mesurée dans  $S_1$  de ce événement , ainsi que la date  $t_1$  donnée par l'horloge de  $S_1$  qui se trouve au centre de cet événement  $E$  ( horloge au point d'abscisse  $x_1$  de  $S_1$  ) lorsqu'il se produit ,

sont donnés par :

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad t_1 = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\text{Avec } c = 2\sqrt{3} \quad \text{et } v = 3$$

On passe de  $S$  à  $S_1$  par les transformations de Lorentz , ce que l'on peut expérimenter avec différents événements sur les dessins de la figure 1 ou de la figure 2 .

On remarque que connaissant  $x_1$  et  $t_1$  , on retrouve  $x$  et  $t$  à l'aide des deux formules précédentes en remplaçant  $v$  par  $-v$  , c'est à dire que :

$$x = \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad t = \frac{t_1 + \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nous passons de  $S_1$  à  $S$  par les transformations de Lorentz de même constante  $c$ .

Nous avons donc deux systèmes matériellement construits et tels que l'on passe de l'un à l'autre par les transformations de Lorentz de même constante  $c$ .

La symétrie de ces transformations n'implique nullement que les systèmes  $S$  et  $S_1$  soient analogues du point de vue matériel. Dans nos dessins, les systèmes sont totalement dissemblables, et en les voyant, il ne viendrait à l'idée de personne de dire qu'ils sont équivalents, et pourtant, on passe de l'un à l'autre par les mêmes transformations.

Nous verrons plus loin que ces deux systèmes ne sont pas du tout équivalents pour la description de certains phénomènes, en particulier les mobiles qui se déplacent dans  $S$  à des vitesses plus grandes que  $c$ , conduisent à certains (pseudo) paradoxes dans  $S_1$ , paradoxes tout à fait équivalents à ceux obtenus sur la terre rapportée à ses fuseaux horaires. Un avion très rapide qui part de Paris à midi (heure parisienne) peut arriver à onze heures à New York (heure de New York), et jamais personne ne s'en offusque comme on le ferait en relativité.

## 2° Système mécanique naturel en mécanique classique.

On peut se poser la question de savoir s'il existe en mécanique classique des systèmes qui naturellement obéissent aux transformations de Lorentz,  $c$  étant une constante attachée aux systèmes. La réponse est oui, et il est même étonnant de voir qu'ils sont très courants.

Considérons une corde élastique (parfaite)  $Ox$ , rapportée au repère orthonormé  $Oxy$ . Toute onde transversale (de direction  $Oy$ ) sur la corde est définie par deux fonctions (quelconques)  $f$  et  $g$ .

A toute date  $t$ , le point d'abscisse  $x$  de la corde a pour ordonnée  $y = f(ct - x) + g(ct + x)$

$c$  étant une constante positive attachée aux caractéristiques mécaniques de la corde.  $c$  est tout simplement la vitesse des ondes (transversales) sur cette corde vibrante.

$y = f(ct - x)$  est une onde se propageant de gauche à droite à la vitesse  $c$ ,  $y = g(ct + x)$  est une onde se propageant de droite à gauche à la même vitesse sur cette même corde. La somme de ces deux ondes donne l'état de la corde vibrante à toute date  $t$ , c'est l'onde résultante.

Soient  $t'$  et  $x'$  les transformées de  $x$  et  $t$  par les transformations de Lorentz.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad \text{Comme auparavant, posons } b = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Calculons  $ct' - x'$  ainsi que  $ct' + x'$

$$\text{Nous trouvons que : } ct' - x' = \frac{1 + \frac{v}{c}}{b} (ct - x) \quad ; \quad ct' + x' = \frac{1 - \frac{v}{c}}{b} (ct + x)$$

$$\text{Posons : } k_1 = \frac{1 + \frac{v}{c}}{b} \quad ; \quad k_2 = \frac{1 - \frac{v}{c}}{b}$$

$k_1$  et  $k_2$  sont deux constantes qui ne dépendent ni de  $x$  ni de  $t$ , nous trouvons donc que

$$ct' - x' = k_1 (ct - x) \quad \text{et que} \quad ct' + x' = k_2 (ct + x)$$

Dans la perturbation transversale  $y = f(ct - x) + g(ct + x)$  de la corde vibrante, remplaçons  $x$  et  $t$  par  $x'$  et  $t'$ , nous obtenons :

$$y = f(ct' - x') + g(ct' + x') = f(k_1 (ct - x)) + g(k_2 (ct + x))$$

Ce qui donne une nouvelle perturbation ( qui est tout à fait possible) de notre corde vibrante.

Cette nouvelle perturbation est l'ancienne mise à vitesse  $v$  le long de l'axe  $Ox$ .  
C'est ce qui est observé sur le programme qui accompagne ce texte.

On peut constater que si M est un point immobile de la perturbation de départ, ce même point se déplace à vitesse  $v$  le long de l'axe dans la perturbation mise à vitesse  $v$ .

Exemple : la perturbation transversale de la corde, définie par  $y = f(ct - x) - f(ct + x)$  admet le point d'abscisse  $x = 0$  comme point immobile. Dans la perturbation mise à vitesse  $v$ ,  $y = f(ct' - x') - f(ct' + x') = f(k_1 (ct - x)) - f(k_2 (ct + x))$ , le point d'abscisse  $x = vt$  a toujours pour ordonnée  $y = 0$ , ce qui est facile à vérifier.

Les points "fixes" de la perturbation au "repos", sont convertis en points "fixes" à vitesse  $v$  dans la perturbation en mouvement.

Les questions que l'on se pose maintenant sont :

Que sont nos horloges sur la corde ?

Et que deviennent-elles lorsque la perturbation est mise à vitesse  $v$  ? .

Les mêmes questions se posent pour les unités.

Voici la réponse:

En chaque point de la corde, pour un système immobile, les temps sont tout simplement donnés par une perturbation périodique stationnaire de référence. L'unité de temps étant proportionnelle à la période vibratoire.

L'unité de longueur est définie par cette même perturbation de référence, l'unité prise étant proportionnelle à la distance de deux points fixes consécutifs.

Dans tout système mis à vitesse  $v$  le long de  $Ox$ , les références de temps et de longueurs sont données par la perturbation de référence mise à vitesse  $v$  le long de  $Ox$ , selon les transformations de Lorentz, comme cela est indiqué ci-dessus.

Précisons ceci sur un exemple, c'est l'exemple affiché lorsque l'on démarre le programme joint.

Pour un système immobile, prenons comme onde stationnaire de référence :

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{c}(ct - x)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{c}(ct + x)\right)$$

( On peut prendre  $c = 5$  pour être conforme à l'animation du programme ).

Les points d'abscisses  $x = n c$ ,  $n$  constante relative entière, sont les seuls points immobiles de cette onde de référence.

L'unité de mesure est la distance entre deux points immobiles consécutifs divisée par  $c$ .

En chaque point du système immobile se trouve une horloge, horloge qui augmente d'une unité chaque fois que l'onde traverse l'axe  $Ox$  sous ses pieds. (La période vibratoire de cette onde est  $T = 2$ , l'axe  $Ox$  est traversé par la corde toute les unité de temps )

Si nous mettons le système en mouvement à vitesse  $v$  le long de l'axe  $Ox$ , les temps et les distances dans le système en mouvement sont donnés par l'onde de référence mise à vitesse  $v$ , soit par l'onde :

$$y = \cos\left(k_1 \frac{\pi}{c}(ct - x)\right) - \cos\left(k_2 \frac{\pi}{c}(ct + x)\right)$$

(Les constantes  $k_1$  et  $k_2$  sont définies plus haut .)

Chaque horloge du système en mouvement, de nouveau, augmente d'une unité chaque fois que l'onde de référence à vitesse  $v$  traverse l'axe  $Ox$  sous ses pieds, et l'unité de longueur s'obtient encore en prenant la distance entre deux points "immobiles" consécutifs divisée par  $c$ , toujours sur l'onde de référence à vitesse  $v$ .

Les points "immobiles" se déplacent selon  $Ox$  à la vitesse  $v$ .

Les points "immobiles" sont les points d'abscisses  $x = vt + bnc$ ,  $n$  constante entière positive ou négative,  $b$  étant défini plus haut. On voit que les points fixes se sont rapprochés selon le facteur multiplicatif  $b$ .

Une observation attentive de l'animation du programme joint permet de comprendre parfaitement les explications ci-dessus.(Voir figures en fin de texte.)

Cette façon naturelle de mesurer temps et distances à l'aide d'une onde de référence, explique totalement les transformations de Lorentz sans sortir du cadre de la mécanique classique.

Complément : Si  $E_0$  représente l'énergie totale de l'onde au repos entre deux points fixes, énergie qui prend en compte l'énergie potentielle des forces exercées par l'onde sur les extrémités du système, nous trouvons que l'énergie totale  $E_v$  du système mis à vitesse  $v$  est  $E_v = E_0/b$

La démonstration sort du cadre de cette étude élémentaire.

Le système se comporte vis à vis de l'accélération comme une masse  $m = E_v / c^2$ .

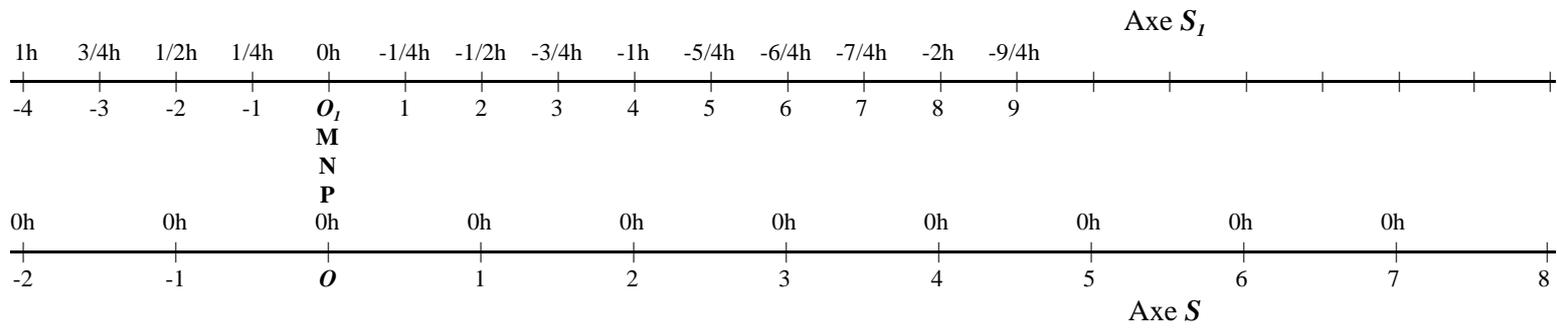
Les résultats obtenus sur une corde vibrante sont généralisés aux milieux élastiques de dimension trois.

### Etude expérimentale de mobiles qui se déplacent à vitesses plus grandes que $c$ dans $S$

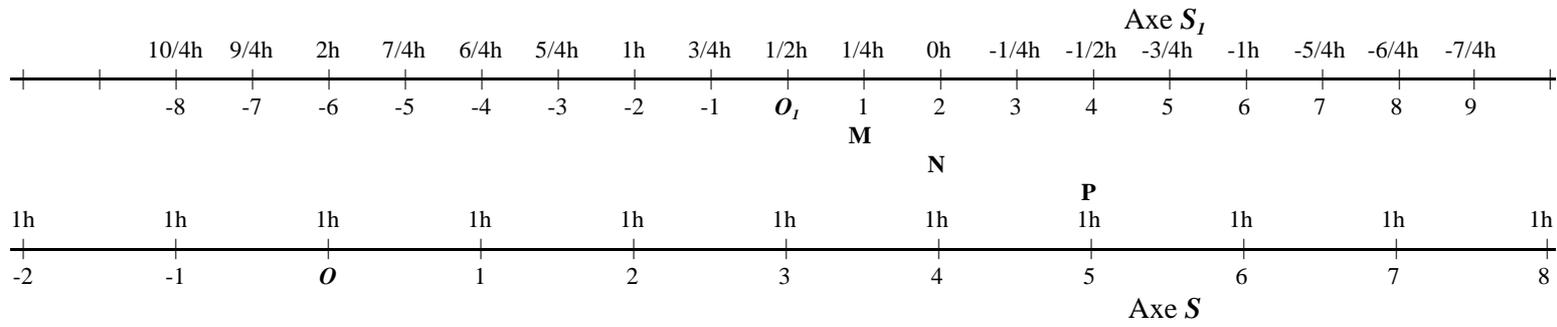
Cette petite étude n'a pour but que de souligner certains paradoxes qui prouvent que les systèmes  $S$  et  $S_I$  ne sont pas équivalents.  $S$  permet de décrire de façon cohérente le mouvement d'un mobile qui se déplace à une vitesse plus grande que  $c$ , la description de ce même mouvement dans  $S_I$  devient paradoxale (ou incohérente).

**Figure 3**

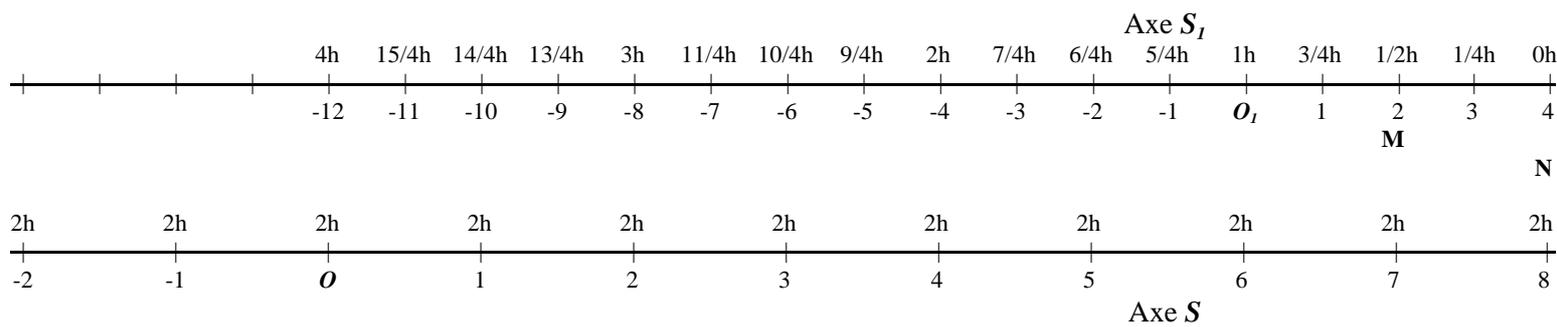
Dessin n°1 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 0$  de  $S$



Dessin n°2 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 1$  de  $S$



Dessin n°3 ,  $S$  et  $S_I$  vus à  $t = 2$  de  $S$



La lettre h qui suit un nombre indique que ce nombre est une date (ou un temps si l'on préfère).

Considérons les dessins de la figure 3.

$$\text{Avec toujours: } c = 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad v = 3$$

Soit **M** un mobile qui se déplace à la vitesse  $v = 3.5$  par rapport à  $S$ , son équation horaire dans  $S$  étant :

$$x = 3.5 t$$

A  $t = 0$  de  $S$ , **M** est en  $x = 0$  de  $S$ , il est perçu dans  $S_I$  au point d'abscisse  $x_I = 0$ , et l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point marque la date  $t_I = 0$ .

A la date  $t' = 2$  de  $S$ , **M** se trouve en  $x' = 7$ , il est alors perçu dans  $S_I$  au point d'abscisse  $x'_I = 2$ , et l'horloge de  $S_I$  qui se trouve en ce point marque la date  $t'_I = 1/2$ .

La vitesse de **M** mesurée par rapport à  $S_I$  est  $(x'_I - x_I)/(t'_I - t_I) = 2/0.5 = 4$ .

La mesure de la vitesse de **M** par rapport à  $S_I$  donne une valeur plus grande que celle obtenue dans  $S$ , vitesses toutes deux plus grandes que  $c$ . Ce résultat semble contraire au bon sens qui suggère pour vitesse de **M** dans  $S_I$  une valeur inférieure à celle obtenue dans  $S$  puisque **M** et  $S_I$  se déplacent dans le même sens.

Ce paradoxe est simplement du à la manière dont on mesure temps et distances dans  $S_I$ .

Soit maintenant **N** un autre mobile qui se déplace dans  $S$  à la vitesse  $4$ .

Dans  $S_I$ , les horloges qui coïncident avec **N** marquent toujours  $0$ . Le mobile **N** passe devant chaque horloge de  $S_I$  lorsque cette dernière marque  $0$ . (voir la figure 3)

**N** est donc selon  $S_I$  partout à la fois à la date  $0$ , la vitesse de **N** par rapport à  $S_I$  est infinie.  $S_I$  est donc un système de référence dans lequel il est impossible de décrire le mouvement de **N**. De ce point de vue,  $S$  et  $S_I$  ne peuvent pas être équivalents.

Considérons cette fois le mobile **P** de vitesse  $v = 5$  par rapport à  $S$ . L'équation de mouvement de **P** dans  $S$  est prise égale à  $x = 5 t$ .

Le mobile passe en **O** origine de  $S$  à la date  $t = 0$  de  $S$ , les coordonnées de **P** dans  $S_I$  sont alors  $x_I = 0$  et  $t_I = 0$ .

A  $t' = 1$  de  $S$  ce même mobile **P** se trouve au point d'abscisse  $x' = 5$ . Comme auparavant, en s'aidant de la figure 3, on trouve que les coordonnées de **P** dans  $S_I$  sont alors  $x'_I = 4$  et  $t'_I = -1/2$ .

Dans  $S_I$ , nous avons donc : heure de départ de **P** en  $O_I$ ,  $0$  h.

Heure d'arrivée de **P** en  $x'_I = 4$ ,  $-1/2$  h.

Dans  $S_I$ , le mobile arrive  $1/2$  h avant qu'il ne soit parti.

Présentons ceci autrement; dans  $S_I$ , un tireur tire une balle de  $O_I$  à la date  $t_I = 0$ , et à la vitesse  $v = 5$  par rapport à  $S$ .

Cette balle arrive en  $x'_I = 4$  de  $S_I$  à la date  $t'_I = -1/2$  h de  $S_I$ . La balle, selon les mesures de  $S_I$  arrive  $1/2$  h avant qu'elle ne soit partie. Dans  $S_I$ , pour certains phénomènes, l'effet précède la cause, ou plutôt semble précéder la cause.

Ce paradoxe est analogue à ceux créés par le décalage des fuseaux horaires terrestre.

Encore une fois,  $S_I$  est inapte à une description cohérente de certains phénomènes.

$S$  et  $S_I$  ne sont pas équivalents.

Ce fait permet d'ailleurs de déterminer qui de  $S$  ou de  $S_I$  est immobile. Le système immobile est celui dans lequel n'existe aucun paradoxe, c'est celui dans lequel l'effet ne précède jamais la cause.

Il est toujours possible de doubler  $S_I$  d'un système  $S'_I$  galiléen qui suit  $S_I$  (les horloges et les unités de  $S'_I$  sont celles de la mécanique classique, celles de  $S$ ). Dans  $S'_I$ , les paradoxes disparaissent.

L'existence simultanée de différents types de systèmes de référence n'est nullement contradictoire.

Un système de Lorentz (relativiste), peut toujours être doublé par un système galiléen, système dans lequel il est plus facile de raisonner.