PRINCIPES PROBLEMATIQUES
en
MATHEMATIQUES
CONSTRUCTIVES

traduction légèrement abrégée de

PROBLEMATIC PRINCIPLES
in
CONSTRUCTIVE MATHEMATICS

Michael J. BEESON

in : LOGIC COLLOQUIUM 1980,
eds D. van Dalen, D. Lascar, J. Smiley
North-Holland 1982

Introduction du traducteur

Nous présentons ici une traduction légèrement abrégée de l'article «PROBLEMATIC PRINCIPLES IN CONSTRUCTIVE MATHEMATICS» de Michael J. BEESON (paru dans LOGIC COLLOQUIUM 1980, eds D. van Dalen, D. Lascar, J. Smiley, North-Holland 1982).

Nous avons abrégé les parties les plus techniques, (certaines preuves sont omises notamment) et espérons que sous cette forme, l'article sera lisible par les non spécialistes de logique. Les notes techniques peuvent être sautées en première lecture. Dans le même but, nous avons inséré quelques encadrés et quelques notes du traducteur (les notes de bas de page sont toutes du traducteur, quelques unes donnent un avis personnel), pour expliquer les notations couramment utilisées par les logiciens.

La bibliographie date de 1980. Dans le livre de M. Beeson, «FOUNDATIONS OF CONSTRUCTIVE MATHEMATICS», (Springer-Verlag, 1985), on trouvera une bibliographie plus complète ainsi qu'un exposé systématique de la métamathématique des mathématiques constructives. Dans les notes, nous référons à ce livre par [Bee].

Nous faisons parfois référence au livre (cité comme [Kri]) : «LAMBDA-CALCUL, TYPES ET MODELES», de J.-L. Krivine, chez Masson (collection ERI, 1990).

Signalons aussi un remarquable petit livre où sont exposés avec une grande économie de moyens les principes sous-jacents aux trois principales écoles de mathématiques constructives : Bridges D., Richman F. : «VARIETIES OF CONSTRUCTIVE MATHEMATICS.» London Math. Soc. LNS 97. Cambridge University Press (1987).

Nous avons rappelé en fin de l'article quelques notations utilisées dans le texte, des abréviations pour les systèmes formels, et une liste des principes (problématiques ou non) utilisés par l'auteur dans l'article. Ceci peut faciliter la lecture de l'article qui fait souvent référence à ces principes dans leur notation abrégée.

Henri LOMBARDI

Nous examinons dans cet article diverses philosophies des mathématique constructives, en discutant les points où elles sont en accord ou en désaccord (surtout ces derniers). Des résultats métamathématiques variés sont utilisés pour clarifier les points en discussion.

Le plan général du texte est le suivant.

INTRODUCTION

Depuis les travaux de Brouwer dans les premières décades du siècle, il existe une philosophie cohérente des mathématiques qui peut être appelée "constructive".
Nous utiliserons ce mot pour décrire toute philosophie des mathématiques qui contient le *principe constructif de base* :

Quand un(e) mathématicien(ne) montre qu'un problème a une solution, il ou elle devrait pouvoir exhiber une solution explicitement (au moins en principe).

C'est ce point qui distingue les mathématiques constructives, des mathématiques classiques. Cependant ce principe ne détermine en aucune façon une philosophie des mathématiques. En fait, on peut distinguer au moins six écoles de pensées différentes en mathématiques constructives, et des différences d'opinion à l'intérieur de ces écoles.

En dépit de cette diversité de points de vue, il existe un corps de mathématiques étendu qui est acceptable par tous les constructivistes. Ceci a été rendu clair pour un grand nombre de gens par le livre de Bishop [13] et les mathématiques qui l'ont suivies. Le corps de mathématiques présent dans Bishop [13], Bridges [16] et des articles dans le même style forment ce que nous nommons NCM (nouvelles mathématiques constructives)[1]. Notez qu'il s'agit d'un corps de mathématiques et non d'une philosophie. Plusieurs logiciens ont proposé divers systèmes formels dans le but de formaliser NCM. Ces systèmes (y compris un de l'auteur) sont discutés et comparés dans Beeson [11], qui est un compagnon de cet article : dans cet article là sont traités les principes sur lesquels tout le monde est d'accord (ou presque), tandis que dans l'article ci-présent on étudie les principes controversés.

---

1 Aujourd'hui, on peut également citer les deux livres de référence :
Bishop E., Bridges D. : Constructive Analysis. (Springer-Verlag; 1985)
R. Mines, F. Richman, W. Ruitenburg : A Course in Constructive Algebra (Springer-Verlag; Universitext; 1988) .

Un coup d'oeil à la table des matières montrera que les principes ici considérés sont *informels*, c'est-à-dire peuvent être formulés sans utiliser aucun système formel[2]. Pour chacun des principes "problématiques" il y a un (ou plusieurs) points philosophiques en débat. Notre but est de formuler les questions en débat aussi précisément que possible. Cela prend souvent la forme de questions métamathématiques concernant certains systèmes formels, que nous discutons alors dans les "notes techniques" dans chaque paragraphe.
Nous avons tenté d'organiser le matériau de manière que les principales lignes de la discussion puissent être suivies sans familiarité avec les systèmes formels et les méthodes techniques.

Trois matières (thèmes) ont été consciemment évitées :

(i) les problèmes de relations entre mathématiques classiques et constructives : cet article discute les problèmes *à l'intérieur* des mathématiques constructives

(ii) résultats et problèmes concernant la force des différentes théories : ce sont des problèmes à propos des mathématiques constructives, et non internes à celles-ci

(iii) les problèmes concernant les définitions inductives et les ordinaux ; le principe de bar-induction lui-même n'a été qu'effleuré.

Je désire remercier les personnes suivantes pour les conversations stimulantes qui ont contribué à la rédaction de cet article, et pour leurs encouragements : P. Aczel, D. van Dalen, S. Feferman, N. Greenleaf, L. Gordeev, N. Goodman, R.Grayson, S. Hayashi, J. j. de Iongh, P. Martin-Löf, J. Myhill, F. Richman, A. Scedrov, H. Schwichtenberg, G. Sundholm, A. S. Troelstra, W. Veldman, et, last but not least, A. Visser.

2 La plupart des principes énoncés en langue naturelle sont néanmoins explicités en langage formalisé, de manière à pouvoir donner lieu à des métathéorèmes. Il faut garder cependant en tête qu'un même principe informel peut souvent être explicité par des énoncés formels non immédiatement équivalents.

1 - LE NOYAU COMMUN DES MATHEMATIQUES CONSTRUCTIVES

1.1 Les régles

Nous avons déjà mentionné le principe constructif de base :
quand on démontre $\exists y\ A(y)$, *on devrait pouvoir produire explicitement un* y *tel que* $A(y)$.
En particulier, si A contient un paramètre x , alors, quand on démontre $\forall x\ \exists y\ A(x,y)$, on doit montrer comment produire explicitement y à partir de x , au moyen d'une *règle* ou *loi.*

Ainsi un concept de *règle* est implicite dans le principe constructif de base. Peut-être "méthode" serait-il un mot plus adéquat que "règle" ou "loi" ici, et nous pouvons considérer au moins quatre interprétations différentes du concept :

(i) (la plus restrictive) : une *règle* est un algorithme, ou règle récursive. Ce point de vue réclame que tout objet mathématique puisse être donné explicitement sous une forme finie, codée par un nombre entier ou par un mot dans un alphabet

(ii) (moins restrictive) : une *règle* est une prescription définie pour un processus algorithmique pas-par-pas

(iii) (libérale) : les *méthodes* incluent les règles au sens ci-dessus mais aussi certaines "méthodes" utilisant comme instructions le résultat du hasard ou de la libre volonté (comme pour générer les suites infinies "i.p.s." de Brouwer [3]. Mais l'activité créative ne peut jouer de rôle dans la création de telles suites. Nous utiliserons la terminologie "i.p.s." pour désigner de telles suites (ainsi les i.p.s. comprennent les "choice sequences" mais aussi des suites générées au hasard)

(iv) dans la *théorie du sujet créatif* on admet en outre les suites générées par l'activité créative du mathématicien qui résoud les problèmes.

Ainsi dés le départ on voit apparaître certaines divergences de points de vue entre les différentes philosophies constructives. Cependant, comme Bishop l'a montré, ces divergences n'affectent pas le corps de mathématiques que nous nommons NCM[4] : les travaux dans le style NCM ne se compromettent avec aucun des quatre points de vue ci-dessus.

1.2 Ensembles et préensembles

Dans la terminologie courante de NCM, un ensemble X est considéré comme défini lorsque :

(i) on a dit ce qu'il faut faire pour construire un élément de X
(ii) on a dit ce qu'il faut faire pour prouver que 2 éléments de X sont égaux
(iii) on a prouvé que l'égalité dans X définie en (ii) est une relation d'équivalence

---

3 "i.p.s." est une abréviation pour infinite proceeding sequence, voir 2.4 pour plus de détails.

4 *rappel :* "NCM" : new constructive mathematics, nouvelles mathématiques constructives, dans le style Bishop

Si on a seulement (i), on dit que X est un *préensemble*. Du point de vue logique ou philosophique, on peut considérer un ensemble comme donné par un préensemble X et un préensemble $R \subset X^2$ qui donne la relation d'équivalence réclamée en (ii).

Cette définition d'"ensemble" est donnée par Bishop, mais n'est pas très différente de la notion d'*espèce* donnée par Brouwer, au moins si on refuse de construire des ensembles et espèces hors-de l'ordinaire (cf la discussion 7.5).
Avec une variation mineure, la définition de Bishop est acceptée également par Martin-Löf.

On peut assurer au moins qu'une certaine conception des "préensembles" est admise par tous les constructivistes.

1.3 Preuves constructives

Toutes les écoles constructivistes (sauf l'analyse récursive) rejettent la notion d'un concept à priori de vérité. C'est là-dessus qu'est fondé le "principe constructif de base" : car si $\exists x\, A(x)$ n'est pas *à priori* vrai ou faux, alors que peut bien signifier son affirmation sinon que nous sommes capables de trouver un x tel que $A(x)$?

Pour rendre les choses plus explicites, un deuxième principe constructif de base peut être donné (concernant les assertions ϕ ayant une signification) :

A-P **Affirmer c'est prouver** : $\phi \quad \Leftrightarrow \quad \exists p\, (\, p$ est une preuve de $\phi\,)$

Naturellement, les travaux de Gödel et Tarski montrent que nous ne pouvons pas nous limiter aux preuves admises dans un système formel[5] : nous devons parler de toutes les preuves constructives valides.
Il semble que toute philosophie constructive cohérente (hormis l'analyse récursive) tombe d'accord sur ce point et accepte l'idée de preuve constructive en tant que concept fondamental.
Cependant il est remarquable que les preuves constructives soient rarement explicitement *mentionnées* en mathématiques[6].
Ceci est dû en partie à A-P lui-même, qui nous permet d'éviter de mentionner les démonstrations.
Néanmoins il est facile de montrer que le concept de preuve est essentiel en mathématiques constructives, comme l'exemple suivant le clarifie :

1.3.1 Le préensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être construit comme suit

Pour donner un nombre réel, il faut donner :

---

5 Le théorème d'incomplétude de Gödel affirme que si un système formel cohérent est suffisamment puissant pour décrire (en un sens bien précis, mais assez faible) une partie minimale de l'arithmétique des entiers naturels, alors, ce système formel ne peut pas prouver l'énoncé «je suis un système formel cohérent», (énoncé qui possède une traduction dans le système formel). Donc, chaque fois qu'on essaie de fixer à l'intérieur d'un système formel les méthodes de preuves acceptables, on est sûr de manquer certains théorèmes, puisque le théorème «ceci est un système formel cohérent» ne peut pas être démontré à l'aide des principes codifiés à l'intérieur du système.

6 En mathématiques constructives, tout objet est supposé donné comme résultat d'une construction avec une preuve que la construction fait bien ce qu'on attend d'elle, mais, la plupart du temps, on parle de l'objet sans mentionner la preuve explicitement. Cela tient notamment au fait que deux objets fournis par la même construction mais avec deux preuves différentes sont toujours «égaux» dans l'ensemble construit. Ce point subtil est discuté dans 1.3.1 et certaines de ses conséquences dans 6.1 et 6.2.

(i) un règle x
(ii) une règle M
(iii) une preuve q que x est une suite de rationnels, que M est une suite d'entiers et que M est un témoin de Cauchy pour x, ce par quoi nous signifions :

$$\forall n \ \forall k,h \geq M_n \qquad | x_h - x_k | < 1/n$$

Il est absolument nécessaire d'inclure la démonstration q comme partie intégrante de la définition. Autrement je pourrais définir un nombre réel de la manière suivante :

– $x_n = 0$ pourvu que tout nombre pair $\leq 2n$ soit somme de deux nombres premiers
– x_n = nondéfini dans le cas contraire.

Je vous dis que x est un nombre réel. Je vous donne même le témoin de Cauchy adéquat par la régle $M_n = n$. Mais vous ne serez pas convaincu que x est un nombre réel si je ne vous donne pas aussi une démonstration de la conjecture de Goldbach[7]. Sans une telle preuve, je ne vous ai pas encore donné un nombre réel.

1.4 Logique

Tous les constructivistes sont d'accord sur le fait que certaines lois de logique classique ne sont pas valables constructivement. Outre cet accord "négatif" il y a également un accord "positif" concernant les lois du calcul des prédicats intuitionniste. Cet accord n'est pas fortuit, il repose sur un accord important concernant la *signification* des opérateurs logiques. Par exemple, tout le monde est d'accord qu'une preuve de (A et B) est un couple (r,s) où r est un preuve de A et s une preuve de B. Et tout le monde est d'accord qu'une preuve de $\exists x\ A(x)$ est un couple (q,x) où q est une preuve de $A(x)$. La disjonction et la négation sont également non problématiques, puisque qu'aussi bien philosophiquement que formellement, elles peuvent être considérées comme des opérations définies, données par :

$$\neg A :_{def} \qquad A \Rightarrow (0 = 1)$$
$$A \text{ ou } B :_{def} \qquad \exists n \in \mathbb{N} \ (((n = 0) \Rightarrow A) \text{ et } ((n \neq 0) \Rightarrow B))$$

Cependant, il n'y a pas d'accord global sur ce que signifient *exactement* l'implication et la quantification universelle.
En pratique cependant, il n'y a pas de difficultés de communication parce que tout le monde admet au moins ceci :

– si p prouve que $A \Rightarrow B$, alors nous pouvons "extraire" de p une opération h qui transforme toute preuve de A en une preuve de B :
$$\forall q \ (q \text{ prouve } A \Rightarrow h(q) \text{ prouve } B)$$
– si p prouve $\forall x\ A(x)$, alors nous pouvons "extraire" de p une opération h telle que : $\quad \forall x\ (h(x) \text{ prouve } A(x))$

Cela peut sembler un degré d'accord relativement faible pour un concept fondamental. Heureusement il y a une certaine "stabilité" dans le corps de mathématiques NCM, si bien que ce degré d'accord est suffisant pour permettre de démontrer un grand nombre de théorèmes. Par exemple, elles nous permettent de prouver diverses formes utiles de "l'axiome" du choix. (Cette terminologie malheureuse a pour origine le statut "nuageux" des principes formellement semblables en mathématiques classiques. (cf. discussion en 6.3)).

---

7 La conjecture de Goldbach affirme que tout nombre pair ≥ 4 est somme de 2 nombres premiers. Dans la phrase «tout nombre pair $\leq 2n$ est somme de nombres premiers» on sous-entend toujours « ≥ 4 ».

Notes :

(i) Dummet [20] établit une distinction entre *preuve canonique* et *démonstration*. Par exemple $10^{10}+1$ est ou bien premier ou bien composé : nous avons une démonstration (un argument convaincant) pour ce fait, mais nous n'avons pas une preuve de l'un des deux termes de la disjonction. Cependant notre démonstration nous fournit une méthode pour trouver une preuve canonique de la disjonction, qui fourni*rait* la preuve de l'un des termes. La discussion au dessus fait référence aux preuves canoniques. Cela s'accorde très bien avec la philosophie de Martin-Löf, dans laquelle tout ensemble, y compris l'ensemble des preuves d'une proposition, possède des éléments canoniques auxquelles les autres se réduisent.

(ii) Dans la discussion au dessus, on est resté vague sur le domaine du $\forall$. Des constructivistes acceptent $\forall x$ comme ayant une signification claire *seulement* si x est astreint à varier dans un préensemble W donné d'avance. Dans ce cas, il faudrait dire :

si q prouve $\forall x \in W \;\; A(x)$,
alors on peut "extraire" de q une opération h telle que :
$\forall x,p \;\; (\text{p prouve } x \in W \Rightarrow h(x,p) \text{ prouve } A(x))$

Dans "l'explication" le quantificateur est borné[8], puisque l'ensemble des preuves du fait que $x \in W$ est un préensemble légitime.

1.5 Ce sur quoi tout le monde est d'accord

Les entiers $\mathbb{N}$, l'opération successeur et le principe d'induction mathématique sont admis par tout constructiviste. (Ceux qui pensent ces concepts problématiques sont appelés finitistes : nous ne considérons pas leurs positions dans cet article).

A partir de $\mathbb{N}$, on construit les rationnels et les réels, et d'autres objets variés, tels que les espaces de fonctions continues, dont on se sert en mathématiques. Pour faire ce travail seulement les plus évidentes des propriétés des règles, preuves et ensembles sont utilisés.

Dans Beeson [11], un système formel S_0 est construit avec l'idée d'inclure uniquement les principes universellement acceptables dans un système naturellement adapté à la formalisation de NCM. Ce système est le dernier d'une série de systèmes introduits par Martin-Löf, Myhill, Feferman et Friedman. Ces systèmes sont discutés et comparés dans Beeson [11]. Quelque connaissance de ces systèmes sera requise dans les "notes techniques", mais la dépendance du texte à l'égard de cette connaissance devrait être minime.

Il est peut-être bon de souligner que "ce sur quoi tout le monde est d'accord" consiste en (i) un large corps de mathématiques NCM, et (ii) certains concepts fondamentaux vaguement formulés ; règle, preuve, ensemble.

Dès qu'on essaie de formuler plus précisément ces concepts, on commence à différencier entre les diverses philosophies des mathématiques constructives.

Notes :

(i) Le "mystère" apparent selon lequel une philosophie minimale produit un large corps de mathématiques NCM est "expliqué" (ou au moins bien codifié) dans le système formel S_0 de Beeson [11] : l'accord minimal formulé dans les axiomes de S_0 s'avère suffisant à formaliser NCM.

(ii) S_0 n'admet que la quantification bornée. C'est une sous théorie d'une théorie logiquement plus naturelle S qui admet la quantification non bornée. Ces deux théories

---

8 c.-à-d. : les variables quantifiées sont astreintes à "varier" dans un préensemble donné d'avance

contiennent des axiomes sur les nombres entiers, des axiomes (esquissés ci-dessus) sur les preuves, et quelques axiomes simples d'existence d'ensembles.
Sauf précision contraire, les minuscules latines désignent des entiers, les majuscules latines désignent des parties de $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers positifs ou nuls), les minuscules grecques des suites d'entiers.

Quelques notations couramment utilisées en logique

Nombres suites (ou nombres listes)
Si $[n_1,\ldots,n_k]$ est une liste (ou suite finie) d'entiers, on note $<n_1,\ldots,n_k>$ un nombre entier qui code la liste dans un codage injectif prédéfini une fois pour toutes. Par exemple, on peut écrire les n_i en base 3 (avec les seuls chiffres 0, 1 et 2), traduire les virgules par des chiffres 3 et considérer le nombre obtenu en base 4 avec l'écriture : " $,n_1,\ldots,n_k$ ". Par exemple $[0,1,7,3]$ est codé par le nombre $<0,1,7,3>$ dont l'écriture en base 4 est 3031321310.
Le codage particulier choisi n'a aucune importance du moment qu'il est parfaitement explicite.
On appelle *nombre suite ou nombre liste* tout nombre entier qui code une suite finie d'entiers dans le codage prédéfini.
En particulier, $<>$ désigne le code de la liste vide, et si n et m sont deux entiers, le nombre $<n,m>$ code le couple (n,m).
Si s et t sont des nombres listes, qui codent des listes $[n_1,\ldots,n_k]$ et $[m_1,\ldots,m_h]$ on note $s * t$ le code de la liste concaténée $[n_1,\ldots,n_k,m_1,\ldots,m_h]$, c.-à-d. :

$$<n_1,\ldots,n_k> * <m_1,\ldots,m_h> = <n_1,\ldots,n_k,m_1,\ldots,m_h>$$

Le codage des listes d'entiers dans les entiers est une astuce technique qui permet de traduire les propriétés concernant les suites finies d'entiers en propriétés concernant les entiers.
Cette astuce technique est néanmoins fondamentale. La preuve du théorème d'incomplétude de Gödel en fait un usage essentiel. Elle permet en effet de coder par un entier naturel non seulement une liste d'entiers naturels, mais, comme conséquence facile, une écriture formelle arbitraire (ceci a pris le nom de «numérotation de Gödel»).
Ce codage traduit le fait que, du point de vue structurel, l'ensemble des listes d'entiers est le même que l'ensemble des entiers (il n'est ni plus ni moins compliqué). D'autre part, cela constitue également un inconvénient parce que les énoncés concernant les listes d'entiers deviennent parfois «inutilement» plus compliqués à lire.
Lorsque le contexte est clair, nous écrivons $s \subset t$ pour dire que s et t sont des nombres suites et que s est un "segment initial de t " (en tant que suites finies, t prolonge s).

Segment initial d'une suite infinie d'entiers
Si α est une suite d'entiers, on notera $\overline{\alpha}(n)$ le nombre entier qui code la liste (ou suite finie) $[\alpha(0),...,\alpha(n-1)]$ dans le codage prédéfini.
Lorsqu'on ne fait «aucune hypothèse» sur une liste d'entiers α les seules informations disponibles en temps fini sur α sont contenues dans les $\overline{\alpha}(n)$. Par exemple, il est a priori impossible de savoir par un procédé algorithmique si la suite est nulle à partir d'un certain rang ou non.

Codage du résultat d'un calcul mécanique (notation de Kleene)
On suppose par exemple qu'on a codé par des entiers les textes de programmes Pascal avec toutes ses variables dans $\mathbb{N}$, ayant exactement une entrée et une sortie, et utilisant uniquement un petit nombre de fonctions et relations prédéfinies (par exemple 0 , 1 , $x + y$, $x \times y$, $x < y$, $x = y$).
Si e et n sont des entiers, on note alors $\{e\}(n)$ le résultat du calcul mécanique codé par e lorsque l'entrée est prise égale à n . (Si e n'est pas un code de programme écrit conformément à la syntaxe, on décide que $\{e\}(n) = 0$). Précisément, le résultat de l'exécution du programme codé e lorsque l'entrée est n est :
- la sortie, c.-à-d. un entier m , si le programme aboutit à Stop,
- sinon le résultat est «non défini». (cette notation est due à S. C. Kleene)

Si $\phi(e,n,p)$ désigne :
- 0 lorsque le programme de numéro e n'a pas abouti en p étapes pour l'entrée n
- $1+m$ lorsque le programme de numéro e a abouti en p étapes pour l'entrée n et a fourni la valeur m

alors $\{e\}(n) = k$ peut être considéré comme une abréviation pour $\exists p\ \phi(e,n,p) = 1+ k$
Remarque : ϕ est une fonction parfaitement explicite qui peut être construite par composition et récurrence simple à partitr de fonctions élémentaires (on dit dans ce cas que la fonction est **primitive récursive**).

2 - QUELQUES PHILOSOPHIES DIFFERENTES DES MATHEMATIQUES CONSTRUCTIVES

2.1 Le constructivisme russe

Cette école fut fondée par Markov et est aujourd'hui poursuivie par Sanin. Selon ce point de vue, tout objet mathématique doit être explicitement donné par une expression linguistique (une description) dans un alphabet fixé. Ces objets sont manipulés au moyen d'algorithmes de Markov (semifonctions récursives[9]). Il s'agit de l'ontologie constructive la plus stricte possible. Cependant la *logique* invoquée par Markov inclut le principe qui porte son nom :

MP Principe de Markov : pour x réel $\quad \neg\,(x \leq 0) \;\Rightarrow\; x > 0$

Le principe peut être formulé de manière équivalent comme suit (où n est entier naturel et A une propriété arbitraire concernant les entiers naturels) :

$$[\,\forall n\ (A(n) \text{ ou } \neg A(n)) \text{ et } \neg\forall n \neg A(n)\,] \;\Rightarrow\; \exists n\ A(n)$$

L'école russe est l'unique qui accepte ce principe.

Notes :

Certains des constructivistes russes modernes acceptent non seulement la thèse de Church (toute règle est récursive) mais également une version étendue de celle-ci, le principe ECT_0([10]) de Troelstra [48], qui démontre que toute formule d'arithmétique est équivalente à son interprétation par réalisabilité([11]). Sous le principe de Markov, l'affirmation " u réalise A " (écrite u r A) est équivalente à sa double négation. En étendant ces idées aux ensembles nous pourrions penser informellement que seuls seraient légitimes les ensembles vérifiant :

$$n \in X \Leftrightarrow \exists z\,(z \text{ r } (n \in X))$$

En prenant pour Y l'ensemble $\{ <z,n> \ : \neg(z \text{ r } (n \in X)) \}$[12] on obtient une motivation pour le principe suivant connu comme principe de Sanin :

SP Principe de Sanin $\quad \forall X\ \exists Y\ \forall n\ \ (n \in X \Leftrightarrow \exists z\ <z,n> \notin Y)$

---

9 Une semifonction récursive (on dit encore: fonction récursive partielle) accepte comme argument un mot écrit sur un alphabet fini fixé, et elle calcule un objet de même nature (si le calcul aboutit, sinon la semifonction ne prend pas de valeur définie). Le calcul est purement mécanique. Les différentes notions de calcul purement mécanique qui ont été élaborées ont toutes abouti à la même classe de fonctions, les semifonctions récursives. La version la plus populaire de la Thèse de Church est que toute fonction mécaniquement calculable est une semifonction récursive (c.-à-d. peut être mécaniquement calculée au moyen des outils déjà répertoriés). Bien que cette thèse ne soit pas démontrable, elle bénéficie d'un agrément quasiment universel chez les mathématiciens. La Thèse de Church de l'école constructiviste russe affirme beaucoup plus, à savoir : toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est une semifonction récursive. Voir le § 3 pour une discussion détaillée.

10 La Thèse de Church sera elle-même discutée dans le prochain chapitre. Nous donnons un énoncé de ECT_0 dans la liste des principes donnés à la fin du texte.

11 Voir l'encadré suivant

12 Rappel : $<z,n>$ est un entier codant le couple (z,n)

La réalisabilité est un outil de mathématiques récursives classiques inventé par Kleene en vue d'interpréter dans un cadre classique la logique intuitionniste. Considérons une théorie formelle intuitionniste du premier ordre pour une structure mathématique telle que $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1, >, \ldots)$ où le domaine est dénombrable, les fonctions sont explicites et les prédicats sont décidables. On suppose sans restriction de généralité que les éléments de la structure sont les entiers naturels. Si A est une formule bien formée du langage, on définit « e réalise A » (où e est un entier naturel) par induction sur la profondeur de A comme suit :

– lorsque A est une formule atomique close (sans variable) :	e réalise A si et seulement si A est vrai
– e réalise A ou B si et seulement si :	$e = \langle 1,f\rangle$ et f réalise A ou $e = \langle 2,g\rangle$ et g réalise B
– e réalise A et B si et seulement si :	$e = \langle f,g\rangle$, f réalise A et g réalise B
– e réalise $A \Rightarrow B$ si et seulement si :	pour tout f qui réalise A, $\{e\}(f)$ est défini et réalise B
– e réalise $\exists x\ A(x)$ si et seulement si :	$e = \langle n,f\rangle$ et f réalise $A(n)$
– e réalise $\forall x\ A(x)$ si et seulement si :	pour tout n, $\{e\}(n)$ est défini et réalise $A(n)$

2.2 Le constructivisme de Bishop

Le point de vue ontologique de Bishop est que les objets mathématiques (et les mathématiques en général) sont *objectifs*. Il rejette toute conception solipsiste. Il n'est cependant pas strict au point d'insister sur le fait que tout objet mathématique devrait être donné par une description linguistique fixée, comme le fait l'école russe.
Il reconnait que la plupart des opérations se réduisent à des opérations "ayant une signification numérique", mais il laisse explicitement ouverte la possibilité de traiter d'objets plus abstraits (cf. [14]). Aussi n'introduit-il aucune limitation du genre que toutes les règles ou opérations devraient être récursives. En même temps il n'introduit aucune méthode non récursive telle que les suites i.p.s.. Ces points de vue relativement peu compromettants sont partagés par beaucoup de ses successeurs. Puisque ces mathématiciens font le minimum d'hypothèses ontologiques, leur travail peut être intégré dans n'importe laquelle des philosophies des mathématiques constructives.

En contraste avec cette ontologie "minimum", Bishop a fait au moins une tentative de s'engager plus avant sur la question de la signification des opérations logiques dans [14]. Il invoque l'interprétation de Gödel (Dialectica)[13] pour les opérations logiques comme décrivant ce qu'il pense être la signification recherchée, ou du moins la signification numérique, adaptée à l'utilisation mathématique. Dans son opinion que l'interprétation de Gödel est la signification recherchée, Bishop a trouvé peu de successeurs ; mais sa motivation est assez claire : l'interprétation de Gödel fournit au moins *une* manière d'assigner une "signification numérique" à chaque assertion. Le fait d'avoir trouvé une méthode systématique pour le faire semblait important pour soutenir l'opinion philosophique que chaque affirmation devait avoir une signification numérique (ou, peut-être mieux, une "signification calculatoire").

---

13 On trouve un exposé de l'interprétation «Dialectica» de Gödel dans le Mathematical Logic de Schoenfield.

2.3 L'analyse récursive

Elle est similaire au constructivisme russe mais légèrement différente. Il en existe actuellement deux versions.

L'une utilise uniquement la logique intuitionniste: c'est donc essentiellement le constructivisme russe sans le principe de Markov.

L'autre utilise la logique classique. Elle mérite néanmoins d'être considérée comme une théorie constructive, en ce que le principe constructif de base est reflété comme suit :

> Avant de prouver un théorème A, il faut d'abord l'exprimer sous une forme A', classiquement équivalente à A, mais dans laquelle les combinaisons de quantificateurs $\forall x \exists y$ sont remplacées par des fonctions récursives donnant y en fonction de x ([14]). Dans chaque cas particulier A' est formulé en accord avec l'idée qu'on a de ce qui est mathématiquement significatif. Ainsi dans certains cas ce ne sont pas tous les quantificateurs qui sont "récursivisés", et A' peut n'être pas unique.

Certains philosophes peuvent classer cette théorie comme analyse de la constructibilité à l'intérieur des mathématiques classiques, et non comme théorie constructive.

Notes techniques :
Du point de vue des conséquences mathématiques, l'analyse récursive est très proche de l'école de Markov. Supposons, par exemple en arithmétique que nous prenons pour A' la formule :

$\exists e\ (e \mathrel{r} A)$ où r est la réalisabilité de Kleene.

L'arithmétique classique prouve $\overline{e} \mathrel{r} A$ pour un certain nombre $\overline{e}$ si et seulement si A est un théorème de HA[15] $+ ECT_0 + MP$ (cf. [48]). Ainsi il est difficile de pointer une différence concrète *quant au contenu mathématique* entre l'analyse récursive et l'école de Markov, quoique leurs *philosophies* aient des racines fort différentes.

2.4 L'intuitionnisme objectif

La philosophie des mathématiques de Brouwer était plus complexe que toutes celles précédemment mentionnées. Tout d'abord Brouwer n'a pas reculé devant le point de vue *subjectiviste* en mathématiques ; il l'a adopté entièrement. Cependant certaines conséquences de sa philosophie semblent à l'auteur avoir une base plus large et ne pas dépendre de manière essentielle du subjectivisme. On peut alors adopter l'attitude que les mathématiques sont essentiellement objectives, et accepter cependant la plupart des conclusions les plus hardies de Brouwer sur la nature du continu. Nous nous référons à ce point de vue sous le vocable "intuitionnisme objectif".

La partie des vues de Brouwer que nous examinons dans ce cadre est celle qui semble avoir été motivée par son intuition sur la nature du continu (géométrique). Il semble penser que les réels "définis par une loi" (ceux définis en 1.1 (ii)) ne sont pas suffisants pour rendre

---

14 Les alternances de quantificateurs $\forall x \exists y$ sont ainsi remplacés par des alternances $\exists f \forall x$, de sorte que la formule A' a une forme logique simplifiée (les existences de fonctions f peuvent toutes être ramenées en tête de la formule) avec le prix à payer que les variables quantifiées sont d'un type plus compliqué que précédemment. La formule A' n'est classiquement équivalence à A que si l'on n'exige pas que les fonctions f soient récursives.

15 HA : arithmétique de Heyting, système formel utilisant la logique constructive formalisée par Heyting et décrivant les entiers naturels. Pour plus de détail, voir la liste des abréviations en fin du texte.

compte des propriétés de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (section 3.1. ci-dessous : voir les notes techniques et les résultats concernant la thèse de Church qui peuvent être interprétés comme appuyant ce point de vue). Il introduisit donc le concept de "suite en procès infinie" "i.p.s." (plus tard "suite de choix").

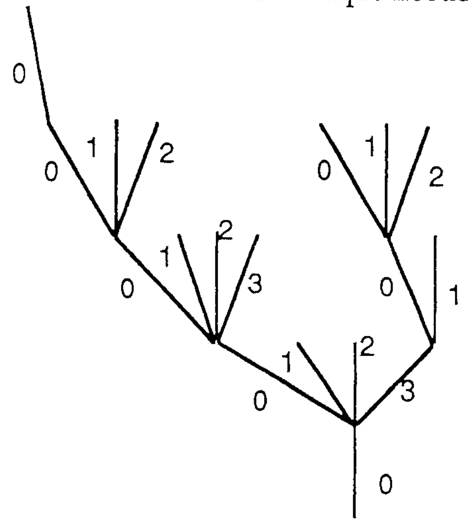
Convention de notation : a,b,c varient parmi les réels "défini par une loi". α,β,γ varient parmi les "i.p.s." ou parmi les réels définis à partir d'i.p.s. (sauf lorsqu'on précisera explicitement que les suites infinies engendrées par l'activité créative mathématique sont aussi autorisées).

La raison du mot "intuitionnisme" est que, par introspection, ou plutôt par examen introspectif de la nature du continu, on peut se convaincre soi-même de la vérité des trois principes suivants (du moins selon Brouwer) : le principe de Brouwer pour les nombres, le théorème de l'éventail, et la bar-induction. Voici comment ces principes sont formulés d'ordinaire dans la littérature :

BP_0 Principe de Brouwer pour les nombres

$\forall\alpha\ \exists n\ R(\alpha,n) \Rightarrow \forall\alpha\ \exists m,n\ \forall\gamma\ [\ \overline{\alpha}(m) = \overline{\gamma}(m)\ \Rightarrow\ R(\gamma,n)\ ]$ ([16])

Les deux principes suivants, théorème de l'éventail et Bar-induction monotone, sont des principes d'induction formulés au moyen d'*arbres bien fondés* (sans branche infinie).
Ces principes d'induction généralisent le principe de récurrence sur les entiers naturels, qui peut être vu comme l'induction sur un arbre infini où de chaque noeud part une seule branche.



Si, de chaque noeud d'un arbre partent des branches en quantité finie ou dénombrable, il peut être vu comme un ensemble de listes d'entiers, stable par l'opération «segment initial de» : il suffit de numéroter les branches partant de chaque noeud. Par exemple la liste [0,3,0,2] fait partie de l'arbre fini dessiné ci-dessus, mais pas la liste [0,1,1].
Du point de vue constructif, on définit un arbre bien fondé au moyen d'une relation R portant sur les "nombres suites" (c.-à-d. des nombres qui codent des suites finies d'entiers selon le codage prédéfini) où la relation R(s) exprime que le nombre suite s est *en dehors de* l'arbre défini par R . On écrit $s \subset t$ pour dire que s et t sont des nombres suites et que s est un "segment initial de t " (en tant que suites finies, t prolonge s).

[16] L'hypothèse de BP_0 est que pour toute suite i.p.s. α on a un entier n qui lui est (algorithmiquement) associé par la relation R ; la conclusion est que l'on peut trouver un m tel que si γ et α coïncident jusqu'à m , alors n est également associé à γ via R . Le principe BP_0 ainsi interprèté est "incontestable", à cause du mot algorithmiquement : une procédure algorithmique ne peut connaitre une suite arbitraire α qu'à travers un nombre fini de ses valeurs.

Le fait que R définit un arbre s'écrit donc :

$$\forall s,t \;\; ((s \subset t \text{ et } R(s)) \;\Rightarrow\; R(t))$$

Et le fait que l'arbre est bien fondé (sans branche infinie) s'écrit :

$$\forall\alpha \; \exists n \;\; R(\overline{\alpha}(n))$$

Notez que le fait que R définisse le complémentaire de l'arbre évite la formulation négative «sans branche infinie» au profit de la formulation positive «toute suite infinie finit par sortir de l'arbre».

Un arbre est dit binaire si les suites de nombres concernées sont uniquement des suites de 0 ou de 1 , ce qui traduit le concept d'un arbre à deux embranchements au plus à chaque noeud.

FT **Théorème de l'éventail.** Tout arbre binaire bien fondé est fini.

De manière plus formalisée.

Si une propriété R concernant les nombres suites binaires vérifie :

$$(s \subset t \text{ et } R(s)) \;\Rightarrow\; R(t)$$

Alors : $\forall\, \alpha \in 2^{\mathbb{N}} \; \exists n \;\; R(\overline{\alpha}(n)) \;\Rightarrow\; \exists m \;\; \forall \gamma \in 2^{\mathbb{N}} \;\; R(\overline{\gamma}(m))$

BI_M **Bar-induction monotone**

On considère un arbre bien fondé, décrit par une propriété R(s) portant sur les nombres suites. Supposons que A soit une propriété "progressive" concernant les nombres suites, c.-à-d. que si $A(t * \langle n \rangle)$ est vrai pour un nombre suite t quelque soit n , alors A(t) est vraie.

Alors BI_M affirme : $(\forall t \;\; (R(t) \Rightarrow A(t))) \;\Rightarrow\; A(\langle\rangle)$

Une note technique ci-dessous discute ces formulations plus précisément.

Le théorème de l'éventail résulte logiquement des deux autres (cf [31]). Ainsi pour passer du constructivisme style Bishop à l'intuitionnisme objectif on doit guider son intuition jusqu'à la vérité de BP_0 et BI_M. Ceci est tenté par exemple dans [31]. Le point à souligner ici est que les arguments de [31] ne contredisent aucunement le point de vue "objectif" sur les mathématiques, et ne reposent pas sur le subjectivisme.

Notes techniques :

(i) Le théorème de l'éventail est classiquement valide, et équivalent au lemme de König[17]. Il est parfois formulé en remplaçant $2^{\mathbb{N}}$ par une partie compacte arbitraire de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ou par l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ bornés par une suite donnée. Ces formulations sont équivalentes, comme prouvé dans [51] ou dans [5].

(ii) Brouwer lui-même ne formule pas BP_0 et FT exactement ainsi. Sa formulation de BP_0 était à peu près : supposons que f soit une loi telle que $\forall\alpha \; f(\alpha) \in \mathbb{N}$; alors f est continue. Notez que α n'est pas supposé être une fonction (c-à-d extensionnelle[18]) et que, par contre, c'est dans la conclusion. Même genre de remarque pour FT.

(iii) La considération de la notion d'i.p.s. conduit par elle-même à des questions du genre : "Que signifie pour une loi d'opérer sur les i.p.s.? Quel est le sens de $\forall\alpha \, \exists n$?" Kreisel et Troelstra [36] ont démontré des théorèmes (à propos de théories formelles) dans la rubrique

17 La formulation classique du lemme de König est : «Un arbre à nombre d'embranchements fini à chaque noeud et sans branche infinie est de hauteur finie». FT en est une formulation constructive. Le fait de se limiter dans FT aux arbres binaires (à deux embranchements maximum), n'a aucune importance. L'évidence de FT pour un constructiviste n'est pas du tout "incontestable": voir le paragraphe 3.1 et la note 22 .

18 une loi f qui associe à toute i.p.s. α un entier naturel est appelée une fonction si elle est «extensionnelle», c-à-d lorsqu'on a : si 2 i.p.s. α et γ vérifient $\alpha(n) = \gamma(n)$ pour tout n , alors $f(\alpha) = f(\gamma)$.

"élimination des suites de choix", résultats qui peuvent être interprètés comme appuyant le point de vue traditionnel de Brouwer selon lequel la continuité résulte de la nature même des i.p.s..

(iv) Une conséquence de BP_0 est que toute fonction d'un espace métrique séparable complet dans un autre est continue. L'implication contraire n'est pas valide cependant ; avec la thèse de Church et le principe de Markov, toutes ces fonctions sont continues (th. de Ceitin, Kreisel, Lacombe, Schoenfield), mais BP_0 est en défaut, car à chaque élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ correspond un "index récursif"[19] mais un tel index ne peut pas être assigné de manière continue.

(v) Plus loin, nous utilisons le lemme suivant, qui contraste avec (iv).
Soit $AC_{1,0}$ le principe de choix :

$\mathbf{AC_{1,0}}$ $\forall\alpha\, \exists m\, A(\alpha,m) \;\Rightarrow\; \exists f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}\, (\forall\alpha\, A(\alpha,f(\alpha)))$ (où f est une fonction)

lemme : (cf [5] et [47]) Sous l'hypothèse $AC_{1,0}$ on a les équivalents suivants :

(*) $FT + BP_0$

(**) toute fonction d'un espace métrique séparable complet vers un espace métrique séparable est continue, et uniformément continue sur les compacts

(***) le cas particulier de (**) pour les fonction de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $2^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarques :

Selon la philosophie intuitionniste, $AC_{1,0}$ est valide.

Pour la philosophie de Bishop il semble aussi malaisé de justifier $AC_{1,0}$ que de justifier le faux axiome de choix $AC_{\mathbb{R}}$ qui dit :

si $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n\, \Phi(x,n)$ il existe une fonction qui "choisit" n à partir de x

(cet axiome est faux : par exemple " $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n > x$ " est vrai mais on ne voit pas comment choisir n extensionnellement[20] à partir de x).

Dans [50] on trouve des équivalences intéressantes entre divers principes de continuité, sous l'hypothèse $AC_{1,0}$.

2.5 L'intuitionnisme de Brouwer

La philosophie intuitionniste épanouie va au delà de considérations de 2.4.
Brouwer ne recule pas devant un subjectivisme confinant au solipsisme. Ce qui conduit en définitive à la considération du schéma de Kripke :

KS $\exists\alpha\, (\exists n\, (\alpha(n) \neq 0) \Rightarrow R)$ (R est une propriété arbitraire).

Dans ce schéma α est autorisé à varier dans l'ensemble des suites engendrées par l'activité créative du mathématicien.
La justification de KS est de poser $\alpha(n) = 0$ si le mathématicien créatif, à la $n^{\text{ième}}$ étape de son activité, n'a pas encore réussi à démontrer la propriété R . En supposant que le principe A-P reste valide lorsqu'appliqué à l'activité créative du mathématicien, et que cette activité peut

---

19 Selon la thèse de Church, dans la version forte du constructivisme russe, toute suite d'entiers est du type $n \longmapsto \{e\}(n)$, et elle admet donc un index récursif e .

20 Deuw suites (explicitement) de Cauchy peuvent définir le même nombre réel x mais le $n > x$ calculé à partir d'une des suites de Cauchy n'est pas forcément le même que celui calculé à partir de l'autre (une opération $x \longmapsto F(x)$ est dite extensionnelle lorsque $x = x' \Rightarrow F(x) = F(x')$) . Les seules opérations extensionnelles et définies pour tous les réels, qu'on sache construire, sont continues.

être ordonnée en une suite, on en déduit KS . Il faut souligner ici que la notion de "suite" qui justifie la validité de KS est distincte de la notion de suite "i.p.s." (résultat du hasard, ou du libre arbitre) décrite auparavant. La (ou les) notion(s) d'ensemble dans l'intuitionnisme seront discutées en 9.5 et KS en 9.6.

Note : Van Stigt [53] montre que le point de vue de Brouwer sur le sujet créatif, publié seulement assez tard, a ses racines dans des parties rejetées de sa thèse.

2.6 La philosophie de Martin-Löf

Cette philosophie, la plus jeune de celle que nous discutons, a été élaborée dans la dernière décade.

Sa notion d'"opération" semble peu distincte de celle de Bishop, à ceci près que tout opération doit avoir un domaine fixé. Les théories de Martin-Löf sont une sorte de λ-calcul dont les variables sont les types, par contraste aux théories de Feferman basées sur une relation d'application *partielle* (non partout définie). Martin-Löf semble accepter la définition de Bishop pour les ensembles, mais il offre un raffinement : pour donner un ensemble nous devons dire ce que sont ses *éléments canoniques*. Alors nous écrivons $a \in X$ pour signifier que a est un "programme" qui, une fois exécuté, fournit un élément canonique de X . Nous devons aussi dire quand 2 éléments canoniques sont égaux. Par exemple les éléments canoniques de $\mathbb{N}$ sont définis à partir de 0 et de l'opération successeur. Un exemple d'élément non canonique de $\mathbb{N}$ est 10^{10}, lequel est un programme qui, évalué au moyen des règles qui définissent l'exponentiation, la multiplication et l'addition, fournira l'entier canonique.

La notion d'ensemble ainsi expliquée contraste avec la notion de catégorie (prise au sens philosophique) : si nous disons "ce qu'une chose est" nous définissons une catégorie. Par exemple on peut parler de la catégorie des ensembles ; mais cette catégorie n'est pas un ensemble car nous ne savons pas ce que sont ses éléments canoniques. Selon Martin-Löf, [la classe des parties de $\mathbb{N}$] $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une catégorie mais non un ensemble.

Une *proposition* est exactement un ensemble de preuves. D'autre part un *jugement* est une affirmation mathématique. Par exemple "$\mathbb{N}$ est un ensemble" est un jugement, non une proposition. Si A est une proposition, alors "A est vraie" est un jugement "$p \in A$". Comme tous les ensembles, les propositions ont des éléments canoniques qui sont les *preuves canoniques* d'une proposition. Cela s'adapte bien avec les idées de Dummet [20] comme déjà mentionné en 1.4.

3 - THESE DE CHURCH ET QUESTIONS CONNEXES

3.1 La thèse de Church proprement dite

C'est l'affirmation que tout suite d'entiers naturels est donnée par une fonction récursive. Que ceci soit vrai ou non (ou: plausible ou non) dépend évidemment de l'idée de "suite de nombres naturels" que nous avons en tête. Ainsi pour les constructivistes russes la thèse de Church est valide parce que, par définition, tout suite d'entiers est donnée par un algorithme de Markov. Ce que nous entendons par thèse de Church est

CT Thèse de Church $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \exists e\ \forall n\ (\{e\}(n) = a(n))$ ([21])

Dans CT la variable a se ballade parmi les suites guidées par une loi. Le contenu de CT est que tout suite guidée par une loi est donnée (au moins extensionnellement) par un index récursif e , et *de plus* que nous pouvons trouver e à partir de la loi a et de la preuve que a(n) est défini pour tout n . Si on n'y prend pas garde on risquerait d'énoncer

FCT Fausse Thèse de Church $\forall \alpha\ \exists e\ \forall n\ (\{e\}(n) = \alpha(n))$

Ici α varie parmi les suites i.p.s.. Le principe est tout bonnement faux. D'où son nom (fausse thèse de Church). En effet le théorème de l'éventail FT est vrai pour les i.p.s., et FT et FCT sont formellement contradictoires. La preuve de cette contradiction formelle dépend du résultat suivant en théorie de la récursion (Kleene [29]) :

> *Il existe un arbre binaire primitif récursif, bien fondé par rapport aux suites récursives descendantes, mais avec des branches arbitrairement longues.* ([22])

Le même arbre peut être utilisé pour montrer que BI_M contredit FCT. Enfin on peut formuler un autre principe, écrit comme FCT, mais avec α variant parmi les suites de l'intuitionnisme Brouwérien. Pour réfuter ce principe, nul besoin de théorie de la récursion, puisqu'il est en conflit direct avec KS , qui affirme que tout prédicat est de la forme $\exists n\ \alpha(n) = 0$). On peut même penser plausible l'existence d'un α engendré par le sujet créatif mais non récursif ... De toute manière CT n'a rien à voir avec des suites telles que les suites i.p.s. ou les suites engendrées par le sujet créatif.

CT est-elle valide ?

Les arguments contre CT dans la littérature semblent tous des arguments contre FCT (la validité de FCT est une question intéressante à cause de sa connexion supposée avec la question "l'esprit est il mécanique ?"). Un argument contre CT elle-même est le suivant : CT affirme l'existence d'une méthode transformant toute loi (avec la preuve que cette loi définit une suite de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) en un index récursif équivalent. Personne n'a jamais exhibé une telle méthode générale de récursivisation. Bien sûr, en pratique, on peut trouver un index récursif pour chaque loi, mais cela réclame quelquefois de la créativité, et cela ne semble pas résulter d'une méthode uniforme.

---

21 Rappel : $\{e\}(n)$ est le résultat, pour l'entier n , du programme codé e.

22 C'est donc un arbre à embranchements finis, dont toutes les branches récursives sont finies, mais qui lui-même n'est pas fini : "il y a" donc des branches infinies non récursives d'après le lemme de Konig. Cela montre que CT et FT sont contradictoires. On appelle dans la suite cet arbre «l'arbre singulier de Kleene».

Cet argument représente, je pense, la position de la majorité des constructivistes. L'école russe répondra que la difficulté à trouver une telle méthode générale tient seulement au fait que la notion de "loi" est trop vague, et que la seule manière de rendre cette notion rigoureuse est de *définir* une loi comme donnée par un index récursif. Kreisel [34] donne un exemple de loi qui pourrait rentrer dans la notion de "règle" (cf 1.1 (ii)) ou dans une définition un peu plus lâche de "humainement calculable", en opposition à récursif. Précisément définissons f par :

$f(n) = 0$ à moins que n ne soit le numéro de Gödel d'une démonstration dans HA d'un théorème de la forme $\exists k\, Q(k)$

dans ce dernier cas, $f(n)$ est : 1+ la valeur de k vérifiant $Q(k)$ fournie par la preuve n , si une valeur est fournie, et 0 sinon.

Cet exemple est discuté dans [11] (et nous ne répétons pas ici la discussion) mais il illustre la "zone de flou" séparant le constructivisme russe et celui de Bishop.

Note technique 3.1.1. :

Une marque distinctive des théories formelles intuitionnistes est leur consistance avec CT . On peut même dire que c'est un critère pour pouvoir considérer une théorie comme "formellement intuitionniste". Dit d'une autre manière, toutes les théories connues (naturelles) considérées comme constructives s'avèrent consistantes avec CT (ou au moins la version de CT qu'elles sont capables d'exprimer). Par exemple : HA de Heyting[23], EM_0 de Feferman, CST de Myhill, S de l'auteur.

Une exception avec la dernière version des théories de Martin-Löf [39]. Cette théorie contient en effet HA^ω+AC+Ext où AC est l'axiome du choix sur tous les types finis, HA^ω est HA étendue aux types finis (cf [48]) et Ext est l'axiome d'extensionnalité. Des détails pour interpréter cette théorie sont dans [9]. Troelstra [50] montre que cette théorie réfute CT . La difficulté semble résider dans Ext , qui dans la théorie de Martin-Löf est donné sous forme de la règle de déduction[24] :

$$\text{de} \qquad [\ f(x) = g(x) \quad (x \in A)\ ] \qquad \text{déduire} \qquad f = g \in \prod_{x \in A} B(x)$$

Formellement il est tentant d'adopter cette règle qui relie l'égalité et l'opérateur produit Π . Le problème n'apparaît pas dans la 1ère version [38] où le jugement aujourd'hui écrit $a = b \in X$ s'écrivait a conv b avec X seulement implicite puisque chaque terme avait un symbole de type précisé. (le système de 1975 peut être vu comme un sous-système propre de celui de 1979). Sans doute le système de 75, ou celui de 79 sans Ext sont-ils consistants avec CT. Néanmoins, la réfutation de CT est troublante puisque Martin-Löf prétend sa théorie vraie. Nous allons maintenant essayer de réconcilier ces faits ; notons d'abord que l'axiome du choix est un théorème (même sans Ext) :

$$\forall x \in A \ \ \exists y \in B \ \ \phi(x,y) \quad \Rightarrow \quad \exists f \in B^A \ \forall x \in A \ \ \phi(x,f(x))$$

Mais ceci seulement avec un ensemble A "complètement présenté" : c-à-d que les éléments de A doivent être "équipés" de l'évidence qu'ils appartiennent à A . Ainsi par exemple un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers *avec* l'évidence que cette suite est partout définie. Ce point n'est pas reflété dans les théories de 75 et 79. Mais dans ses conférences à Munich (1980), Martin-Löf introduit l'idée que $\lambda(f)$ = l'"abstrait" de f , de sorte que $\lambda(f) = \lambda(g)$ si et seulement si f et g prennent les mêmes valeurs. Alors les éléments canoniques de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont

---

23 HA, HA^ω, EM_0, CST, S : explication dans la liste des abréviations à la fin du texte

24 Une règle de déduction (ou de dérivation) n'a pas le même statut qu'un théorème. De A déduire B *signifie, si* $\vdash A$ alors $\vdash B$, ce qui est à distinguer de $\vdash A \Rightarrow B$. La deuxième affirmation est souvent strictement plus forte que la première.

les $\lambda(f)$ et non les f. Ensuite, des éléments de $((\mathbb{N}\to\mathbb{N})\to\mathbb{N})$ c'est-à-dire des objets de type 2, doivent travailler sur ces $\lambda(f)$. En particulier seuls les objets extensionnels du type 2 sont autorisés : ce qui est aussi un trait de la théorie de 79. Maintenant une preuve de $\forall\alpha\ \exists n\ A(\alpha,n)$ doit donc fournir un moyen *extensionnel* de trouver le n à partir de α. Si on lit les quantificateurs ainsi, il n'est pas trop surprenant que CT soit fausse, car il est très improbable que l'index récursif de α puisse être trouvé extensionnellement à partir de α. Par ailleurs ce n'est pas la manière habituelle de lire les quantificateurs. S'ils doivent être lus extensionnellement dans le système de Martin-Löf, on peut l'interpréter en disant :

> *l'interprétation usuelle de l'arithmétique du second ordre avec des variables de fonctions dans le système de Martin-Löf ne préserve pas la signification.*

Au congrès du centenaire de Brouwer, Martin-Löf aborda ce point en conversation en remarquant que la soi-disant "manière usuelle de lire les quantificateurs" reposait sur des conceptions philosophiques plutôt obscures, tandis qu'il avait donné une explication systématique de la signification des différents symboles logiques. Selon son explication systématique les quantificateurs sont lus extensionnellement et la thèse de Church est fausse. Si quelqu'un pense que ceci n'est pas raisonnable, il lui reste à fournir une explication différente mais aussi cohérente des opérations logiques. Voilà où en est l'affaire pour le moment.

3.2 **La thèse de Church faible** (pas de suites non récursives).

WCT **Fausse thèse de Church, affaiblie**

$$\forall\alpha\ \neg\neg\exists e\ \forall x\ (\{e\}(x)=\alpha(x)) \qquad (\alpha \text{ est une i.p.s.})$$

Remarque : WFCT serait mieux adapté que WCT car CT n'implique pas WCT (α varie sur les i.p.s.).

Moins fort que FCT , WCT a néanmoins des conséquences sensibles. Il est absurde que les i.p.s. soient toutes récursives, mais peut-être n'est-il pas absurde qu'il n'y ait pas d'i.p.s. non récursives. Pour réfuter WCT il semble qu'on ait besoin d'arguments du genre "sujet créatif", mais alors α ne peut être limité aux suites i.p.s.. En particulier :

Théorème : (Moschovakis [40]) : WCT + BP_0 + FT est consistant avec HA^{ω}

Mais on a :

Théorème : WCT + MP + FT est inconsistant

Démonstration : en utilisant l'arbre "singulier" de Kleene.

Discussion :

(i) La consistance de WCT avec les principes intuitionnistes doit nous alerter quant à l'interprétation de l'inconsistance de FCT avec l'intuitionnisme. C'est, à mon avis, une erreur d'interprèter ce dernier résultat comme montrant que le continu intuitionniste est "plus riche" que les réels récursifs. Il démontre qu'il y a une différence "structurelle" entre suites i.p.s. et suites récursives, mais pas forcément une différence "de taille". Voir 8.1 pour des considérations similaires sur le théorème de Cantor.

(ii) L'inconsistance de WCT + MP + FT est peut-être surprenante puisque deux quelconques d'entre eux sont consistants, et que chacun d'eux à une certaine plausibilité.

(iii) *Est ce que WCT est vrai ?* Il semble que les arguments en faveur de la plausibilité de CT s'appliquent plutôt à WCT . Par exemple, tout système formel constructif connu aujourd'hui vérifie la *règle de Church* [25] :

toute fonction prouvablement bien définie est également prouvablement récursive.

Cependant le résultat d'inconsistance ci-dessus montre qu'il est réellement aussi difficile de démontrer WCT que de réfuter MP + FT .

3.3 Enumération des opérations

On considère les opérations qui ne sont pas forcément partout définies. On peut alors se demander s'il existe une opération "universelle". Ceci est exprimé par :

ENUM On peut énumérer les opérations non partout définies $\exists u \, \forall e,x \, (e(x) \cong u\,(e,x))$

($\cong$ signifie : définies en même temps et, égalité si c'est le cas)

Notez que c'est une affirmation concernant les opérations "en général" (et non seulement les opérations $\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). Selon la philosophie constructive russe, ce principe est valable car tout objet est donné par une description linguistique dans un alphabet fixé et les opérations sont toutes des algorithmes de Markov. Feferman propose une philosophie alternative qui semble hybride de celles de Bishop et Markov : tout objet est donné par une description linguistique, mais il n'y a pas moyen de justifier la thèse de Church. Néanmoins, peut-être ENUM peut-il être accepté . Tentons une justification : l'opération u est donnée par la suite d'instructions : prendre pour entrées e et x ; appliquer e à x ; s'il y a un résultat, le sortir.

La question de savoir si ENUM peut être justifié de cette manière est examinée longuement dans [8] et [10]. La conclusion y est qu'il est difficile de justifier ENUM sans préciser ce que sont les opérations, auquel cas CT est également justifié. Néanmoins ENUM est un axiome très intéressant d'un point de vue technique, à cause de la grande variété de ses modèles (appelés "systèmes énumératifs") et à cause de ses relations étroites avec le lambda-calcul[26] et la théorie de la récursion généralisée. Le simple fait de *poser le problème* ENUM réclame trois concepts sujets à controverse : une opération "arbitraire", la relation d'application pour une opération arbitraire ; et une relation d'égalité absolue (en tout cas, l'auteur est incapable de poser ENUM sans utiliser un langage avec égalité). Ces points sont traités en 4.

Hiérarchies arithmétique et hyperarithmétique

Si f(m,n) est primitive récursive, la partie $\{m : \exists n \; f(m,n) = 0\}$ de $\mathbb{N}$ est dite récursivement énumérable, ou encore Σ_1^0 , et la partie $\{m : \forall n \; f(m,n) = 0\}$ est dite Π_1^0 .
Si f(m,n,p) est primitive récursive, la partie $\{m : \exists n \, \forall p \; f(m,n,p) = 0\}$ de $\mathbb{N}$ est dite Σ_2^0 , et la partie $\{m : \forall n \, \exists p \; f(m,n,p) = 0\}$ est dite Π_2^0 . On définit de la même manière les parties Σ_k^0 et Π_k^0 . On démontre qu'il y a des parties Σ_{k+1}^0 qui ne sont pas Π_k^0 et des parties Π_{k+1}^0 qui ne sont pas Σ_k^0. Ceci constitue la hiérachie arithmétique, ou hiérarchie des parties arithmétiques de $\mathbb{N}$. Evidemment, l'argument diagonal de Cantor nous permet de construire explicitement des parties non arithmétiques de $\mathbb{N}$.

25 cf note 24

26 λ-calcul : système formel inventé par Church dans les années 30 pour décrire un univers où tout objet serait une opération (acceptant pour arguments des objets de l'univers) . Le λ-calcul s'est avéré être un outil extrêmement puissant en logique et en informatique théorique. Cf [Kri] cité dans l'introduction du traducteur.

Un moyen particulièrement intéressant de construire des parties non arithmétiques de $\mathbb{N}$ est d'utiliser la quantification sur les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, fonctions notées en minuscules grecques ci-après. Si $f(m,n,p)$ est primitive récursive, la partie $\{m : \exists\alpha\ \forall p\ f(m,\alpha(n),p) = 0\}$ de $\mathbb{N}$ est dite Σ^1_1, et la partie $\{m : \forall\alpha\ \exists p\ f(m,\alpha(n),p) = 0\}$ est dite Π^1_1. Ceci constitue le début de la hiérarchie hyperarithmétique (on définit Σ^1_k, Π^1_k en autorisant k quantifications alternées sur les variables de fonctions). Une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est dite Π^1_1 si son graphe est une partie Π^1_1 de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (qui est vu comme structurellement identique à $\mathbb{N}$ par le biais d'une bijection primitive récursive).

Notes techniques.

(i) Le système EM_0 de Feferman [23] contient le système BON (théorie de Base des Opérations et des Nombres), qui consiste en : les combinateurs[27] **k** et **s**, des fonctions de couplage, une relation d'application App(f,x,y) (pour $f(x) \cong y$), un prédicat unaire N pour les nombres, et des constantes pour 0, successeur, prédécesseur, et le schéma d'induction. Il contient aussi une "définition par cas", c-à-d une fonction d satisfaisant :

$$N(n) \text{ et } N(m) \Rightarrow [\, d(m,n,a,b) = a \text{ si } n = m, \text{ et } = b \text{ sinon} \,]$$

Les modèles de BON comprennent[28] :

(1) les semifonctions récursives ; ou plus précisément $\mathbb{N}$ avec
$$App(e,x,y) \overset{df}{=} \{e\}(x) = y.$$
Idem avec les semifonctions récursives relativement à une fonction f (f fixée)

(2) les semifonctions Π^1_1 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$; ou plus précisément $\mathbb{N}$ avec App définie à partir des index (numéros de Gödel) de fonctions Π^1_1.

(3) des modèles avec un univers formé par une classe de semifonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (par ex : "toutes les semifonctions") dans lequel toutes les fonctions représentables de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ sont continues.

(4) des modèles dont l'univers est donné par un modèle de la théorie des ensembles, et les opérations comprenant une classe pas trop grande de fonctions [23].

(5) des modèles topologiques [23].

(6) des modèles du λ-calcul, y compris le "modèle graphe" et les D_∞-modèles [45].

(ii) Dans cette note FT signifie théorème de l'éventail formulé dans EM_0 de Feferman, qui n'a pas de variables spéciales pour les suites i.p.s.. Nous avons remarqué en 3.1 que CT réfute FT . ENUM réfute-t-il FT ? On soupçonne que non, parce qu'il y a un modèle avec les semifonctions Π^1_1, et que tout arbre binaire hyperarithmétique bien fondé par rapport aux suites descendantes hyperarithmétiques est fini (classiquement). Ce modèle cependant, contient des fonctions discontinues. Aussi le théorème suivant est-il plus profond :

Théorème : $EM_0 + BP_0 + FT$ est consistant

(iii) *Si ENUM n'est pas la raison pour laquelle CT entre en conflit avec FT , quelle est-elle ?* Voici une réponse : ENUM + COMP réfute CT , où COMP est un axiome qui affirme que tout calcul procède par étapes successives, si bien que f(x) est définie si et seulement si elle est calculée après un nombre fini d'étapes. Dans l'axiome qui suit, lire g(x,n) = 1 comme " f(x) est calculée en n pas ".

---

[27] Le calcul des combinateurs, ou logique combinatoire, inventé par H. B. Curry pour décrire formellement l'opération de substitution (dans telle formule remplacer telle lettre par tel mot), s'est avéré avoir des relations très étroites avec le lambda-calcul. Cf. [Kri] .

[28] Le système BON dans cet article est noté EON dans [Bee] chap VI p 102. (théorie Elémentaire des ...)

COMP $\forall f\ \exists g\ [\forall x,n\ (g(x,n) = 0$ ou $g(x,n) = 1)$ et $\forall x\ (f(x)$ est définie $\Leftrightarrow \exists n\ g(x,n) = 1)\ ]$

ENUM et COMP axiomatisent ce qu'on pourrait appeler les "systèmes énumératifs calculatoires". Par exemple les semifonctions récursives, mais non les semifonctions Π^1_1 . Cet axiome a été formulé par Friedman : il est relié à des idées de Moschovakis [41] et Barendregt [1]. Sa pertinence est que l'on peut (avec cet axiome) formaliser la construction de l'arbre singulier de Kleene (cf 2.4). Dit autrement : le simple fait de supposer ENUM ne "rétrécit" aucunement le continu. Même le continu classique peut être plongé dans un système satisfaisant ENUM [23]. Mais cela ne peut être fait avec COMP . Conséquence philosophique : la philosophie que toutes les opérations sont données par des lois est en conflit avec l'intuitionnisme ("intuitionnisme objectif 2.4), mais ne va pas jusqu'à supposer la thèse de Church. Ici nous faisons référence à la philosophie exposée (mais pas forcément épousée) par Feferman [23] où ENUM et COMP pourrait être valides, mais pas CT .

3.4 L'univers est énumérable

Selon la philosophie de Markov, l'univers est l'image d'une fonction de domaine $\mathbb{N}$

L'univers est énumérable $\exists f\ \forall x\ \exists n\ f(n) = x$

Disons qu'un ensemble est énumérable s'il est l'image d'une opération de domaine $\mathbb{N}$, sous-énumérable ([29]) s'il est une partie d'un ensemble énumérable. Un principe plus faible que le précédent est :

SC Tous les ensembles sont sous-énumérables.

Cette dernière affirmation est intelligible par tous les constructivistes tandis que la première ne l'est que pour certains d'entre eux, à cause de la présence de l'égalité et de l'idée d'objet arbitraire. Le principe SC réfute l'existence de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, noté $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, par l'argument diagonal de Cantor. Dans la version "libérale" de la philosophie de Bishop invoquée par Bridges et Greenleaf, on ne peut rien objecter dans la construction de "l'ensemble des parties de X": cela vérifie les conditions imposées en 1.2 pour définir un ensemble[30]. Ainsi y a t-il conflit définitif entre la version "libérale" de l'école de Bishop et l'école russe.

ZF est la théorie formelle des ensembles couramment acceptée par les mathématiciens classique. Elle a son origine dans des systèmes formels proposés par Zermelo et Frankel. Voir par exemple: J.-L. Krivine : Théorie des ensembles. PUF collection SUP. H. Friedman a étudié des versions affaiblies de ZF muni de la logique intuitionniste.

29 Nous avons choisi énumérable plutôt que dénombrable pour traduire l'anglais countable, par référence au concept d'ensemble récursivement énumérable. Dénombrable serait plutôt réservé à «énumérable avec égalité décidable». La définition donnée par l'auteur est légèrement inconfortable en ce qu'elle ne tolère pas les ensembles énumérables possiblement vides, une légère modification qui pallie cet inconfort consiste à admettre que l'opération de domaine $\mathbb{N}$ puisse fournir légitimement la valeur «non dans l'ensemble à construire». De toute manière, on retrouve dans les deux cas les mêmes ensembles sous-énumérables.

30 Voir cependant les discussions en 7.1 , 7.4 et 8.2 .
Note personnelle du traducteur : la condition (i) semble sujette à controverse. Elle est ici «on a dit ce qu'il faut faire pour *définir* une partie de X », mais ceci semble revenir à dire qu'on a une conception a priori et définitive de ce qu'est une propriété.

Notes techniques :

Le principe "L'univers est énumérable" est consistant avec les théories de Feferman [23]. En particulier avec le principe d'exponentiation, à savoir que A^B est un préensemble si A et B le sont.

En [24] il est démontré que SC est consistant avec ZF-(muni de la logique) intuitionniste à condition de remplacer l'axiome des parties par un axiome d'exponentiation.

4 - Y A-T-IL UN UNIVERS ?

Dans la philosophie de Markov, la réponse doit être "oui" parce que l'univers peut être identifié avec l'ensemble des expressions dans un alphabet fini. Pour certains constructivistes cependant, même le continu ne peut être regardé comme une totalité "achevée". D'autres accepteraient le continu, mais sûrement pas le préensemble de tous les préensembles. D'autres accepteraient cela, mais non le préensemble de tous les objets mathématiques construits, ou pas le préensemble de toutes les opérations. Aucune autre question ne semble diviser les constructivistes en autant de sous-philosophies !

4.1 Quantification, bornée et non bornée

Sur ce point, Brouwer est sans équivoque et parle comme de nombreux constructivistes modernes. La maxime de Brouwer est :

> *Chaque fois qu'en logique, le mot "tout" ("quel que soit") est utilisé, ce mot, pour avoir un sens, implique une restriction tacite : pour autant que l'objet appartienne à une structure mathématique supposée construite auparavant (oeuvres choisies p 79).*

Il est clair que dans le développement actuel des mathématiques style NCM[31] , personne ne viole la maxime de Brouwer. Néanmoins, le seul système formel développé avant 1980 qui prend cette maxime au sérieux est celui de Martin-Löf (et son système peut être critiqué sous d'autres aspects cf 3.1 et 5.1). Les systèmes de Feferman, Myhill et Friedman autorisent tous la quantification non bornée. Dans [11] l'auteur construit 2 systèmes : S autorise la quantification non bornée et S_0 (construit en éliminant les quantificateurs non bornés de S) ne la permet pas.

La maxime de Brouwer est en conflit avec le second "principe de base fondamental" (affirmer c'est prouver) puisque :

$$\phi \Leftrightarrow \exists p \ (p \text{ prouve } \phi)$$

semble impliquer un quantificateur non borné. Mais ϕ est ici supposée "avoir une signification" ([32]), ce qui signifie qu'il existe un préensemble Q_ϕ formé par les preuves de ϕ. Ainsi le principe A-P (affirmer c'est prouver) peut être réécrit :

---

31 cf. notes 1 et 4

32 c-à-d : on sait ce qu'il faut faire pour démontrer sa vérité

$$\phi \iff \exists p \; p \in Q_\phi$$

Si ϕ contient une variable libre x , alors $\phi(x)$ est un prédicat sur un certain préensemble X (dans lequel x est supposé varier). Cela signifie que ϕ détermine une fonction qui assigne à tout $x \in X$ un préensemble $Q_\phi(x)$ formé des preuves de $\phi(x)$, et A-P peut alors être réécrit :

$$\phi(x) \iff \exists p \in Q_\phi(x)$$

Par contraste avec le problème de la quantification non bornée, personne ne semble voir d'objection à l'idée que certaines opérations puissent s'appliquer à n'importe quel objet. Par exemple, étant donné deux objets x et y nous pouvons former le couple (x,y) : l'opération de couplage a un domaine non borné. (Même Martin-Löf l'introduit dans ses théories, bien qu'il n'ait pas le moyen d'*exprimer* que le domaine est non borné). Il serait artificiel de protester qu'il doit y avoir une opération de couplage différente pour chaque ensemble X . L'union est un autre exemple d'une opération de domaine non borné, et de même pour l'opération consistant à former X^Y à partir des ensembles X et Y .

4.2 Une égalité absolue

N. Greenleaf a soulevé la question de savoir si cela peut avoir un sens d'écrire $x = y$ avant d'avoir spécifié que x et y appartiennent à un même ensemble.
En d'autres termes : existe-t-il une relation d'égalité absolue ?

(i) Selon les philosophies de Markov ou Feferman l'égalité est non-problématique : elle peut être définie comme l'identité de 2 mots dans un même alphabet. Feferman [22] va jusqu'à évoquer une égalité *décidable* dans l'Univers. Ce qui est cohérent avec son point de vue.

(ii) Avec un point de vue plus libéral sur l'univers constructif (tel que soutenu par Greenleaf) , on peut admettre la possibilité d'objets abstraits non nécessairement donnés par des descriptions finies. Cela est certainement le cas avec l'intuitionnisme, où les suites i.p.s. n'ont pas de description finie; et c'est consistant avec la philosophie de Bishop. Dans ce cas, il n'est pas clair de définir ou de construire une relation d'égalité sur l'univers tout entier (des objets construits). Voir [27] pour une discussion détaillée.

(iii) Même lorsqu'on admet que tout objet mathématique peut être décrit dans un langage naturel, étant donnés le vague inhérent à une telle description et l'inhérente dépendance par rapport au contexte, Greenleaf maintient que l'égalité (décrite en (i)) n'est pas bien définie. Cette question n'est pas une question technique mineure. Selon Greenleaf les principaux paradoxes de la théorie des ensembles sont étroitement liés à l'hypothèse implicite (et erronée) d'une relation d'égalité absolue. Si cela est le cas, ça dépasse l'objet du présent article. Il faut de toute manière reconnaître que quelques hypothèses philosophiques implicites se cachent derrière l'utilisation de l'égalité.

Notes :

Les systèmes formels de Myhill, Friedman et Feferman, contiennent tous l'égalité. Si les systèmes de Myhill et Friedman sont interprètés comme étant des formalisations pour une hiérarchie bien fondée d'ensembles bien fondés (considérés jusqu'à un certain niveau), alors l'égalité peur être interprètée comme une relation d'égalité extensionnelle *définie* ([33]) (voir les constructions de [7] par lesquelles des théories extensionnelles sont interprètées au moyen de

[33] Par exemple on prend comme objets de départ les entiers (d'où "l'ensemble $\mathbb{N}$") puis les objets éléments des ensembles construits au moyen des opérations de couplage et d'exponentiation. Mais on peut pousser le niveau plus haut en utilisant des produits dénombrables d'ensembles (distincts) préalablement construits ...

théories non extensionnelles). Ainsi il y a ici une hypothèse sur la nature de l'univers des ensembles. D'un autre coté les théories de Feferman font certaines hypothèses sur l'univers de tous *les objets construits*.

Les systèmes de Martin-Löf [39] n'utilisent que des égalités sur certains ensembles particuliers (chose implicite dans [38] par l'unicité des symboles de types)

Le système S de [11] est sans égalité.

5 - LE CONCEPT GENERAL DE PREUVE CONSTRUCTIVE

Comme discuté en 1.3, le concept de "preuve" est un concept de base en mathématiques constructives. Et il y a un accord suffisant pour permettre de développer un large corps de mathématiques. Ici on s'intéresse à quelques points problématiques. On peut distinguer plusieurs philosophies distinctes à propos des preuves.

Comme avec les "règles", il y a plusieurs choix possibles pour décrire la notion de "preuve" :

(i) abstrait / concret

(ii) subjectif / objectif

Ainsi par analogie avec la philosophie de Markov concernant les règles, on peut espérer considérer qu'une preuve est (donnée par) une description dans un alphabet fini. Nous pourrions appeler cela le point de vue "concret-objectif". Notez cependant que, vus le théorème de Gödel et A-P , on ne peut aller jusqu'à réclamer des preuves formelles dans un système formel fixé.

A l'extrême opposé, l'intuitionnisme de Brouwer autoriserait des preuves "subjective-abstraites" : des preuves qui sont des constructions *mentales* (donc intrinsèquement personnelles) et qui sont par nature infinies. La description écrite d'une preuve est une tentative incomplète de communiquer la preuve réelle, qui est un objet mental.

Une philosophie "concrète-subjective" des preuves est également possible : chaque preuve est (donnée par) une représentation linguistique, mais une place est laissée pour un jugement subjectif sur la validité de la preuve (pour telle personne, à tel moment) . Par exemple des personnes différentes peuvent juger différemment la validité de la preuve fournie par Brouwer en 1927 concernant la bar-induction.

Une philosophie "abstraite-objective" est encore possible, et semble s'imposer aux successeurs de Bishop qui autorisent des objets abstraits (tels qu'une partie arbitraire de $\mathbb{N}$). En effet ces objets peuvent apparaître comme paramètres dans des formules $\phi(x)$, et donc les preuves doivent être au moins aussi compliquées que les objets qu'elles concernent. Mais on peut encore penser que les preuves (comme les règles ou d'autres objets) sont objectives et communicables.

5.1 La signification de l'implication

En 1.4 nous avons souligné que tout le monde est d'accord qu'une preuve de $A \Rightarrow B$ nous fournit une méthode h pour transformer les preuves de A en preuves de B. Au delà de cet accord, plusieurs points de vue divergent. Une collection raisonnablement minutieuse d'opinions sur le sujet a été rassemblée en [10] ; aussi nous ne donnons pas l'historique de la question ici.

Il semble qu'il y ait 3 "grands" points de vue qui peuvent être clairement énoncés :

(i) p prouve $A \Rightarrow B$ si et seulement si $\forall q$ (q prouve $A \Rightarrow p(q)$ prouve B)

(ii) Kreisel et Troëlstra ont défendu l'idée que :
p' prouve $A \Rightarrow B$ si et seulement si
p' est un couple (p,r) où r prouve $\forall q$ (q prouve $A \Rightarrow p(q)$ prouve B)

(iii) Bishop [14] explique l'implication comme faisant partie d'un schéma plus général qui revient à identifier toute expression avec son interprétation "Dialectica" de Gödel.

La difficulté avec (i) est qu'aucune disposition n'est prévue pour comment reconnaître que p accomplit le travail indiqué. La difficulté avec (ii) est son extrême imprédicativité. La difficulté avec (iii) (entre autres) est que cette interprétation justifie des principes tels que MP que la plupart des constructivistes refusent. Aussi la controverse n'est elle pas très âpre. Il serait difficile de trouver un ferme défenseur d'aucun de ces point de vue. En particulier ni Kreisel ni Troëlstra ne défendent aujourd'hui (ii). La vérité doit résider quelque part dans : une preuve de $A \Rightarrow B$ est une opération p qui transforme toute preuve de A en une preuve de B et qui accomplit ce travail de manière évidente. Mais ceci semble difficile à énoncer sans utiliser les mots "reconnaître", ou mieux "percevoir". Greenleaf cependant, propose une explication séduisante : en tant que propositions, A et B sont précisément des préensembles dont les éléments sont des preuves. Une preuve de $A \Rightarrow B$ est alors précisément un élément de B^A. Notez qu'en général, un élément de B^A n'est pas seulement une règle qui transforme les éléments de A en éléments de B : c'est une telle règle *avec* l'évidence qu'elle transforme éléments de A en éléments de B. Cette évidence pourrait être une preuve : mais il y a certains cas où l'évidence pour une assertion est une "perception" plus fondamentalement psychologique, par exemple pour les choses extrêmement évidentes. (Cela est forcément le cas pour les premières propositions acceptées, qui ne peuvent découler d'autres précédemment acceptées. Par exemple l'évidence de l'induction mathématiques est de cette sorte). Cette explication peut être convenablement formalisée dans le système S de [11], qui possède un prédicat 3-aire : $x \in_q y$ pour signifier que q est une évidence montrant que $x \in y$. Mais les relations précises liant les concepts d'"évidence" et de "preuve" nécessitent une recherche plus poussée : car si nous réclamons (ce qui semble naturel tant qu'on ne parle pas de préensembles qui soient des propositions) que l'évidence de $f \in B^A$ est une preuve que f transforme les éléments de A en éléments de B, nous retournons à l'explication (ii) de l'implication. Quand l'évidence doit-elle être une preuve ?

Des difficultés semblables surgissent lorsqu'on veut dire ce que signifie une preuve de $\forall x\ A(x)$. Pour éliminer la confusion croisée provenant du problème des quantifications non bornées, considérons x comme une variable numérique. Alors une preuve de $\forall x\ A(x)$ nous fournit au moins un moyen de transformer un entier n en une preuve de $A(n)$: mais nous voudrions aussi peur être savoir reconnaître ce fait, ou même savoir le démontrer. L'exemple

suivant servira à illustrer la différence entre les points de vue (i) et (ii) ci-dessus. Quoique l'exemple soit présenté à propos de $\forall$, il pourrait être adapté à l'implication.
Exemple : Vous avez une preuve p de $\forall n\, A(n)$ au sens de (i) ; de sorte que $p(n)$ est une preuve de $A(n)$ pour chaque entier n . Je définis une opération q comme suit :

$$q(n) = \begin{cases} p(n) & \text{pourvu que chaque entier pair} \leq 2n \text{ soit somme de 2 nombres premiers.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il se trouve que je possède un secret : une démonstration de 300 pages de la conjecture de Goldbach[34], cachée dans mon cartable. Ainsi je sais que q est extensionnellement égale à p , et donc est une preuve de $\forall n\, A(n)$. Pour vous convaincre de ce dernier fait, je dois vous montrer ma démonstration de la conjecture de Goldbach (et que vous la compreniez et que vous n'y trouviez pas d'objections). Mais même alors vous ne penserez pas que q constitue une preuve de $\forall x\, A(x)$: il faut q *et* le contenu de mon cartable. Personne ne peut penser que q constitue à lui seul une preuve de $\forall x\, A(x)$.

Ceci montre le défaut du point de vue (i). En fait (i) a servi pour des buts techniques comme base de la définition par Kleene de la réalisabilité récursive, mais même Kleene ne l'a pas proposé comme signification voulue de l'implication.

Notes techniques :

5.1.1

La consistance des axiomes formalisant le point de vue (ii) ci-dessus, avec A-P et quelques axiomes sur les opérations semblables à ceux de BON (cf 3.3) a été prouvé en [8] et [10]. Sa consistance avec des systèmes plus forts, tels que S de [11] reste un problème ouvert.

5.1.2

Un étudiant naïf des systèmes de Martin-Löf[35] pourrait avoir l'impression que Martin-Löf adopte le point de vue (i).

Discussion : Dans les systèmes de Martin-Löf, les opérations logiques ne sont pas primitives mais définies. Des théories plus ordinaires, telles que l'arithmétique, peuvent être exprimées dans ML_0 en assignant à chaque formule A une expression, disons A' , de ML_0 qui est interprétée comme représentant l'ensemble des preuves de A. Pour chaque formule A avec variables libres $x = x_1,\ldots,x_n$, ML_0 démontre "A'(x) est en ensemble", également écrit : "A'(x) est une proposition" (en abrégé : " A'(x) prop") (Martin-Löf ne distingue pas ensembles et propositions). L'acceptabilité de la traduction $A \to A'$ est exprimée par : si A est un théorème de HA, alors pour un certain t avec variables libres x, ML_0 démontre $t \in A'(x)$.

Dans ML_0 $(\forall x \in A)\, B(x)$ est *défini* comme : $\prod_{x \in A} B(x)$ (qu'on note aussi $(\Pi\, x \in A)\, B(x)$)

et cette définition est utilisée pour la traduction, de sorte qu'une preuve de $\forall n\, B(n)$ est une opération qui transforme tout entier n en une preuve de $B(n)$. Ainsi il apparaît que les "preuves", dans la manière dont Martin-Löf utilise ce terme, obéissent à la version (i) pour la signification de l'implication et de la quantification universelle. Pour chasser tout doute sur ce point, construisons l'exemple ci-dessus à propos d'une preuve q dépendant d'une démonstration secrète de la conjecture de Goldbach, à l'intérieur de ML_0. Supposons que p soit la preuve de $\forall n\, A(n)$. Cela signifie que ML_0 démontre :

$$p \in (\forall n \in \mathbb{N})\ A'(n)$$

[34] cf note 7

[35] voir pour ML_0 en fin du texte dans la liste des abréviations

Alors q , conforme à l'exemple, peut être défini dans ML_0, mais nous ne pouvons démontrer dans ML_0

$$q \in (\forall n \in \mathbb{N})\ A'(n)$$

du moins, pas sans l'aide de la preuve secrète SP de la conjecture GC de Goldbach.
Voici le diagramme de la démonstration :

$$\dfrac{p \in (\forall n \in \mathbb{N})\ A'(n) \qquad \dfrac{\text{démonstration SP}}{t \in GC'}}{q \in (\forall n \in \mathbb{N})\ A'(n)}$$

En fait, sans la démonstration secrète SP nous pouvons tout juste prouver

$$q \in (\forall n \in \mathbb{N})\ D(n)$$

où $D(n) = \begin{cases} A'(n) & \text{si tout entier pair} \leq 2n \text{ est somme de 2 nombres premiers} \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$

Dans ML_0 nous pouvons déduire le jugement

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ A'(n) = \Pi\, x \in \mathbb{N}\ \ D(x)$$

sous l'hypothèse GC . Avec l'aide de SP on conclut dans ML_0

$$q \in (\forall n \in \mathbb{N})\ A'(n)$$

Martin-Löf considère ces réflexions comme des critiques mal dirigées contre sa théorie. Ceci parce qu'elles oublient la distinction cruciale entre un *jugement* et une *proposition*, et la distinction correspondante entre une *dérivation* (démonstration) (qui établit un jugement) et une *preuve* (qui est un élément d'une proposition). Au moyen d'un jugement nous *nous* convainquons de la vérité d'une affirmation mathématique. Une preuve, d'autre part, contient l'information grâce à laquelle un ordinateur pourrait vérifier la proposition. Martin-Löf accepte par exemple q comme une preuve légitime ; mais bien sûr la démonstration secrète SP sera nécessaire pour un jugement sur la correction (correctness) de cette preuve. La considération de l'exemple ci dessus et de la réponse que Martin-Löf lui apporte (donnée en des termes semblable par Aczel, un partisan important des théories de Martin-Löf) conduit à la conclusion.

> *Les théories de Martin-Löf ne sont pas des théories sur les* preuves *au sens usuel du terme, mais sur des "objets abstraits réalisant", qui fournissent l'information nécessaire pour le contenu calculatoire d'un théorème mais n'entrainent pas la conviction de sa vérité.*

Comme usuellement avec les théories formelles, les dérivations formelles de la théorie correspondent vraiment à des preuves convaincantes.

5.2 Le prédicat de la preuve est-il décidable ?

Le schéma suivant est appelé : schéma de décidabilité de la preuve

DP $\forall q,x\ (Prf_\phi(q,x) \text{ ou } \neg\, Prf_\phi(q,x))$

Cela signifie : ou bien q prouve $\phi(x)$, ou bien non. Ce schéma est (ou du moins était) considéré comme plausible par différents auteurs. L'argument en sa faveur est le suivant ; si nous ne reconnaissons pas que q prouve $\phi(x)$, alors ce n'est manifestement pas une preuve de $\phi(x)$ pour nous et maintenant. Il y a 2 défauts dans cet argument :

(i) la dernière phrase "pour nous et maintenant" nous conduit à une interprétation subjective et dépendante du temps pour le concept fondamental de "preuve constructive". Ainsi ce point de vue est incohérent avec n'importe laquelle des philosophies "objectives" des mathématiques constructives. Seul l'intuitionnisme brouwérien peut accepter l'argument.

(ii) et ceci s'applique également à l'intuitionnisme Brouwérien : le défenseur de DP *doit* donner une méthode de décision pour savoir si p prouve $\phi(x)$ ou non . Le seul candidat vraisemblable pour cette méthode de décision est celui proposé dans l'argument : mais une telle "méthode" ne peut sûrement pas être qualifiée de règle au sens de 1.1 (ii), ni même de méthode donnée par une i.p.s.. Quant à affirmer que c'est une règle au sens que la décision pourrait être prise par le sujet créatif cela semble tout simplement revenir à supposer vrai ce qu'on veut tenter de justifier.

La conclusion inévitable est que DP ne saurait être défendue ([36]) que par un mathématicien ayant une notion de preuve subjective et dépendante du temps, et une notion de "règle" suffisamment lâche pour autoriser les jugements subjectifs. Après cette discussion, il ne serait pas trop choquant d'entendre que le système S de [11] *réfute* DP . Devons-nous conclure que DP est simplement faux ? Bien sûr si nous acceptons les axiomes de S. Il semble à l'auteur que le seul trait de S critiquable est la quantification non bornée. Le système S_0 de [11] n'admet que la quantification bornée. Ceci conduit à la question naturelle :

Question : S_0 réfute t-il DP ?

La démonstration pour S utilise de manière décisive la quantification non bornée. Aussi la réponse n'est pas évidente.

Note Technique :

[11] a été précédé de [8], qui réfute DP dans une "théorie des constructions et des preuves" sans aucun appareil de théorie des ensembles. Cette théorie avait un prédécesseur bien connu : la théorie des constructions de Goodman. Goodman prend DP comme principe de base. Sa première théorie était inconsistante, comme il l'a lui même observé. En fait, dans les années 65-70, Goodman trouve " de nombreux paradoxes" de la sorte discutés ci-dessus. Voyant l'impossibilité d'avoir à la fois DP et la quantification non bornée, Goodman a gardé DP et introduit le concept de "domaine circonscrit". Cela montre la possibilité de certains systèmes consistants avec DP . Une discussion plus approfondie et les références seront trouvées dans [10].

36 du moins avec l'argument invoqué.

6 - ENSEMBLES ET FONCTIONS

En 1.2 on a expliqué les notions d'ensembles et préensembles. Ce paragraphe est consacré aux rapports entre les concepts fondamentaux d'ensemble, fonction et opération. En mathématiques classiques, on n'a pas le concept d'"opération" et les fonctions sont identifiées avec les ensembles appelés leurs graphes. Il s'avérera qu'en mathématiques constructives la même identification est valide, mais cela ne peut pas être pris pour définition : au contraire, les fonctions doivent être définies en termes d'opérations. L'auteur soutient qu'il y a un seul point de vue cohérent en la matière, qui est celui que tout le monde a en tête ; mais il espère clarifier quelques confusions non nécessaires qui ont existé sur le sujet.

Note : Le sujet traité en 6.1 a été d'abord traité en détail et souligné par Feferman [23], qui mérite l'honneur d'avoir le premier isolé et analysé ces concepts fondamentaux.

6.1 Témoins et évidence

En 1.3 nous avons expliqué ce que signifie construire un nombre réel : on doit donner des opérations x et M, et une preuve q que M est un témoin de Cauchy pour x.

Question : Le nombre réel est-il la suite x de rationnels, ou est-il x, avec M et q ?
(i) en usage mathématique courant, nous parlons comme si x était le nombre réel.
(ii) néanmoins, le point de vue sous-jacent dans le livre de Bishop est que le nombre réel est x avec M et q. Ce point de vue a été appelé : "principe de l'unité de la construction" par Greenleaf : on ne peut pas séparer un nombre réel de ce qu'on a fait pour le construire.

Deux exemples supplémentaires : Un élément de l'ensemble des nombres réels > 0 : $\mathbb{R}^+$, est, selon Bishop, un nombre réel x *avec* un nombre rationnel positif r qui le minore.
Pour être cohérent philosophiquement, il devrait ajouter : avec une preuve que r minore x. (Ca n'irait pas si le minorant r dépendait de ma preuve secrète de la conjecture de Goldbach).
Une fonction uniformément continue de l'intervalle unité I dans $\mathbb{R}$ est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, *avec* une règle ω et une preuve p que ω est un module de continuité pour f c.-à-d. $\omega(\varepsilon) = \delta$ (où : $\forall \varepsilon \exists \delta = \omega(\varepsilon) \ldots$). En usage mathématique courant, nous parlons d'un réel > 0 comme si c'était un réel. Mais, à strictement parler, il n'en est pas ainsi, parce qu'un réel > 0 possède une structure supplémentaire. Dans le livre de Bishop, cette structure supplémentaire est supprimée tant qu'on n'en a pas besoin mais si le besoin apparait, elle est "sortie du chapeau". Feferman a appelé cette structure supplémentaire supprimée " les témoins " et a introduit la :
Suggestion de notation : $x \in_q W$
pour signifier : " x est élément de W comme cela est montré par l'évidence q ".
Ainsi pour des réels il faut écrire : $x \in_{(M,q)} \mathbb{R}$.

Nous suggérons maintenant que choisir la réponse (i) ou la réponse (ii) à la question de départ est simplement un problème de "convention de langage" et non une question discriminante. Supposons un mathématicien A qui croit en "l'unité de la construction" et un mathématicien B qui choisit la réponse (i). Ils sont tous deux d'accord pour dire ce qu'est construire un nombre réel . Ils peuvent parfaitement communiquer en utilisant la notation "$x \in_{(M,q)} \mathbb{R}$". La personne A pensera : x avec M et q, est un nombre réel. La personne B pensera : x est un nombre réel, comme cela est montré par M et q. En outre A ne peut pas protester contre la séparation que la notation établit entre x et M et q puisqu'il doit bien admettre la légitimité d'un "foncteur d'oubli" qui envoie les réels sur les suites de rationnels en oubliant la structure supplémentaire.

6.2 Fonctions contre opérations

Une certaine confusion a surgi en ne distinguant pas soigneusement les fonctions des opérations. Une fonction est autorisée à "utiliser l'évidence" pour calculer la valeur de la fonction. Une opération doit seulement utiliser son "argument".[37]

Les définitions suivantes rendront la distinction claire.

Définition : F est une *fonction* de X vers Y, ce qu'on note $F : X \to Y$, signifie que F est une *opération* telle que :

(i) $x \in_q X \Rightarrow F(x,q) \in Y$; c-à-d en fait que pour une certaine *opération* G on a

$$x \in_q X \quad \Rightarrow \quad F(x,q) \in_{G(x,q)} Y$$

(ii) $(x \in_q X$ et $z \in_p X$ et $x =_X z) \Rightarrow F(x,q) =_Y F(z,p)$ (extensionalité)

Remarque : L'opération G, *avec* les preuves des implications (i) et (ii), constituerait l'évidence que F est une fonction de X vers Y.

Définition : f est une *opération extensionnelle* de X vers Y signifie :

(i) $x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$

(ii) $(x \in X$ et $z \in X$ et $x =_X z) \Rightarrow f(x) =_Y f(z)$.

Maintenant voici la *source de confusion* : tout d'abord les deux notions *ne sont pas* les mêmes. Ensuite, selon la pratique de "supprimer l'évidence" dans le livre de Bishop, avec cependant le principe de l'unité de la construction, elles *semblent* les mêmes.
Ainsi la définition d'une fonction dans Bishop se lit comme celle d'une opération extensionnelle, mais *signifie* ce que nous avons défini comme étant une fonction, parce que pour Bishop $x \in X$ signifie que x contient implicitement l'évidence, quoique le lecteur puisse facilement l'oublier car elle n'est pas mentionnée.
Le fait que ces deux définitions sont différentes peut être mis en valeur par la question mathématique claire suivante :

Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle donnée par une opération extensionnelle ?[38]

---

37 c-à-d l'objet élément du préensemble mais pas la démonstration de son appartenance au préensemble.

38 Dans Bishop, le témoin M pour x n'est pas nécessaire parce que la rapidité de convergence de x est imposée, (c.-à-d. grosso modo $M_n = n$) par contre le témoin q est nécessaire, mais en général sous-entendu. Note personnelle du traducteur : Soit A l'ensemble des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang et considérons la fonction $f : A \to \mathbb{N}$, $f(a) = \Sigma\, a_n$. Il est clair que f est une fonction mais très sans doute pas une opération extensionnelle. Ecrivons $a \in_{(m,q)} A$ pour "a est une suite d'entiers nulle à partir de m, comme montré par q". Alors pour calculer $f(a)$ on a besoin des informations a et m, mais pas de l'information q. L'information q ne sert qu'à garantir le fait que le calcul aboutit (puisque a est bien une suite d'entiers) et qu'il aboutit à ce qu'on veut (puisque la suite est nulle à partir de m). De manière générale, il semble difficile d'imaginer un exemple où l'information nécessaire au calcul d'une fonction serait si enfouie dans la "démonstration" (de l'appartenance de l'objet de départ à l'ensemble) qu'elle ne puisse être mise sous forme d'un objet de type prédéfini. Dans l'exemple avec A, l'information nécessaire est "cachée" sous la forme de l'entier m, à partir duquel la suite est nulle. La fonction f devient donc une opération extensionnelle si on prend la précaution de définir l'ensemble A à partir du préensemble des couples (a,m). Dans tout exemple imaginable avec $\mathbb{R}$, l'information nécessaire semble toute entière contenue dans x et M, et donc dans le cadre Bishop, toute entière contenue dans x. A vrai dire il semble tout aussi difficile

Soient $\mathfrak{C}(\mathbb{R})$ l'(ensemble d)es fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; $\mathfrak{E}(\mathbb{R})$ les opérations extensionnelles et $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Nous avons les inclusions :

$$\mathfrak{C}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{E}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{F}(\mathbb{R})$$

et nous ne savons pas comment prouver qu'on peut remplacer ces $\subset$ par des $=$.

Remarque sur cette notation : Il y a une difficulté de notation que nous ne savons comment résoudre de manière satisfaisante. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors la valeur $F(x,(M,q))$ est une suite de rationnels, que nous désirons souvent écrire $F(x)$, puisque la mention (M,q) est d'ordinaire supprimée et que pour le même x nous obtenons la même réponse (à $=_{\mathbb{R}}$ près) quels que soient les q et M . Généralement nous désirons adopter la convention établie de longue date pour $F : X \to Y$, d'écrire $F(x)$ et non $F(x,p)$ (où $x \in_p X$) pour *la* valeur de la fonction en x . Il semble qu'il n'y ait pas d'espoir de convaincre quiconque d'écrire $F(x)$ pour les valeurs de fonctions et $F[x]$ pour les valeurs d'opérations, de manière à obtenir la notation cohérente :

$$F(x) = F[x,p]$$

Il ne nous reste qu'à nous débrouiller, en nous appuyant sur le contexte.

6.3 Axiomes de choix

Le principe suivant , appelé **axiome de choix dépendant** est reconnu valide par tous les constructivistes

DC $\quad (\forall x{\in}X\, \exists y{\in}X\, \phi(x,y) \text{ et } a{\in}X) \Rightarrow \exists f : \mathbb{N}\to X\ (f(0) = a \text{ et } (\forall n\, \phi(f(n), f(n+1))))$

Le f qui est affirmé exister peut être trouvé comme une opération : il n'y a pas de différence entre opération définie sur $\mathbb{N}$ et fonction définie sur $\mathbb{N}$. La justification usuelle pour DC peut être transcrite en une preuve formelle dans le système S_0 de [11] (qui est basé sur le prédicat 3-aire $x \in_q y$ et sur certains axiomes concernant les preuves), de sorte que la terminologie "axiome" est ici inappropriée. Naturellement DC implique l'axiome de choix dénombrable $AC_{0,0}$.

Un autre axiome proposé par Myhill [43], qui l'appelle **axiome de non-choix** :

AC! $\quad [\forall x{\in}X\ \exists!\, y{\in}Y\ \phi(x,y)] \Rightarrow \exists F : X \to Y\ \forall x{\in}X\ \phi(x,Fx)$

Ici il est vital que le F qu'on affirme exister soit une *fonction* et non une opération. La raison en est que la démonstration de l'hypothèse nous donne le moyen de trouver y à partir de x *et* de la preuve que $x \in X$ (une fonction est autorisée à utiliser cette seconde information mais en général nous n'obtiendrons pas de méthodes pour calculer y à partir de x tout seul). Avec la stipulation que F est une fonction, AC! est une théorème de S (en formalisant l'argument constructivement valide) Une certaine confusion a existé avec AC! parce que si F est une opération, il n'y a pas de raisons que le principe soit valide. Remarquez en effet que les opérations peuvent ne pas être extensionnelles, et sous cet aspect sont plus générales que les fonctions, mais que les fonctions peuvent utiliser des informations "supplémentaires", et sous cet aspect sont plus générales que les opérations.

---

d'imaginer une fonction qui ne soit pas donnée par une opération extensionnelle, qu'une opération *extensionnelle qui* ne soit pas continue.

Avec AC! il est bien sûr possible d'identifier les fonctions avec leurs graphes. Ainsi les assertions concernant ensembles et fonctions peuvent aussi bien exprimées en des termes entièrement ensemblistes, comme classiquement.

Discussion de l'axiome de choix classique :

Le fait que l'axiome du choix classique conduit à la loi du tiers exclu n'est pas aussi connu qu'il devrait (hors du cercle des théoriciens des topos qui ont découvert le résultat). Comme le théorème de récursion, il possède une preuve très courte qu'il est difficile de se rappeler :

Théorème : (Diaconescu [19]) L'axiome de choix (sous forme : tout ensemble d'ensembles non vides possède une fonction de choix) implique la loi du tiers exclu via les axiomes de séparation et d'extensionnalité.

Démonstration : Soit ϕ une affirmation mathématique, nous voulons dériver ϕ ou $\neg\phi$

Définissons $A = \{n \in N : n=0 \text{ ou } (n=1 \text{ et } \phi)\}$

$B = \{n \in N : n=1 \text{ ou } (n=0 \text{ et } \phi)\}$

Ce sont deux ensembles non vides (au sens fort). Supposons que f soit une fonction de choix pour $\{A,B\}$ de sorte que $f(A) \in A$, $f(B) \in B$. Puisque les éléments de A et B sont des entiers on a :

$$f(A) = f(B) \quad \text{ou} \quad f(A) \neq f(B)$$

Si $f(A) = f(B)$ alors on a ϕ. Si $f(A) \neq f(B)$, supposons ϕ, on a :

$$A = B \quad \text{et} \quad f(A) \neq f(B)$$

Ceci est une contradiction vue l'extensionnalité de f : en bref, si $f(A) \neq f(B)$ on a $\neg\phi$

Conclusion : ϕ ou $\neg\phi$

La démonstration de Diaconescu utilise l'extensionnalité. Mais AC est en conflit également avec les théories de Feferman, qui n'ont pas l'extensionnalité. La raison en est différente : AC est un conflit avec ENUM (voir [23] pour une démonstration de ce point par Friedman)

Tous ces exemples utilisent des ensembles définis par des conditions d'existence. Mais cela n'est pas nécessaire pour montrer que AC est vraiment non constructif. Soit en effet :

$$P = \{\{x,y\} : x \text{ et } y \text{ sont 2 points antipodaux du cercle unité}\}$$

Si f était une fonction de choix définie sur P telle que $f(A) \in A$, f ne pourrait être continue pour la topologie naturelle de P. Puisque on ne sait pas construire des fonctions discontinues, on ne sait pas construire de fonction de choix pour P. Cet exemple montre que le "il existe exactement un" de AC! ne peut être remplacé par "il existe exactement deux" sans perdre la constructibilité.

Notes techniques :

(i) Certaines théories formelles *sans DC* ont été étudiées parce qu'elles ont certains modèles intéressants dans les topos. Dans ces théories on ne peut démontrer qu'un complexe admet une racine carrée par exemple. (Si vous essayer de le montrer, vous avez besoin de DC). Dans ces théories la dérivabilité de l'existence d'une racine carrée est impossible parce que si : $\forall x \in \mathbb{C}\ \exists y \in \mathbb{C}\ \phi(x,y)$ est vrai dans un des modèles, alors il y a une fonction de choix continue au voisinage de tout point. Mais il n'y a pas de fonction racine carrée continue au voisinage de 0). Ces *modèles*, peut être intéressants pour eux mêmes, ne correspondent donc pas à des *théories* mathématiques naturelles.

(ii) Myhill [42] donne une théorie avec variables d'ensembles et variables de fonctions. Comme il inclut l'extensionnalité, les variables de fonctions peuvent être éliminées au profit de leurs graphes. Myhill doit avoir eu en tête la notion de fonction comme étant fondamentale.

7 - PRINCIPES D'EXISTENCE D'ENSEMBLES

7.1 Ensembles, ensembles définis, prédicats

Nous avons discuté en 1.2 les concepts d'ensemble et préensembles. Nous faisons maintenant quelques distinctions plus fines. Une *proposition* est une affirmation qui a un sens ; autrement dit, nous savons ce que signifie la démontrer. Un *prédicat* sur un préensemble X est une opération ϕ telle que $\phi(x)$ est une proposition pour tout $x \in X$ Un *prédicat* (extensionnel) *sur un ensemble X* est un prédicat sur le préensemble X tel que :

$$x = y \Rightarrow (\phi(x) \Leftrightarrow \phi(y))$$

Même chose pour les prédicats n-aires.

Définition : Un ensemble X est un ensemble *défini*[39] si les prédicats sur X sont stables par quantification sur X .

Autrement dit : si ϕ est un prédicat binaire sur X , « $\forall x \in X\ \phi(x,y)$ » , et « $\exists x \in X\ \phi(x,y)$ » sont des prédicats sur X .

Exemples :

(i) $\mathbb{N}$ est un ensemble défini.

(ii) si jamais l'ensemble de tous les préordres existe, il n'est sûrement pas "défini", car sinon on pourrait construire le paradoxe de Burali-Forti[40].

Intuitivement un ensemble est "défini" s'il est impossible de construire de nouveaux éléments en quantifiant sur lui. Nous croyons que la controverse sur la légitimité de l'opération "ensemble des parties de" est reliée à ce concept et est le plus clairement posée en termes de ce concept. Les avocats de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ disent que nous savons ce qu'il faut faire pour construire une partie de $\mathbb{N}$. Les opposants disent qu'accepter l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ conduit aux définitions imprédicatives, sinon pire. On peut réconcilier les deux points de vue si on admet que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pourrait être un exemple d'ensemble qu'on ne sait pas s'el est "défini".
Du point de vue formel : pratiquement toutes les théories développées admettent librement la quantification bornée dans l'axiome de séparation (voir l'énoncé en 7.2 et une discussion en 7.3). Donc leurs créateurs avaient en vue les "ensembles définis" comme valeurs pour leurs variables d'ensembles. Nous nous en tiendrons à ce point de vue dans le reste de l'article : en

39 Remarque concernant la traduction : "ensemble défini" est mis pour "definite set", on aurait pu traduire plutôt par "ensemble correctement déterminé" mais c'est trop long. Le mot "défini" prête à confusion car il est la traduction également de "defined" (pour fonction définie en un point)

40 Si les ordinaux formaient un ensemble, cet ensemble serait un ordinal plus grand que tous les autres ordinaux, ce qui est contradictoire.

d'autres termes, nous ne tenterons pas de discuter des ensembles non définis, (au moins informellement).

Note technique : La compréhension imprédicative est plus faible que l'"ensemble des parties" car elle est cohérente avec T_0 (de Feferman), qui réfute ce dernier.

7.2 Principes non controversés

Certains principes d'existence d'ensembles sont largement acceptés.

Exponentiation : Si X et Y sont des ensembles, alors l'ensemble des fonctions de X dans Y existe aussi, et est noté Y^X ; la relation d'égalité naturelle est de poser 2 fonctions égales si elles prennent des valeurs égales pour des arguments égaux.

Pour les constructivistes dans le style Bishop et pour l'école de Markov, ce principe ne présente pas de problème. L'auteur n'a pas trouvé ce principe explicitement admis dans les écrits de Brouwer, ni rien trouvé qui donne à penser que le principe ne serait pas correct ; mais voyez 7.4.

Exponentiation pour les préensembles : Si A et B sont des préensembles alors le préensemble des opérations de A vers B existe.

Union bornée : Si $\forall x \in X \;\; f(x) \subset Y$ ensemble, alors $\bigcup_{x \in X} f(x)$ est un ensemble $\subset Y$

Union de préensembles :

Si $\forall x \in X \;\; f(x)$ est un préensemble, alors $\bigcup_{x \in X} f(x)$ est un préensemble. (41)

Remplacement borné : Si $\forall x \in X \;\; f(x) \subset Y$ ensemble, alors $\{f(x) : x \in X\}$ est un ensemble, avec la relation d'égalité naturelle entre parties de Y .

Remplacement pour les préensembles : Si $\forall x \in A \;\; f(x)$ est définie, alors il y a un préensemble $\{f(x) : x \in A\}$. (42)

Séparation : Si A est un préensemble et ϕ un prédicat sur A alors $\{x \in A : \phi(x)\}$ est un préensemble.

Pour chacun des principes mentionnés, il y a une définition naturelle de ce qui constitue l'évidence qu'un élément du préensemble (ou de l'ensemble) a été construit. Par exemple l'évidence qu'une opération de A vers B a été construite est une démonstration que $f(x) \in B$ chaque fois que $x \in A$. L'évidence correspondant à l'axiome d'exponentiation pour les ensembles a été discutée lorsqu'on a défini les fonctions.

Notes techniques :

(i) Quand ces axiomes sont formalisés, on doit inclure des termes pour noter les ensembles qui sont affirmés exister (au moins dans les théories sans extensionnalité). Par exemple $\{x \in A : \phi(x,y)\}$ est défini à partir de y au moyen d'une opération.

(ii) Séparation, exponentiation et union bornée sont déjà adéquats pour développer NCM . Néanmoins la liste des principes ci-dessus nous permet de faire des choses variées et

41 Il ne peut s'agir que d'une union conçue sans relation d'égalité vue que l'égalité doit toujours être *définie* sur un préensemble donné. (pas d'égalité universelle)

42 l'hypothèse signifie que f est une opération définie (defined) au moins sur A , et non que f(x) est un ensemble défini (definite)

parfaitement légitimes (même si le besoin dans la pratique ne s'en fait pas sentir). Par exemple l'axiome de remplacement borné permet de considérer l'ensemble

$$\{\{n\in \mathbb{N} : \phi(n,m)\} : m\in \mathbb{N}\}$$

ce qu'on ne pourrait sans doute faire sans cet axiome.

7.3 Séparation (Compréhension).

Seules les formes les plus simples de séparation font partie des principes non controversés. Pour formaliser l'axiome nous devons spécifier exactement quelles formules ϕ sont autorisées dans l'axiome.

(i) tout d'abord seules les formules bornées doivent être acceptées, puisque des constructivistes objectent contre les formules non bornées en général.

(ii) en fait, en accord avec le dicton de Brouwer, on ne devrait admettre à droite d'un signe $\in$ uniquement des ensembles spécifiques "préalablement définis".

Nous définissons ϕ comme *formule élémentaire* si les seuls termes qui, dans ϕ, apparaissent à droite du signe $\in$ sont des variables libres de ϕ qui n'apparaissent nulle part dans ϕ si ce n'est à droite du signe $\in$.

Cette définition formelle correspond grossièrement à (ii), parce que quand un ensemble spécifique est défini, nous devons substituer des ensembles "préalablement définis" aux variables libres dans une formule élémentaire.

Nous pensons que tout le monde devrait admettre un axiome de séparation avec des formules élémentaires bornées : c'est cette version de l'axiome de séparation que est incluse dans le système S de [11].

Note technique :

Le système B de Friedman [24] serait un sous-système de S s'il n'incluait l'axiome de séparation pour toutes les formules bornées. Ainsi l'ensemble $\{ x\in W : x\notin x \}$ peut être formé dans B mais non dans S .

Ceci est une source de controverse puisque Friedman et Greenleaf (dont les opinions divergent sur d'autres points) pensent que le préensemble V de tous les préensembles existe. Mais la séparation bornée conduit alors au paradoxe de Russel. Peut-être la meilleure manière de comprendre B , comme d'autres théories des ensembles extensionnels, est en tant que théorie à propos d'une certaine sorte d'ensembles (par exemple la hiérarchie cumulative jusqu'à un certain niveau. Si V existe, il n'appartient pas au modèle voulu de B , aussi il n'y a pas de contradiction).

7.4 Ensembles des parties

Puisque $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, s'il existe, ne peut pas être sous-énumérable, postuler l'existence des $\mathcal{P}(X)$ conduit à admettre l'existence *d'objets abstraits* (par exemple : partie arbitraire de $\mathbb{N}$) dans le sens qu'on ne peut plus croire que tout objet possède une description finie.

Remarque : N. Greenleaf a tenté de défendre la compatibilité des "ensembles des parties", avec la croyance que tout objet possède une description finie, en faisant appel au "flou" des descriptions et à leur dépendance par rapport au contexte. Mais cette philosophie peut-elle être rendue *précise* ?

Notes techniques :

(i) la théorie ZF intuitionniste est connue être consistante, même avec CT, (relativement à la consistance supposée de ZF classique), aussi il n'y a pas de malheur formel à supposer l'axiome des parties. Par ailleurs faire cette hypothèse accroit considérablement la "force" de démonstration du système sans accroître de manière appréciable son *contenu mathématique*.

(ii) (L'axiome de) l'ensemble des parties n'est jamais nécessaire dans la pratique. Il apparaît dans Bishop Cheng [15] et Bridges [16] dans le même contexte : la définition d'un espace mesuré. Cet exemple isolé a reçu suffisamment d'attention pour mériter une discussion par écrit. Tout d'abord, la mention de l'ensemble des parties pourrait être évitée directement, puisque tout ce dont on a besoin est de dire que certain ensemble lui appartient, et ceci peut être fait en utilisant seulement le symbole $\subset$. Mais je pense qu'une telle tricherie artificielle n'est pas nécessaire. Dans le cas en question l'exposé a dévié de l'approche constructive habituelle. Au lieu de définir une fonction mesurable comme fonction d'une certaine partie X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant certaines propriétés, il serait mieux de dire ce qu'il faut faire pour *construire* une telle fonction. En fait nous devons donner une suite, convergente en un certain sens, de fonctions continues : la limite est f mesurable. Ainsi le domaine X de f n'est pas *n'importe quelle* partie de $\mathbb{R}$, mais une partie d'un type très particulier : un ensemble (localement) intégrable. L'ensemble des parties intégrables de $\mathbb{R}$ peut être construit sans l'aide de l'ensemble des parties, et en outre sa construction *naturelle* ne l'utilise pas.
Conclusion : La théorie de la mesure ne constitue en rien un contre exemple à l'affirmation que l'axiome de l'ensemble des parties n'est jamais nécessaire en mathématiques constructives.

(iii) Une des observations résultant des recherches sur la théorie des topos est la suivante. Définissons Ω, s'il existe, comme l'ensemble des parties de $\{0\}$. Alors Ω est l'ensemble des "valeurs de vérité". (classiquement il ne contient que 2 éléments, le Vrai et le Faux, (le Plein et le Vide)). Alors :

Affirmer l'axiome de l'ensemble des parties (pour *tout* ensemble X) *revient à affirmer l'existence de* Ω.

En effet, toute partie A d'un ensemble W possède une fonction caractéristique : $W \to \Omega$
définie par : $x \longmapsto \chi_A(x) = \{z \in \{0\} : x \in A\}$
et donc : $\mathcal{P}(W) = \{ f^{-1}(\{0\}) : f \in \Omega^W\}$
Ainsi $\mathcal{P}(W)$ est défini à partir de Ω et de l'axiome d'exponentiation.

(iv) Sur l'ensemble des parties dans les théories de Feferman : avec l'union et la compréhension élémentaire, l'ensemble des parties conduit au paradoxe de Russel. Dans [23] il y a quelques résultats de consistance avec des théories plus faibles, et des références supplémentaires.

7.5 Les ensembles dans l'intuitionnisme, spreads (déploiements) et species (espèces).

Heyting définit une «espèce» comme étant une propriété X , et il définit «z est un élément de X» signifiant que z possède la propriété X et que cela pouvait être vu avant d'avoir défini X [28]. Cette dernière clause est peut être introduite pour éviter les paradoxes, mais selon l'auteur cela indique l'intention de Heyting de n'admettre que les *espèces prédicativement définies*.

Par exemple, $\{x\in \mathbb{N} : \phi(x)\} = S$ où ϕ possède des quantifications sur les parties de $\mathbb{N}$, pourrait être imprédicative, si , par exemple, pour déterminer si $3 \in S$ (c-à-d si $\phi(3)$) nous avions à inclure cet ensemble S dans le domaine de variation de variables quantifiées dans ϕ .

Les paradoxes seraient effectivement évités par une stricte interprétation du dicton de Brouwer, ou plutôt par les idées sous-jacentes ; selon ce point de vue la définition de Heyting ci-dessus ne serait utilisable que pour définir certaines sous espèces d'une structure mathématique préalablement définies.

Mais alors, dans l'intuitionnisme, que sont les structures dont on peut former des sous espèces ? Ce sont les déploiements. Un exemple de déploiement est donné lorsqu'une règle f assigne une valeur $f(\alpha)$ pour tout élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (La définition exacte de déploiement ne nous concerne pas nécessairement ici : voir [28])
Quelques intuitionnistes modernes pensent que :

Tout ensemble est une sous espèce d'un déploiement

Les intuitionnistes qui acceptent ce principe peuvent très bien *refuser* "l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ caractérisés par une loi" (plus précisément l'ensemble $\{\alpha\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \exists a\, \forall n\ \ \alpha(n) = a(n)\ \}$; où a est une loi de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$).
Selon cette philosophie on doit être très précautionneux sur le concept de fonction : l'axiome d'exponentiation n'est pas valable à moins d'admettre les fonctions définies par les suites i.p.s. et pas seulement celles définies par des lois.
Tout ensemble admet une relation d'égalité naturelle puisque les déploiements en possédent une par définition. Ainsi cette notion d'ensemble n'est pas trop éloigné de celle de Bishop.

Tous les intuitionnistes n'acceptent pas ce pont de vue restrictif, sur l'univers ensembliste.
par exemple; van Dalen [18] n'hésite pas à définir l'espèce de tous les déploiements équivalents à un déploiement donné.

Quelle quantité de structure de l'univers ensembliste classique peut être intégrée dans la conception intuitionniste ?

Si on se place d'un point de vue formel, la plus grande partie peut l'être : ZF intuitionniste est consistant avec $BP_0 + BI_M + FT$, comme cela peut être vu par les méthodes de [5] ou par des modèles topologiques [44].([43])

7.6 Les paradoxes.

Ce sujet se trouve dans le paragraphe "principes d'existence d'ensembles" parce que les paradoxes surgissent de l'existence de certains "grands" ensembles.

Historiquement, l'un des facteurs qui mena au développement des hypothèses constructives fut la découverte des paradoxes ensemblistes.
Il est d'un intérêt certain de savoir si le point de vue constructif résoud (certains des) paradoxes, où si ces derniers restent aussi puissants que dans les mathématiques classiques..
Les ensembles suivants peuvent être regardés comme des ensembles "dangereusement gros" :

V : le préensemble de tous les objets mathématiques
U : le préensemble de tous les préensembles
W : le préensemble de tous les ensembles

43 Toujours sous l'hypothèse que ZF classique est consistant.

Aucun mathématicien classique ne croit en l'existence de ces ensembles, mais certains constructivistes oui. Martin-Löf a une place dans sa théorie pour "l'Univers" : celui-ci peut être interprèté comme les "ensembles itératifs" construits par certaines opérations, plutôt que comme un vrai Univers, mais , à dessein, Martin-Löf s'abstient d'inclure des axiomes d'induction sur de telles constructions, laissant ouverte la possibilité d'un "Univers ouvert".

Notes techniques :
L'existence de V est un théorème dans le système EM_0 de Feferman. Ce système est consistant, même avec la logique classique. Le paradoxe de Russel ne fonctionne pas dans EM_0 parce que la formule $x \notin x$ n'est pas une formule élémentaire, et seules les formules élémentaires sont admises dans l'axiome de compréhension. Cette consistance formelle semble offrir quelque appui au point de vue de Greenleaf concernant l'existence de V. Par ailleurs U et W ne peuvent être prouvés exister dans EM_0 .

8 - LA STRUCTURE DE L'UNIVERS ENSEMBLISTE

Un certain nombre de thèmes de la théorie des ensembles qui sont habituellement considérés comme des questions de "*taille*" sont constructivement mieux appréhendés comme questions de "*structure*".

8.1 Cardinalité (Greenleaf)

La méthode diagonale de Cantor fournit le premier exemple de ce thème.

Disons que X est *productif sur* Y, et écrivons $\Pi(X,Y)$ pour signifier que X a au moins un élément et que pour toute opération $f : Y \to X$, on peut trouver un élément de X qui est différent de tout élément de l'image de f . Nous avons 2 notions différentes à partir de cette définition, l'une applicable à tout ensemble X , et une autre plus forte applicable uniquement lorsque X est muni d'une relation de séparation[44] (on prend alors : "qui est différent de " au sens : "qui est séparé de"). Considérons ici seulement cette 2ème notion. Le théorème de Cantor affirme $\Pi(\mathbb{R},\mathbb{N})$. Comme il est cohérent qu'il existe une surjection d'une partie de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ (par exemple, avec la thèse de Church) nous ne devrions pas conclure que $\mathbb{R}$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$, mais seulement que $\mathbb{R}$ possède une certaine propriété *structurelle*. Cette (mal-) interprétation du théorème de Cantor remonte à Cantor lui-même. (Savoir si c'est une mal-interprétation du point de vue classique n'est pas clair ; mais il semble que même classiquement on a la possibilité de voir ce résultat comme une limitation des méthodes de construction des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ plutôt que comme une limitation par le bas de la taille de $\mathbb{R}$.)

Disons que X est *fortement productif* sur Y s'il est productif sur toute partie de Y . Alors $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'il existe, est fortement productif sur $\mathbb{N}$ ([45]) mais $\mathbb{R}$ n'est pas fortement

44 Une relation de séparation (ou d'écartement) sur un préensemble X est une relation binaire $x \neq y$ vérifiant: 1) $\neg\, x \neq x$ 2) $x \neq y \Leftrightarrow y \neq x$ 3) $x \neq y \Rightarrow (x \neq z \text{ ou } y \neq z)$ (avec le ou constructif fort) On obtient alors que $\neg\, x \neq y$ est une relation d'équivalence, qu'on prend pour relation d'égalité, ce qui définit un ensemble X avec séparation. Le cas standard d'ensemble avec séparation est celui des espaces métriques.

45 Myhill [43] montre que Ω , s'il existe, ne peut pas être recouvert par une fonction $\mathbb{N} \to \Omega$. Autrement dit l'ensemble des valeurs de vérité est productif sur $\mathbb{N}$. Sans doute même $\Omega = \mathcal{P}(\{0\})$ doit être fortement productif sur $\mathbb{N}$. Intuitivement, admettre Ω revient à introduire une complexité (ou "un

productif sur $\mathbb{N}$, ce qui montre la différence de structure entre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ selon le point de vue constructif(46).

Divers auteurs ont développé une théorie de la cardinalité. Pour une discussion et des références voir Feferman [23] (spécialement pour les connexions avec la théorie de la cardinalité récursive de Dekker-Myhill et autres (47)), Greenleaf [27], et van Dalen [28]. Il ne semble pas qu'il existe une notion "correcte" de cardinalité, mais plusieurs notions distinctes, aucune d'entre elles ne capturant la notion classique (c-à-d classification selon la *taille*). Constructivement, la *structure* joue un rôle plus important. Il est intéressant de remarquer cependant que le traitement classique ou constructif du théorème de Cantor possède dans les 2 cas les mêmes applications concernant la construction de certains objets spéciaux : par exemple les nombres transcendants. Le même type d'application peut-être obtenu dans les arguments de théorie de la mesure et théorie des catégories. Et cela fournit, du point de vue constructif, de nouveaux arguments pour la structure et contre la taille. Un ensemble mesurable par exemple, constructivement, est équipé d'une structure riche, en termes de suite de fonctions continues approchant la fonction caractéristique en un sens convenable.

8.2 Structure des "ensembles des parties".

Un principe qui a reçu beaucoup d'attention est le principe d'uniformité.

UP $\quad \forall X \subseteq \mathbb{N} \ \exists m \ \phi(X,m) \Rightarrow \exists m \ \forall X \subseteq \mathbb{N} \ \phi(X,m)$

On y trouve une réminiscence des principes de continuité et il peut être formulé plus explicitement comme un principe de continuité

UP' Toute opération de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathbb{N}$ est constante

Si on remplace dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\mathbb{N}$ par un ensemble W , on formulera les principes UP_W et UP'_W . Si on prend W pour l'Univers, on obtient.

UP_1 $\quad \forall X \ \exists m \ \phi(X,m) \Rightarrow \exists m \ \forall X \ \phi(X,m)$

UP_1 peut par exemple être formulé dans le langage de ZF-intuitionniste. Il n'est pas difficile de réduire les principes UP_W et UP'_W (pour les W ayant au moins un élément explicite) au cas particulier où $W = \{0\}$, $\Omega = \mathcal{P}(W)$, c'est-à-dire :

UP'_2 Toute opération de Ω vers $\mathbb{N}$ est constante

Notes techniques :

Troelstra [49] a attiré l'attention sur UP ; il le démontra consistant avec HA . Le principe UP_1 est consistant avec ZF intuitionniste, formulé sans l'extensionnalité (par la technique de réalisabilité de [7])

cardinal" en termes ensemblistes classiques) plus grand que tous ceux précédemment admis (intuitionnistiquement ce phénomène se produit donc déjà avec Ω, pas besoin de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

46 Même remarque avec $2^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ à la place de $\mathbb{R}$.

47 c.à.d. l'étude des parties de $\mathbb{N}$ "à isomorphisme récursif prés" en gros.

En utilisant la q-réalisabilité on peut montrer que HAS[48] est clos pour la règle de déduction[49] correspondant à UP (autrement dit : chaque fois que HAS prouve l'hypothèse de UP, il prouve également la conclusion), et ZF intuitionniste est clos pour la règle de déduction correspondant à UP_1 .

Naturellement, ces résultats laissent ouvertes certaines questions techniques. Pour une discussion plus approfondie voir Troelstra [49] et [51].

8.3 L'hypothèse du continu

Une version naturelle de l'hypothèse du continu est :

CH $[S \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ et } \Pi(S,\mathbb{N})] \Rightarrow (\exists f : 2^{\mathbb{N}} \to S \text{ injective})$

Naturellement on ne peut espérer démontrer CH dans ZF intuitionniste, puisqu'on ne peut espérer le démontrer dans ZF classique. On peut cependant se demander s'il est possible de démontrer CH à partir d'axiomes valables du point de vue constructif (pour une des philosophies ...)

8.3.1 CH et Thèse de Church

Proposition : CH et CT sont contradictoires.

Démonstration : Soit $T \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des index de fonctions récursives totales. D'après la thèse de Church, et par l'argument diagonal de Cantor, on a $\Pi(T,\mathbb{N})$. Soit maintenant, en bijection naturelle avec T, l'ensemble $S \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des fonctions f telles que $f(0) \in T$, et $f(x) = 0$ pour $x > 0$. On a donc $\Pi(S,\mathbb{N})$. Si on a CH il y a une injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans S et donc une injection de $2^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$. Mais l'égalité dans $\mathbb{N}$ est décidable donc, vue l'injection, celle dans $2^{\mathbb{N}}$ également. Or selon CT l'égalité dans $2^{\mathbb{N}}$ n'est pas décidable (car l'ensemble des index de fonctions partout nulles, par exemple, n'est pas récursif).

Remerciement : c'est à A. Visser que je dois l'idée de la preuve ci-dessus, beaucoup plus simple et courte que la preuve originale.

La version suivante améliorée sera utile par la suite ([50]).

Proposition : WCT et CH sont contradictoires.

8.3.2 CH et l'intuitionnisme

Gielen, de Swart, Veldman ont utilisé le principe de continuité pour les fonctions BP_1 de Brouwer (c-à-d si $\forall\alpha\, \exists\, \beta$ ... alors β dépend continument de α) pour prouver une version affaiblie de CH. Dans l'hypothèse, $\Pi(S,\mathbb{N})$ est renforcée en : si $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, alors on peut trouver un élément de S séparé de toute valeur de g (cf [25]). Mais ils n'ont pu démontrer CH lui-même. Et en effet :

---

48 HAS : aritmétique de Heyting du second ordre, on étend HA en rajoutant des variables pour les parties de $\mathbb{N}$ et des axiomes convenables d'un point de vue constructif.

49 cf note 24

50 La démonstration est un raffinement de la précédente. Notez qu'en logique intuitionniste, WCT est strictement plus faible que $\neg\neg CT$ (de manière générale $\forall x \neg\neg A(x)$ est strictement plus faible que $\neg\neg\forall x\, A(x)$) et donc que la démonstration *doit* être raffinée.

Théorème : CH est indémontrable dans $HA^{\omega} + BP_0 + FT$; et de même dans toute théorie consistante avec WCT et l'axiome de choix dénombrable.

Démonstration : Pour formaliser la démonstration précédente (WCT et CH sont contradictoires) on a besoin de l'axiome de choix dénombrable. Et donc CH ne peut être démontré si la théorie est consistante avec WCT et choix dénombrable. Quant à $HA^{\omega} + BP0 + FT$, elle est consistante avec WCT comme vu en 3.2. (et ajouter le choix dénombrable reste consistant, comme on peut le voir avec la démonstration de 3.2. par réalisabilité)

Remarques : Le travail de Gielen , de Swart, et Veldman est particulièrement intéressant, car il s'agit de la première application mathématique du principe de Brouwer pour les fonctions pour laquelle BP_0 ne peut (sans doute) pas suffire. En passant, BP_1 est également consistant avec WCT , donc BP_1 ne suffirait pas non plus à démontrer CH .

8.3.3 Signification de CH

Il y a quelque désaccord sur la signification de CH en mathématiques constructives. Certains pensent que la nature du continu est un problème de base et que CH affirme donc quelque chose de fondamental. D'autres pensent que CH tient son origine dans le point de vue Cantorien sur la *taille* des ensembles, et donc ne concerne pas le point de vue constructif. Ils soulignent que l'inconsistance de CH et CT montre à l'évidence que CH ne saurait être une question fondamentale.

L'auteur pense que le CH classique est réellement "signifiant" pour trois raisons :

– du point de vue de la taille (ou cardinalité)

– du point de vue de la possibilité de bien ordonner le continu par des ordinaux dénombrables (ce qui contient des éléments de taille et des éléments de structure)

– et du point ce vue de la théorie descriptive des ensembles (structure et non taille).

Constructivement , le premier point de vue ne semble pas avoir beaucoup de sens, mais les 2 autres en ont. Comme nous allons le voir :

8.3.4 CH et la théorie descriptive des ensembles

Cantor lui-même a essayé de vérifier CH pour des ensembles définis de manière relativement simple : cet effort a conduit à la théorie descriptive des ensembles. Classiquement on définit les *ensembles analytiques* comme les parties de $\mathbb{R}$ images continues d'ensembles fermés de $\mathbb{R}$ (ou, ce qui revient au même : images continues de boréliens). On démontre que tout ensemble analytique est ou bien dénombrable, ou bien contient un ensemble parfait (image homéomorphe de $2^{\mathbb{N}}$)

Veldman [52] traite la théorie descriptive des ensembles dans le cadre de l'intuitionnisme Brouwérien, et montre par exemple que de nouveaux ensembles sont rajoutés à chaque niveau de la hiérarchie borélienne. L'auteur ne connait pas d'investigations sur ce sujet dans le cadre de Bishop, par exemple concernant les ensembles hyperarithmétiques.

L'analogue de CH pour les parties fermées de $\mathbb{R}$ est le théorème de Cantor Bendixson, car une image continue injective de $2^{\mathbb{N}}$ est un ensemble parfait .

Kreisel [32] montre que ce dernier théorème est en défaut, même avec la logique classique, dans les modèles où tout réel est hyperarithmétique. Mais la version considérée par Kreisel est mise sous une forme plus forte : tout ensemble fermé est réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait. Il montre que la partie dénombrable peut ne pas être hyperarithmétique. Mais cela ne fournit pas pour autant un résultat d'indépendance du théorème de Cantor-Bendixson pris sous la forme : tout partie fermée de $\mathbb{R}$ productive sur $\mathbb{N}$ possède un sous-ensemble parfait.

Nous pouvons établir les questions d'indépendance formelle pour ce théorème :

Théorème : WCT est en conflit avec le théorème de Cantor-Bendixson . En particulier Cantor-Bendixson est indérivable dans $HA^{\omega} + BP_0 + FT$.

Démonstration : Soit X l'ensemble des index de fonctions récursives totales, nous pouvons le considérer comme un ensemble fermé de nombres réels. Comme en 8.3.1 WCT prouve que $\neg\neg\,\Pi(X,\mathbb{N})$. Donc par Cantor-Bendixson $\neg\neg$ (X possède un sous-ensemble parfait). D'où, comme en 8.3.1 une contradiction.

8.3.5 CH et ordinaux dénombrables

Soit O_1 la classe des ordinaux dénombrables (définie de la manière qui vous paraîtra la meilleure). Une des versions de l'hypothèse du continu est :

OCH Il y a une fonction de O_1 sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

En accord avec notre intention établie au départ de ne pas discuter les problèmes reliés aux ordinaux, nous ne dirons rien de plus sur OCH.

8.4 Sous-énumérabilité des ensembles discrets

Nous dirons qu'un ensemble X est discret si l'égalité y est décidable :

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X \quad (x =_X y \ \text{ ou } \ x \neq_X y)$$

Les seuls ensembles discrets naturels que nous connaissions sont des parties de $\mathbb{N}$ ou sont en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. En particulier ils sont sous-énumérables. Considérons :

SCDS Tous les ensembles discrets sont sous-énumérables.

Un cas spécialement intéressant est

$SCDS_0$ Les parties discrètes de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont sous-énumérables.

Ces principes ont reçu une certaine attention, en partie en tant que cas spécial du principe suivant :

SCMS Tout espace métrique a une base sous-énumérable

(cette idée semble remonter à l'appendice A du livre de Bishop)

Notes techniques :

(i) SCMS est consistant avec ZF intuitionniste où l'axiome de l'ensemble des parties est remplacé par l'axiome d'exponentiation, puisqu'il résulte de SC (cf. 3.4) qui est prouvé consistant dans [24]. De même SCMS est consistant avec les théories de Feferman, puisque "l'univers V est énumérable" y est consistant. Comme $SCDS_0$ est classiquement faux, il ne peut être démontré dans les théories formelles qui sont classiquement vraies. $SCDS_0$ résulte de CT puisqu'alors $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est lui-même sous-énumérable.

Problèmes : Est ce que SCMS (ou même $SCDS_0$) est consistant avec ZF intuitionniste ? Avec ZF intuitionniste + CT ?

(ii) Myhill a posé la question : est ce que les théories constructives sont closes pour la règle de déduction correspondant à SCDS . Troelstra [51] montre qu'en général non. Son argument marche pour ZF intuitionniste et en général pour les théories classiquement valides et avec axiome d'ensemble des parties. Nous présentons ici une amélioration de son exemple, qui ne nécessite plus l'ensemble des parties :

Soit $S = \{ \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est discret mais pas sous-énumérable$\}$

On peut démontrer que S est discret puisque dés qu'il y a un élément dans S , il est discret. Supposons maintenant que S soit sous-énumérable : alors S est forcément sans élément (s'il en avait un, il serait égal à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, qui, lui, ne serait pas sous-énumérable). Comme S est vide on a : $\neg$ ($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est discret mais pas sous-énumérable)

Enfin cette conclusion est, classiquement, fausse, et donc ne peut être obtenue dans une théorie classiquement vraie . Ainsi

Théorème : Soit T une théorie classiquement vraie qui soit une extension de l'arithmétique intuitionniste du second ordre. Alors T n'est pas close pour les règles de déduction correspondant à SCDS ou $SCDS_0$.

(iii) Il n'y a pas eu d'étude sur les relations entre ces principes et les principes intuitionnistes.

8.5 Extensionnalité

Dans la théorie classique des ensembles, les ensembles sont complètement déterminés par leurs éléments. Ainsi l'ensemble des exposants n pour lesquels la conjecture de Fermat convient est égal à $\mathbb{N}$ (si du moins la conjecture est vraie) , sans égard à la manière inhabituelle dont il a été défini. En mathématiques constructives, ce n'est plus le cas : nous pouvons être capables de dire des choses sur l'ensemble des exposants de Fermat en relation directe avec leur définition. Mais il se passe aussi qu'on n'a jamais *besoin* de telles considérations en mathématique courantes. Et en fait les mathématiques peuvent être développées sans secousses dans une théorie des ensembles extensionnelle avec logique intuitionniste (cf [42] et [24]).

La question est :

> Est-ce que l'extensionnalité peut être adoptée comme un principe valable constructivement ? sinon ; vu que ces théories formelles sont consistantes (sous l'hypothèse que ZF est consistant), comment les interpréter constructivement ?

Supposons que notre "univers voulu" d'ensembles (notre "modèle standard naturel") soit réfléchi comme une hiérarchie cumulative, ou quelque chose d'analogue constructivement. (Si nous refusons l'ensemble des parties et l'axiome de collection nous pouvons penser à $R_{\omega+\omega}$ ([51])). Alors nous pouvons *définir* une égalité extensionnelle par induction sur la relation $\in$: X et Y sont égaux si et seulement si tout élément de X est égal à un l'élément de Y et vice versa. Alors les théories extensionnelles seront valides, avec cette interprétation de l'égalité, pour les propriétés invariantes sous cet égalité (cet écrasement). Cela semble la justification la plus "serrée" que l'on puisse donner constructivement pour l'extensionnalité : les idées de règle et de démonstration sont fondamentalement intensionnelles. Ainsi de telles

[51] Axiome de collection : (plus fort que l'axiome de remplacement, il y a comme de l'axiome du choix dedans)

$$\forall x \in a\ \exists y\ \ \phi(x,y) \Rightarrow \exists b\ \forall x \in A\ \exists y \in b\ \ \phi(x,y)$$

$R_{\omega+\omega}$: on construit (à partir de $\emptyset$) et par induction jusqu'à $\omega+\omega$, les ensembles au moyen des constructions autorisées dans les axiomes (exponentiation, séparation, remplacement, union).

théories (extensionnelles) ne peuvent jamais être adéquates aux concepts de règle et de preuve mais elles sont adéquates au "fragment classique" des mathématiques constructives."

Définition : Une affirmation ϕ est *classiquement intelligible* si elle ne fait mention que de nombres, ensembles, fonctions, relation $\in$ (et non de règles de preuves).

Aussi bien [42] que [24] peuvent être compris comme des tentatives de donner une axiomatisation classiquement intelligible du fragment classiquement intelligible des mathématiques constructives. (il s'agit d'une affirmation plus réaliste sur les buts des auteurs que si on supprimait "classiquement intelligible"). Ont-ils réussi ?

Appliquons leur les critères (de Feferman) d'*adéquation* et de *fidélité* ([52]) : clairement ces théories sont adéquates et, mis à part l'extensionnalité (et peut être les axiomes d'existence d'ensembles les plus puissants) , elles sont fidèles. Si l'axiome d'extensionnalité est omis, elles deviennent fidèles ; mais elles deviennent aussi classiquement moins intelligibles (dans le sens informel des mots : moins intelligibles pour les mathématiciens ordinaires). Nous pouvons les décrire comme adéquates et fidèles au fragment classiquement intelligible de la théorie constructive des ensembles bien-fondés et héréditairement extensionnels.

Les théories de Feferman, d'autre part, ont toujours voulu axiomatiser la théorie des règles aussi bien que la théorie des ensembles. Et le modèle voulu pour les ensembles n'était pas une hiérarchie bien fondée (cf Note technique ci dessous). Aussi n'est il pas surprenant que l'extensionnalité puisse être réfutée dans les théories de Feferman. Ceci ne doit pas être considéré comme entrant en conflit avec l'approche Myhill/Friedman, puisque les modèles voulus ne sont pas les mêmes. La réfutation de l'extensionnalité dans les théories de Feferman provient de (ENUM), aussi n'est ce pas un argument décisif contre l'extensionnalité en mathématiques ordinaires.

Notes techniques :
Le principe d'extensionnalité est

Ext $\quad \forall x\,(x\in w \Leftrightarrow x\in z) \Rightarrow w=z$

(i) L'impression que seuls les ensembles extensionnels sont nécessaires en mathématiques est justifié formellement par la consistance de : ZF intuitionniste + thèse de Church.

(ii) L'extensionnalité est inconsistante avec les théories de Feferman.

Théorème (Gordeev) : Ext + EM_0 est inconsistant.

Démonstration : définissons $\emptyset = \{x : x \neq x\}$ puis $g(z,f) = \{ x \in \{\emptyset\} : x = f(z)\}$. Par le théorème de récursion introduisons un f tel que $f(z) \cong g(z,f)$. Puisque g est totale , f l'est également. Nous avons $f(z) = \{x\in \{\emptyset\} : x = f(z)\}$. En particulier $f(f) = \{x\in \{\emptyset\} : x = f(f)\}$.

1) Si $f(f) = \emptyset$ alors $\emptyset \in f(f)$, ce qui est une contradiction

2) Si $x \in f(f)$, alors $f(f) = \emptyset$, contradiction. D'où $\forall x \; x \notin f(f)$. En utilisant l'extensionnalité, nous concluons $f(f) = \emptyset$, contradiction.

(iii) Extensionnalité pour les opérations :

---

[52] Adéquation et fidélité sont des concepts informels qui s'appliquent à une théorie formelle T sensée formaliser un certain corps de mathématiques M. Il y a adéquation si les concepts de base , résultats et argument du corps de mathématiques M ont leur traduction dans T.
Il y a fidélité si les concepts de base de T sont tous traduction de concepts de base de M.
Par exemple S_0 de Beeson [11] est construit dans le but d'être à la fois adéquat et fidèle pour le corps de mathématiques NCM.

le principe $(\forall x\, f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g)$ est également contradictoire avec EM_0 [23].

(iv) Théories des ensembles non extensionnelles.

On peut formuler des théories des ensembles sans extensionnalité ; dans ce cas il est important d'inclure des termes pour nommer les ensembles affirmés exister dans les axiomes. On trouve alors que les théories avec extensionnalité sont conservatives sur (c-à-d: ne démontrent rien de plus que) les théories correspondantes sans extensionnalité, pour une classe de formules closes vraiment large, en particulier pour toutes les formules arihmétiques (cf [7]). La démonstration se fait en formalisant le modèle discuté dans le texte ci-dessus. Plus la théorie est faible et plus difficile est la démonstration.

9 - CONTINUITE ET NATURE DU CONTINU

9.1 Continuité uniforme et Thèse de Church

Avec CT il est possible de construire une fonction non bornée (et donc non uniformément continue) de $2^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$. Par exemple définissons $F(f) \doteq$ le plus petit n tel que f(n) $\notin$ arbre singulier de Kleene, mentionné dans 3.1 (cet arbre a 2 embranchements au maximum par noeud, est infini, mais ne contient pas de branche infinie récursive). Alors F est non bornée puisque l'arbre contient des branches de longueur arbitrairement grande. Dans [3] une construction classique due à Lacombe est constructivisée pour fournir une fonction non bornée de [0,1] dans $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une illustration dramatique du conflit entre CT (ou plutot FCT) et l'intuitionnisme, puisque dans l'intuitionnisme toute fonction définie sur [0,1] est uniformément continue.

9.2 Continuité et Thèse de Church

Ceitin (en Russie) et Kreisel, Lacombe et Shoenfield (à l'ouest) ont démontré que (une extension de) la thèse de Church, plus MP , impliquent que les fonctions de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ sont continues. Ce fut considéré, au moins à l'ouest, comme un problème de théorie de récursion classique : l'affirmation de continuité est une affirmation arithmétique, que l'on note KLS[53], à propos des opérations effectives.

Note technique :

Ce théorème fournit des résultats de consistance pour la plupart des théories constructives (cf [5] et [7]). Les théories de Martin-Löf font exception, et sont traitées par une autre méthode en [9].

[53] d'après le nom des auteurs occidentaux du théorème. L'affirmation est la suivante : si $\{e\}(f)$ est définie chaque fois que la semifonction récursive $\{f\} : n \longmapsto \{f\}(n)$ est totale (i.e. partout définie), si en outre $\{e\}(f) = \{e\}(g)$ chaque fois que $\{f\}$ et $\{g\}$ sont totales et égales (en tant que fonctions), alors, pour toute $\{f\}$ totale il existe un entier n tel que, pour toute $\{g\}$ totale coïncidant avec $\{f\}$ pour les arguments 0, 1, ..., n , on ait $\{e\}(f) = \{e\}(g)$. La fonction $\{f\}$ (totale) $\longmapsto$ $\{e\}(f)$ est appelée une opération effective. Le lecteur pourra vérifier qu'on peut écrire KLS au moyen des opérations logiques ordinaires en utilisant la fonction primitive récursive $\phi(e,n,p)$ définie dans l'encadré concernant le codage des semifonctions récursives (juste avant le chapitre 2). KLS est donc bien une affirmation de nature arithmétique.

9.3 La continuité et le nouveau constructivisme

Pour l'école de Markov, le théorème de Ceitin établit la continuité. Pour les intuitionnistes, elle est vraie à la manière d'une évidence. L'attitude de Bishop à cet égard consiste à dire que nous ne serons sans doute jamais capables de résoudre le problème : " une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle continue ? " (et/ou uniformément continue sur les compacts). Néanmoins Bishop restreint son attention aux fonctions uniformément continues sur les compacts. La cohérence de cette pratique a été démontrée par son livre. Les mathématiciens (la plupart) sont satisfaits comme cela. Mais il existe des questions techniques pour les méta-mathématiciens :

Notes techniques :

(i) la consistance de diverses théories avec le principe de continuité uniforme est établie en [5] ,[7], [9].

(ii) l'indépendance des principes de continuité par rapport à certaines théories contenant CT résulte de la non démontrabilité de KLS dans HA [2] . La non démontrabilité dans HAS a été prouvée dans [6] ; et celle dans ZF intuitionniste + CT dans [12].

(iii) des règles de dérivation, de la forme :
si $\vdash$ «F : X $\to$ Y», alors $\vdash$ «F est continue et uniformément continue sur les compacts» sont démontrées pour les théories de Feferman, dans [5], et pour des théories constructives des ensembles dans [7]. Ici X est un espace métrique séparable complet (on a une démonstration formelle de ce fait) et Y est un espace métrique séparable (idem). Dans [9] les fonctions prouvées être définies dans les théories de Martin-Löf sont montrées être continues.

(iv) des règles de dérivation pour la continuité (mais pas pour la continuité uniforme) sont valables dans HA + CT (cf [4]) . Mais ces règles ne sont pas démontrées pour des théories assez fortes, par exemple ZF intuitionniste + CT.

(v) problème ouvert : démontrer la consistance de :
« ZF intuitionniste – ensembles des parties + exponentiation + "les fonctions de $2^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ sont uniformément continues" + BP_0 + "tous les ensembles sont sous-énumérables". »
Friedman [24] prouve la consistance de "tous les ensembles sont énumérables", et c'est la seule preuve connue, mais dans son interprétation, l'uniforme continuité n'est pas vérifiée.

9.4 Heine-Borel

Considérons le théorème de Heine Borel sous la forme

HB Si une suite d'intervalles ouverts (J_n) recouvre $[0,1]$, alors, pour un certain k ,

$$\bigcup_{n\leq k} J_n \supseteq [0,1]$$

Contrairement aux principes de continuité, il est difficile d'affirmer qu'un tel principe n'est pas pertinent dans la pratique mathématique. Il y a des exemples (faute de place nous ne les donnons pas) de théorèmes mathématiques dont les démonstrations sont entièrement constructives hormis un recours à HB , et que nous aimerions prouver constructivement, et que nous "sentons" être vrais. Naturellement HB résulte de FT , donc est valable pour l'école intuitionniste. Les constructivistes russes, d'autre part, doivent renoncer à l'espoir de prouver HB , que réfute CT . Pour l'école de Bishop, cela reste un problème ouvert, et le restera sans doute longtemps encore, vue son indépendance par rapport aux théories formelles constructives connues (adaptées à Bishop).

Note technique :

Tout au moins, la règle de dérivation correspondant à HB est valide pour la plupart des théories constructives connues : Si la suite (J_n) est prouvée recouvrir [0,1], alors il y a une preuve pour un recouvrement fini (cf [5] et [7]).

9.5 Connexité

Un espace métrique X est dit "*fortement connexe*" si tout ouvert fermé de X contenant au moins un élément, contient X. Bridges [16] définit « X est *connexe* » par : tout ouvert fermé A, avec au moins un élément, et *situé* ([54]), contient X. Il démontre que [0,1] est "connexe". Soit **SCN** l'affirmation que [0,1] est fortement connexe. En un certain sens cela signifie que le continu n'a pas de "trous". Autant que l'auteur sache, Brouwer n'a jamais considéré SCN, mais il a utilisé les principes de continuité pour démontrer l'impossibilité de séparer le continu en 2 parties disjointes (ouvertes ou non). Une autre manière de rendre précise l'idée de "trou" est celle-ci : un trou est une suite strictement croissante de rationnels sans borne supérieure. Soit **NG** l'affirmation qu'il n'y a pas de tels trous dans les réels. ([55]) On a alors les relations suivantes entre NG, SCN, MP, WCT :

Proposition :

(i) SCN + MP $\Rightarrow$ NG
(ii) (Specker) WCT réfute NG
(iii) MP + WCT + SCN est inconsistant

Démonstration : (iii) résulte des 2 autres.
(ii) a été prouvé par Specker [46] qui exhibe une suite croissante récursive de rationnels dont la limite supérieure n'est pas un réel récursif ([56])
Démontrons (i) : soit une suite r_n croissante de rationnels, sans borne supérieure majorée par 1/2. Soit $X = \{ x \in [0,1] : \exists n \ x < r_n \}$. Alors X est ouvert. Nous allons montrer que X est fermé : soit z_n une suite de Cauchy dans X et z sa limite. On veut montrer $z \in X$. Puisqu'on a MP, il suffit de montrer $\neg\neg\, z \in X$ (en effet $z \in X$ se met sous forme $\exists n \exists p \ x_p + 1/p < r_n$). Si $z \notin X$ alors $\forall n \ z \geq r_n$, mais puisque tous ces z_m sont dans X, z est borne supérieure de r_n. Contradiction. Donc $z \in X$. Donc X est fermé. Par SCN, X = [0,1] contradiction, cqfd.

Cela montre que selon la philosophie de Markov, les réels sont "non connexes", quoique ce soit au moyen de parties non situées qu'on puisse les déconnecter. (Mais rappelez-vous le théorème de Bridges). Les disciples de Bishop préfèrent décrire la situation comme suit : il n'y

---

[54] c.à.d. : d(x,A) est une fonction (calculable) de x.

[55] l'affirmation qu'il n'y a pas de tels trous est une *sorte de double négation* du fait (et non l'affirmation du fait) que toute suite croissante majorée de rationnels a une borne supérieure.

[56] On peut prendre $s_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{3^{f(p)}}$ où f est une fonction récursive injective dont l'image est récursivement énumérable mais non récursive. Pour connaitre la limite avec une approximation meilleure que 1/2, il faut savoir si 0 est dans l'image de f, meilleure que 1/6, il faut savoir si 0 et 1 sont dans l'image etc...

a pas moyen d'éliminer la possibilité de quelque ouvert fermé non localisé déconnectant les réels, mais on n'arrivera sans doute jamais non plus à en construire un. Une telle affirmation est évidente lorsqu'on se restreint aux méthodes constructives qui sont aussi classiquement valides, puisque de telles méthodes ne contrediront jamais SCN , valide classiquement. Donc l'indépendance de SCN est établie pour les constructivistes à la Bishop.

L'indépendance de SCN du point de vue intuitionniste est une question beaucoup plus délicate. Si MP pouvait être éliminé du (i) de la proposition précédente, on pourrait utiliser la consistance de WCT avec BP_0 + FT pour montrer la non démontrabilité de SCN à partir de BP_0 + FT. Nous ne savons pas si c'est le cas. Bref les liens entre SCN et NG (sans MP) ne sont pas connus. Néanmoins

Théorème : (i) SCN est consistant avec ZF intuitionniste + DC + FT + BP_0
(ii) (Grayson) SCN ne peut être démontré dans cette théorie.

Question : Y a-t-il quelques endroits où SCN serait nécessaire pour des démonstrations constructives ?

9.7 Le schéma de Kripke.

Rappel (2.5) KS : $\exists\alpha\ (\exists n\ \alpha(n) \neq 0 \Leftrightarrow A)$

Ce schéma n'a de sens que si on autorise α à varier, non seulement sur les i.p.s., mais également parmi les fonctions générées par le sujet créatif. Il est alors peu surprenant que KS entre en conflit avec CT . Plus généralement KS est en conflit avec ENUM (Luckhart, publié en [8] et [10]). Puisque le "sujet créatif" est une théorie controversée, les logiciens ont cherché à établir des résultats de consistance pour des systèmes contenant KS et (d'autres) principes intuitionnistes. Une histoire de ces efforts peut être trouvée dans l'introduction de [44].
L'état actuel des résultats est la consistance de ZF intuitionniste + BI_M + FT + BP_0 + KS.
On n'a aucun résultat de consistance avec les théories de Feferman.
On ne sait pas si KS + BP_0 prouve FT .
Scedrov a montré que KS + BP_0 sans paramètre ne prouve pas BI_M.
Myhill [42] a observé que KS est en conflit avec le principe de Brouwer pour les fonctions BP_1 . Cela a conduit beaucoup de gens à rejeter BP_1 quoique jusqu'alors, BP_1 ait semblé parfaitement respectable.
D'autre part, les intuitionnistes de l'école de Nijmegen préfèrent accepter BP_1 et restreindre KS aux propriétés "déterminées", c.à.d par définition ces propriétés qui ne dépendent pas de l'activité future du sujet créatif, mais sont déterminées aujourd'hui. Il n'y a pas encore d'étude logique de cette notion, mais voyez [25] pour des explications.

KS + BP_0 réfute le principe de Markov avec paramètres . Cela semble avoir motivé Brouwer pour KS . Pour le voir : utiliser MP et KS pour montrer $\neg\neg A \Rightarrow A$, d'où la logique classique. Mais BP_0 est en conflit avec la logique classique.

Quelques notations utilisées dans le texte

Sauf précision contraire, les minuscules latines désignent des entiers, les majuscules latines désignent des parties de $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers positifs ou nuls), les minuscules grecques des suites d'entiers.
Si $[n_1,...,n_k]$ est une liste (ou suite finie) d'entiers, on note $<n_1,...,n_k>$ un nombre entier qui code la liste dans un codage injectif prédéfini une fois pour toutes. Par exemple, on peut écrire les n_i en base 2 (avec les seuls chiffres 0 et 1), traduire les virgules par des chiffres 2 et considérer le nombre obtenu en base 3 avec l'écriture : " $,\alpha(0),...,\alpha(n-1)$ ". Le codage particulier choisi n'a aucune importance du moment qu'il est parfaitement explicite. On appelle *nombre suite* tout nombre entier qui code une suite finie d'entiers dans le codage prédéfini.
En particulier, $<>$ désigne le code de la liste vide, et si n et m sont deux entiers, le nombre $<n,m>$ code le couple (n,m).
Si s et t sont des nombres suites, qui codent des listes $[n_1,...,n_k]$ et $[m_1,...,m_h]$ on note $s * t$ le code de la liste concaténée $[n_1,...,n_k,m_1,...,m_h]$.
Lorsque le contexte est clair, nous écrivons $s \subset t$ pour dire que s et t sont des nombres suites et que s est un "segment initial de t " (en tant que suites finies, t prolonge s).
Si α est une suite d'entiers, on notera $\overline{\alpha}(n)$ le nombre entier qui code la liste (ou suite finie) $[\alpha(0),...,\alpha(n-1)]$ dans le codage prédéfini.
Si e et n sont des entiers, on note $\{e\}(n)$ le résultat du calcul mécanique codé par e lorsque l'entrée est n . On suppose par exemple qu'on a numéroté les textes de programmes Pascal utilisant uniquement des variables dans $\mathbb{N}$ et ayant exactement une entrée et une sortie. Le *résultat de l'exécution* du programme numéroté e lorsque l'entrée est prise égale à n est la sortie, c.-à-d. un entier m , si le programme aboutit à Stop, sinon le résultat est «non défini».

Liste d'abréviations utilisées pour désigner des systèmes formels ou informels

BON — Théorie de Base des Opérations et des Nombres : cf. 3.3 . Cette théorie est notée EON dans [Bee]. C'est une extension de la logique combinatoire (cf. [Kri]).

CST — Théorie constructive des ensembles de J. Myhill. (Constructive Set Theory) basée sur une version intuitionniste de ZF. Voir [Bee] chap VIII.

EM_0 — Théorie constructive des règles et des ensembles, de Feferman, basée sur BON. Voir [Bee] chap X.

HA — Arithmétique de Heyting : système formel utilisant la logique constructive formalisée par Heyting et décrivant les entiers naturels. C'est pour l'essentiel la version intuitionniste du système de Peano. Pour faciliter les choses, on augmente beaucoup les symboles prédéfinis. Alors que dans Peano, les seuls symboles de fonction prédéfinis sont l'addition et la multiplication, dans HA, on rajoute un symbole de fonction, avec les axiomes correspondants, pour toute (définition de) fonction primitive récursive. (Les fonctions primitives récursives sont celles obtenues par composition et récurrence simple à partir de l'addition.) La plus grande partie des mathématiques constructives usuelles concernant les entiers naturels est couverte par les fonctions primitives récursives. Si f est une fonction primitive récursive, Gödel a montré qu'on peut construire une formule $A(m,n)$ dans le langage de Peano telle que $A(m,n)$ soit équivalente à $m = f(n)$. Mais la formule $A(m,n)$ contient des quantificateurs, alors que du point de vue des fondements, la relation $m = f(n)$ est une relation «très simple» (facile à tester). Aussi le système HA est plus adapté aux études concernants les fondements. L'autre particularité de HA est qu'il est fondé sur la logique intuitionniste et non sur la logique classique. Le système HA est ainsi un système de base incontesté, à la fois simple, constructif et suffisament puissant.

HA^{ω} Arithmétique de Heyting étendue aux types finis : 0 est le type des entiers naturels, $(0)0$ est le type des opérations de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, plus généralement si σ et τ sont deux types finis $(\sigma)\tau$ est le type des opérations prenant comme entrée un objet de type σ et donnant en sortie un objet de type τ . Dans HA^{ω} il y a des variables distinctes pour chaque type fini, et on prend des axiomes convenables du point de vue constructif. Cf. [Bee] chap V p 88-92.

HAS Arithmétique de Heyting du second ordre, on étend HA en rajoutant des variables pour les parties de $\mathbb{N}$ et des axiomes convenables d'un point de vue constructif

ML_0 (La plus simple des) théorie des types intuitionniste de Martin-Löf, système formel extrêmement intensionnel, très étudié pour les besoins de l'informatique théorique Cf. [Bee] chap. XI . Pour d'autres systèmes de types, voir [Kri].

NCM Nouvelles mathématiques constructives, dans le style Bishop (cf. Bishop E., Bridges D. : Constructive Analysis. (Springer-Verlag; 1985) .)

ZF Théorie formelle des ensembles de Zermelo-Frankel. Pour les versions intuitionnistes de ZF voir [Bee] chap VIII.

Liste des principes discutés dans le texte

Divers principes, avec leur notation abrégée :

AC! Axiome de non choix

$$[\forall x\in X\ \exists!\ y\in Y\ \phi(x,y)] \Rightarrow \exists F : X \to Y\ \forall x\in X\ \phi(x,Fx)$$

A-P Affirmer c'est prouver : $\phi \Leftrightarrow \exists p$ (p est une preuve de ϕ)

$AC_{1,0}$ $\forall\alpha\,\exists m\, A(\alpha,m) \Rightarrow \exists f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}\ (\forall\alpha\ A(\alpha,f(\alpha)))$ (où f est une fonction)

BI_M Bar-induction monotone.

Soit une propriété R concernant les nombres suites et vérifiant:

- $(s \subset t$ et $R(s)) \Rightarrow R(t)$
- $\forall\alpha\ \exists n\ R(\overline{\alpha}(n))$

Supposons que A soit une propriété "progressive" concernant les nombres suites, c.-à-d. que si $A(t * \langle n\rangle)$ est vrai pour un nombre suite t quelque soit n , alors $A(t)$ est vraie. Alors : $(\forall t\ (R(t) \Rightarrow A(t))) \Rightarrow A(\langle\rangle)$

BP_0 Principe de Brouwer pour les nombres

$$\forall\alpha\ \exists n\ R(\alpha,n) \Rightarrow \forall\alpha\ \exists m,n\ \forall\gamma\ [\ \overline{\alpha}(m) = \overline{\gamma}(m) \ \Rightarrow\ R(\gamma,n)\ ]$$

COMP Tout calcul procède par étapes successives

$\forall f\ \exists g\ [\forall x,n\ (g(x,n) = 0$ ou $g(x,n) = 1)$ et $\forall x\ (f(x)$ est définie $\Leftrightarrow \exists n\ g(x,n) = 1)\ ]$

CH Hypothèse du continu : $[\ S \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\Pi(S,\mathbb{N})\ ] \Rightarrow (\exists f : 2^{\mathbb{N}} \to S$ injective$)$ (où $\Pi(X,Y)$ signifie que pour toute fonction f de Y vers X on peut trouver dans X un élément qui n'est pas dans l'image de f)

CT Thèse de Church $\forall a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \exists e\ \forall n\ (\{e\}(n) = a(n))$

DC Axiome du choix dépendant

$(\forall x{\in}X\ \exists y{\in}X\ \phi(x,y)$ et $a{\in}X) \Rightarrow \exists f : \mathbb{N}{\to}X\ \ (f(0) = a$ et $(\forall n\ \phi(f(n), f(n+1))\ )\ )$

DP Schéma de décidabilité des preuves : Soit une propriété $\phi(x)$, alors :

$$\forall q,x\ \ (Prf_{\phi}(q,x) \text{ ou } \neg Prf_{\phi}(q,x)\ )$$

ECT_0 Thèse de Churche étendue. Une formule de HA est dite presque négative, si elle est construite à partir des formules du type $f(m,..) = 0$, ou $\exists m\ f(m,...) = 0$ par utilisation des seuls symboles logiques $\forall$, $\Rightarrow$, & . ECT_0 est formulé en utilisant une formule presque négative $A(n)$, une formule $B(m,n)$ et la fonction ϕ donnée dans l'encadré sur le codage des calculs mécaniques. (avant le chapitre 2)

$$\forall n\ [\ A(n) \Rightarrow \exists m\ B(m,n)\ ] \quad \Rightarrow$$
$$\exists e\ \forall n\ \ [\ A(n) \Rightarrow \exists p\ \exists m\ (\ B(m,n)\ \&\ \phi(e,n,p) = 1+ m\ )$$

ENUM On peut énumérer les opérations non partout définies : $\exists u\ \forall e,x\ \ e(x) \equiv u\ (e,x)$

FCT Fausse Thèse de Church $\forall\alpha\ \exists e\ \forall n\ (\{e\}(n) = \alpha(n))$

FT Théorème de l'éventail. Si une propriété R concernant les nombres suites vérifie :

$$(\ s \subset t \text{ et } R(s)\ ) \Rightarrow R(t)$$

Alors :

$$\forall\ \alpha{\in}\ 2^{\mathbb{N}}\ \exists n\ \ R(\overline{\alpha}(n)) \Rightarrow \exists m\ \forall\gamma \in 2^{\mathbb{N}}\ R(\ \overline{\gamma}(m))$$

HB Heine-Borel : Si une suite d'intervalles ouverts J_n recouvre $[0,1]$, alors, pour un certain k , $\bigcup_{n\leq k} J_n \supseteq [0,1]$

KS Schéma de Kripke : Pour toute propriété A : $\exists\alpha\ (\ (\exists n\ \ \alpha(n) \neq 0) \Leftrightarrow A\ )$

MP Principe de Markov : Pour x réel $\neg\,(\ x \leq 0\ ) \Rightarrow x > 0$

OCH Hypothèse du continu, version ordinaux.

Il y a une fonction de O_1 (classe des ordinaux dénombrables) sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

L'univers est énumérable $\exists f\ \forall x\ \exists n\ f(n) = x$

SC Tous les ensembles sont sous-énumérables.

SCDS Tous les ensembles discrets sont sous-énumérables. (c.-à-d. en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$)

$SCDS_0$ Les parties discrètes de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont sous-énumérables.

SCMS Tout espace métrique a une base sous-énumérable

SP Principe de Sanin : $\forall X\ \exists Y\ \forall n\ \ (\ n \in X \Leftrightarrow \exists z\ <z,n> \notin Y\ )$

UP Principe d'uniformité : $\forall X{\subseteq}\mathbb{N}\ \ \exists m\ \phi(X,m) \Rightarrow \exists m\ \forall X{\subseteq}\mathbb{N}\ \ \phi(X,m)$

UP' Toute opération de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathbb{N}$ est constante

UP_1 $\forall X\ \exists m\ \phi(X,m) \Rightarrow \exists m\ \forall X\ \phi(X,m)$

UP_2' Toute opération de $\mathcal{P}(\{0\})$ vers $\mathbb{N}$ est constante

WCT Fausse Thèse de Church affaiblie $\forall\alpha\ \neg\neg\ \exists e\ \forall n\ (\{e\}(n) = \alpha(n))$

Bibliographie

[1] Barendregt, H., Normed uniformly reflexive structures, in: Böhm, C. (ed.), Calculus and Computer Science Theory, Lecture Notes in Computer Science No. 37 (Springer, Berlin, 1975) .

[2] Beeson, M., The non-derivability in intuitionistic formal systems of theorems on the continuity of effective operations, J. Symbolic Logic 40 (1975) 321-346 .

[3] Beeson, M., The unprovability in intuitionistic formal systems of the continuity of effective operations on the reals, J. Symbolic Logic 41 (1976) 18-24.

[4] Beeson, M., Derived rules of inference related to the continuity of effective operations, J. Symbolic Logic 41 (1976) 328-336.

[5] Beeson, M., Principles of continuous choice and continuity of functions in formal systems for constructive mathematics, Annals of Math. Logic 12 (1977) 249-322 .

[6] Beeson, M., Continuity and comprehension in intuitionistic formal systems, Pacific J. Mathematics 68 (1977) 29-40.

[7] Beeson, M., Continuity in intuitionistic set theories, in: Boffa, van Dalen, and McAloon (ed.), Logic Colloquium '78 (North-Holland, Amsterdam, 1979).

[8] Beeson, M., A theory of constructions and proofs, preprint, University of Utrecht, 1979. See [10].

[9] Beeson, M., Recursive models of constructive set theories, Annals of Math. Logic. 23 (1982) 127-128.

[10] Beeson, M., published version of [8], with G. Renardel; submlitted to JSL.

[11] Beeson, M., Formalizing constructive nlathematics: why and how?, in: Richman, F. (ed.), Constructive Mathematics, Proceedings, New Mexico, 1980, Lecture Notes in Mathematics No. 873 (Springer, Berlin, 1981).

[12] Beeson, M., and Scedrov, A., Church's thesis, continuity, and set theory, J. Symbolic Logic 49 (1984) 630-643.

[13] Bishop, E., Foundations of Constructive Analysis (McGraw-Hill, New York, 1967).

[14] Bishop, E., Mathematics as a numerical language, in: Myhill, Kino, and Vesley (eds.), Intuitionism and Proof Theory (North-Holland, Amsterdalll, 1970).

[15] Bishop, E., and Cheng, H., Constructive measure theory, Am. Math. Soc. Memoir No. 116 (1972).

[16] Bridges, D., Constructive Functional Analysis (Pitman, London, 1979).

[17] Brouwer, L.E.J., in: Heyting, A. (ed.) Collected Works, Vol. I (North-Holland, Amsterdam, 1975).

[18] van Dalen, D., A note on spread-cardinals, Compositio Mathematica 20 (1968) 21-28.

[19] Diaconescu, R., Axiom of choice and complementation, Proc. A.M.S. 51 (1975) 176-178.

[20] Dummett, M., The philosophical foundations of intuitionistic logic, in: Rose and Shepherdson (eds.), Logic Colloquium '73 (North-Holland, Amsterdam, 1975).

[21] Dummett, M., Elements of Intuitionism (Oxford University Press, Oxford, 1977).

[22] Feferman, S., A language and axioms for explicit mathematics, in: Algebra and Logic, Lecture Notes in Mathematics No. 450 (Springer, Berlin, 1975).

[23] Feferman, S., Constructive theories of functions and classes in: Boffa, van Dalen, and McAloon (eds.), Logic Colloquium '78 (North-Holland, Amsterdam, 1979).

[24] Friedman, H., Set theoretic foundations for constructive analysis, Annals of Math 105 (1977) 1-28.

[25] Gielen, W., de Swart, H., and Veldman, W., The continuum hypothesis in intuitionism, J. Symbolic Logic 46 (1981) 121-136.

[26] Gilbard, D., and Trudinger, N.S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (Springer, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1977).

[27] Greenleaf, N., Liberal constructive set theory, in: Richman, F. (ed.) Constructive mathematics, Proceedings, New Mexico, 1980. Lecture Notes in Mathematics No. 873 (Springer, Berlin, 1981).

[28] Heyting, A., Intuitionism, an Introduction (North-Holland, Amsterdam, 1956).

[29] Kleene, S.C., Introduction to Metamathematics (North-Holland, Amsterdam/ D. van Nostrand, New York/ P. Noordhoff, Groningen, 1952).

[30] Kleene, S.C., Countablc functionals, in: Heyting, A. (ed.), Constructivity in Mathematics (North-Holland, Amsterdalll, 1959).

[31] Kleene, S.C., and Vesley, R.E.; The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions (North-Holland, Amsterdam, 1965).

[32] Kreisel, G., Analysis of the Cantor-Bendixson theorcm by means of the analytic hierarchy, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959) 621-626.

[33] Kreisel, G., Informal rigor and completeness proofs, in: Lakatos (ed.), Problems in the Philosophy of Mathematics (North-Holland, Amsterdam, 1967), pp. 128-171.

[34] Kreisel, G., Church's thesis: A kind of reducibility axiom for construclive mathematics, in: Kino, Myhill, and Veslcy (eds.), Intuitionism and Proof Theory (North-Holland, Amsterdam, 1967).

[35] Kreisel, G., Lacombe, D., and Shoenfield, J., Partial recursive functions and effective operations, in: Heyting, A. (ed.) Constructivity in Mathematics (North-Holland, Amsterdam, 1959).

[36] Kreisel, G., and Troelstra, A. S., Formal systems for some branches of intuitionistic analysis, Annals of Math. Logic 1 (1970) 229-387.

[37] Lacombe, D., Remarques sur les opérateurs récursifs et sur les fonctions récursives d'une variable réelle, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 241 (1955) 1250-1252.

[38] Martin-Löf, P., An intuitionistic theory of types: predicative part, in: Rose and Shepherdson (eds.) Logic Colloquium '73 (North-Holland, Amsterdam, 1975)-

[39] Martin-Löf, P., Constructive mathematics and computer programming, in: Cohen, L.J., Los, J., Pfeiffer, H., and Podewski, K.P. (eds.), Logic, Methodology, and Philosophy of Science VI (North-Holland, Amsterdam, 1982) 153-179.

[40] Moschovakis, J. R., Can there be no non-recursive functions? Journal of Symbolic Logic 36 (1971) 309-315.

[41] Moschovakis, Y., Axioms for computation theories--first draft, in: Gandy and Yates (eds.), Logic Colloquium '69 (North-Holland, Amsterdam, 1971), pp. 199-256.

[42] Myhill, J., Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis, Logique et Analyse (N.S.) 9 (1967) 280-297.

[43] Myhill, J., Constructive set theory, J. Symbolic Logic 40 (1975) 347-382.

[44] Scedrov, A., Consistency and independence results in intuitionistic set theory, in: Richman, F. (ed.), Constructive Mathematics, Proceedings, New Mexico, 1980, Lecture Notes in Mathematics No. 873 (Springer, Berlin, 1981).

[45] Scott, D., Relating theories of the λ-calculus, in: Seldin, J.P., and Hindley, J.R. (eds.), To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism (Academic Press, London, 1980).

[46] Specker, E., Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, J. Symbolic Logic 14 (1949) 145-158.

[47] Troelstra, A. S., Principles of Intuitionism, Lecture Notes in Mathematics No. 95 (Springer, Berlin, 1969).

[48] Troelstra, A. S., Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, Lecture Notes in Mathematics No. 344 (Springer, Berlin, 1973).

[49] Troelstra, A. S., Notes on intuitionistic second order arithmetic, in: Mathias A. and Rogers, H. (eds.), Cambridge Summer School in Mathematical Logic, Lecture Notes in Mathematics No. 337 (Springer, Berlin, 1973).

[50] Troelstra, A. S., A note on non-extensional operations in connection with continuity and recursiveness, Indag. Math. 39 (1977) 455-462.

[51] Troelstra, A. S., Axioms for intuitionistic mathematics incompatible with classical logic, in: Butts and Hintikka (eds.), Logic, Foundations of Mathematics, and Computability Theory (D. Reidel, Dordrecht, 1977), pp. 59-84.

[52] Veldman, W., Investigations in intuitionistic hierarchy theory, dissertation, Mathematical Institute, Katholieke Universiteit, Nijmegen, The Netherlands.

[53] van Stigt, W., The rejected parts of Brouwer's dissertation on the foundations of mathematics, Historia Math. 6 (1979) 384-404.