NOTES SUR LE FORMALISME EN MATHEMATIQUES

II

La question de savoir s'il y a lieu de reconnaitre à la pensée humaine une vérité objective n'est pas une question théorique, mais une question pratique.
C'est dans la pratique qu'il faut que l'homme prouve la vérité, c'est-à-dire la réalité, et la puissance de sa pensée, dans ce monde et pour notre temps. La discussion sur la réalité ou l'irréalité d'une pensée qui s'isole de la pratique, est purement scolastique.

VIII

Toute vie sociale est essentiellement pratique.
Tous les mystères qui détournent la théorie vers le mysticisme trouvent leur solution rationnelle dans la pratique humaine et dans la compréhension de cette pratique.

Marx : thèses sur Feuerbach

INTRODUCTION

Le formalisme en mathématiques a été inventé en grande partie pour faire face aux nombreux paradoxes qui sont apparus avec l'avènement de la théorie des ensembles.

Un autre but du formalisme était une tentative de réduire le raisonnement mathématiques à des calculs "automatiques" sur des symboles. Rêve qu'avait déjà caressé Leibniz.

La mise au point des géométries non euclidiennes avait, de plus, jeté un doute sur la notion de vérité. Auparavant les mathématiciens pensaient plus ou moins soumettre à leur étude des objets existant réellement, tel l'espace euclidien à 3 dimensions. Et les vérités concernant ces objets réels semblaient indiscutables.

Quand il apparut que l'axiome des parallèles n'était pas indiscutable, on put se demander qu'est ce qui était vraiment indiscutable en mathématiques.

La logique formelle et la formalisation des théories mathématiques avaient pour but également d'aboutir à préciser la partie vraiment indiscutable de la logique et des mathématiques.

Le but du formalisme tel que le définissait Hilbert était donc de trouver une base solide et universelle aux mathématiques :

- solide parce qu'entièrement basée sur des procédés de démonstration prédéfinis portant sur des énoncés finis et ne faisant appel à aucune intuition de l'infini,
- universelle parce qu'on espérait que toutes les mathématiques passées et à venir pourraient entrer dans le cadre de ce formalisme.

Après l'échec du projet formaliste, ces espoirs démesurés peuvent sembler bien naifs. Il faut pourtant voir qu'à l'époque, la théorie des ensembles semblait être un cadre de référence dans lequel toutes les mathématiques trouvaient leur place. Aujourd'hui encore c'est le point de vue de la plupart des mathématiciens.

La théorie des ensembles se serait-elle avérée formalisable au sens où l'espérait Hilbert, alors l'ensemble de son projet se serait révélé valide.

Pour expliquer les limites du formalisme, il est nécessaire d'avoir une idée un peu précise de ce qu'est :

- un <u>langage mathématique du 1er ordre</u> (cf. A1),
- une <u>interprétation</u> (ou réalisation) de ce langage (cf. A2),
- un <u>modèle</u> d'un système d'axiomes de ce langage (cf. A3).

Il est en particulier nécessaire d'introduire la notion de <u>vérité sémantique</u> d'un énoncé du premier ordre interprété dans un modèle.

Il faut noter que tant la description d'un langage que la description de la notion de modèle utilisent une "théorie naive" des ensembles. Par exemple, un langage est "un ensemble de mots". Les notions "d'objets" (tels que les lettres d'un alphabet ou les objets d'un modèle) et de "collection d'objets" sont donc admises a priori et ne peuvent être discutées qu'à un autre niveau. Néanmoins, les collections d'objets qu'on utilise (mots d'un langage ou objets d'un modèle) ont en général le mérite d'être "vraiment bien définies" (ceci est d'ailleurs plus vrai pour les mots d'un langage que pour les objets de certains modèles).

Remarquons enfin que d'autres tentatives de "formalisation de la vérité" en mathématiques sont possibles en se basant sur d'autres langages que les langages du premier ordre. Sans entrer dans le détail de ces autres langages, j'essaye en A4 d'expliquer quelles limitations a priori résultent de l'utilisation exclusive de "langages du premier ordre".

Je vous propose donc de suivre le plan suivant :

A - Exposition d'un langage formel (celui de l'arithmétique), d'un système d'axiome (celui de Peano), de l'un de ses modèles (l'ensemble des entiers naturels).

B - Première discussion sur la notion de vérité en mathématiques à travers l'exemple précédent. Théorème de complétude de Godel.

C - Les problèmes posés par la formalisation de la théorie des ensembles et par la théorie des ensembles elles-mêmes.

D - L'insuffisance fondamentale des systèmes formels à travers le théorème d'incomplétude de Godel et de "non définissabilité de la vérité" de Tarski.

E - Quelques conclusions.

A - Le langage de l'arithmétique, les axiomes de Peano, le modèle standard

A1 - Le langage de l'arithmétique :

C'est un ensemble de "mots bien formés" à partir d'un alphabet qu'on va définir et de règles de formation des mots (qu'on n'explicitera que par des exemples).

Nous noterons par la suite $\mathcal{L}a$ le langage de l'arithmétique.

Ce sera donc un "ensemble intuitif" ou "collection" de mots.

L'alphabet est le suivant :

- 2 symboles de constante : $\underline{0}$ et $\underline{1}$
- 2 symboles fonctionnels : $\underline{+}$ et $\underline{\times}$
- 2 symboles relationnels : $\underline{<}$ et $\underline{=}$
- des symboles de variables : x, x', x'', x''' etc
- les connecteurs logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$
- les quantificateurs : $\forall$, $\exists$
- les parenthèses :) et (

L'alphabet qu'on vient de définir contient une infinité de symboles de variables, mais on peut se ramener à un alphabet fini en introduisant la barre verticale "|" et les symboles de variables sont alors écrits x , $x|$, $x||$ etc ...

Venons en maintenant à la définition des termes du langage $\mathcal{L}a$, puis des énoncés du langage $\mathcal{L}a$.

NB : J'ai utilisé des symboles soulignés pour distinguer ces symboles considérés comme lettres de l'alphabet de $\mathcal{L}a$ de leurs interprétations à venir (voir A2).
En ce qui concerne les connecteurs logiques, ils sont ici considérés comme lettres de l'alphabet $\mathcal{L}a$ et, lorsqu'ils seront "interprétés", ils prendront leur sens habituel, mais je tâcherai de les écrire alors en français ordinaire.

Un <u>terme</u> (d'arithmétique) est alors un mot construit à l'aide des symboles de fonction, des symboles de constante, des symboles de variable, et des parenthèses, selon des règles qu'il serait fastidieux d'expliciter. Donnons plutôt des exemples de termes :

$$(((\underline{1} \underline{+} \underline{1}) \underline{+} x) \underline{\times} x) \underline{\times} x'$$

est un terme.

$$((((\underline{1} \underline{+} \underline{1}) \underline{+} \underline{1}) \underline{+} \underline{1}) \underline{\times} ((x \underline{\times} x) \underline{\times} x)) \underline{\times} (x' \underline{+} \underline{1})$$

est un terme.

Dans la pratique on utilise des notations abrégées. Le premier terme écrit ci-dessus se note alors $(2 + x) \underline{\times} x'$, et le 2ème terme écrit ci-dessus se note $\underline{4}\, x^3 (x' \underline{+} \underline{1})$.

Dans la suite, nous désignerons par $\mathfrak{T}a$ la collection des <u>termes d'arithmétique</u> (bien écrits).

Un <u>énoncé atomique</u> est alors un mot de la forme :

$$t \underline{=} t'$$

ou

$$t \underline{\leq} t'$$

où t et t' désignent deux termes.

Un <u>énoncé d'arithmétique</u> (ou "une formule d'arithmétique") est alors soit un énoncé atomique, soit un mot construit à partir d'énoncés atomiques en utilisant les connecteurs logiques et les quantificateurs.

<u>Exemples d'énoncés</u> :

Nous noterons $R(x)$ l'énoncé d'arithmétique suivant :

$$\exists x' \exists x'' \exists x''' \exists x'''' \quad x \underline{=} x'^2 \underline{+} x''^2 \underline{+} x'''^2 \underline{+} x''''^2 .$$

Dans cet énoncé (ou formule) la variable x est dite libre tandis que les autres variables x', x'', x''', x'''' sont dites liées (ou "sous quantificateur").

Remarquons que nous avons écrit en fait une notation abrégée pour l'énoncé suivant :

$$(\exists x')(\exists x'')(\exists x''')(\exists x'''') \quad x \underline{=} ((((x' \underline{\times} x') \underline{+} (x'' \underline{\times} x'')) \underline{+} (x''' \underline{\times} x''')) \underline{+} (x'''' \underline{\times} x''''))$$

<u>Deuxième exemple d'énoncé d'arithmétique</u> :

Nous noterons S(x) l'énoncé suivant :

$$(\exists\, x')\ (\exists\, x'')\ (\forall\ z)\ (\forall\ t) :$$

$$(x' \underline{\neq}\ \underline{1}\ \wedge ((z\,t \underline{=} x') \Rightarrow (z \underline{=} \underline{1} \vee t \underline{=} \underline{1})))$$

$$\wedge\ (x'' \underline{\neq}\ \underline{1}\ \wedge ((z\,t \underline{=} x'') \Rightarrow (z \underline{=} \underline{1} \vee t \underline{=} \underline{1})))$$

$$\wedge\ (x \underline{+} x \underline{+} \underline{1} \underline{+} \underline{1} \underline{+} \underline{1} \underline{+} \underline{1} \underline{=} x' \underline{+} x'').$$

Dans cet énoncé, la variable x est libre et les autres variables sont liées. On a utilisé les abréviations $z\,t$ pour $z \underline{\times} t$ et $a \underline{\neq} \underline{1}$ pour $\neg\ (a \underline{=} \underline{1})$

Anticipons sur le paragraphe qui suit : l'interprétation de l'énoncé R(x) dans le modèle standard sera "x est un entier naturel somme de 4 carrés". Quant à l'interprétation de l'énoncé S(x) dans le modèle standard, ce sera "$2x + 4$ est la somme de 2 nombres premiers".

Le <u>langage de l'arithmétique</u> est donc, pour récapituler, la collection des <u>énoncés d'arithmétique</u> bien écrits.

Cette collection, nous la notons $\mathcal{L}a$.

A2 - <u>Une interprétation (ou réalisation) du langage $\mathcal{L}a$</u> :

est alors définie par la donnée de :

- un ensemble intuitif (ou collection) N (*),
- 2 éléments de N, notés 0 et 1,
- 2 lois de composition interne sur N, notées + et $\times$,
- une relation binaire sur N, notée $\leq$.

Par "loi de composition interne sur N", on entend une application de N $\times$ N dans N,
par "relation binaire" sur N une application de N $\times$ N dans {vrai, faux}.

Une réalisation du langage $\mathcal{L}a$ étant donnée, tout <u>terme d'arithmétique</u> peut être interprété comme un élément de N une fois qu'on a attribué à chaque symbole de variable figurant dans le terme une valeur comme élément de N.

(*) N est parfois appelé la "collection des objets de l'interprétation" ou, dans le cas des modèles, "la collection sous-jacente du modèle".

(pour interpréter un terme, il faut donc également interpréter les symboles de variables qui figurent dans le terme).

Toujours en considérant donnée une réalisation du langage $\mathcal{L}a$, tout énoncé d'arithmétique est alors interprété comme Vrai ou Faux selon les valeurs attribuées aux variables libres qui figurent dans l'énoncé.

Il faut naturellement donner aux connecteurs logiques et quantificateurs leur interprétation habituelle :

$A \wedge B$	est Vrai	si et seulement si	A et B sont Vrais
$A \vee B$	est Faux	si et seulement si	A et B sont Faux
$A \Rightarrow B$	est Faux	si et seulement si	A est Vrai et B est Faux
$\urcorner A$	est Vrai	si et seulement si	A est Faux
$\forall x \, U(x)$	est Vrai	si et seulement si	U(x) est Vrai pour toute interprétation du symbole de variable x
$\exists x \, U(x)$	est Vrai	si et seulement si	U(x) est Vrai pour au moins une interprétation de x

Enfin, le signe $\underline{=}$ doit être interprété par la relation d'égalité.

La <u>réalisation standard de $\mathcal{L}a$</u> consiste à prendre pour N la collection $\mathbb{N}$ des entiers naturels et, pour $0, 1, +, \times$ et $\leq$, l'interprétation habituelle.

A3 - <u>Les axiomes de Peano et les modèles de "Peano"</u> :

(Je ne cherche pas ici à décrire "le plus petit système" d'axiomes mais un système d'axiomes assez parlant).

Les axiomes de Peano sont des énoncés d'arithmétique (ils forment une sous collection de $\mathcal{L}a$) ; je ne vais pas ici les écrire tous explicitement car ce serait un peu long et moins parlant. Ce sont donc les énoncés suivants :

0. les énoncés exprimant la commutativité et l'associativité de + et $\times$, ainsi que la distributivité de + par rapport à $\times$.
   exemple : $(x \underline{+} y) \underline{\times} z \underline{=} (x \underline{\times} z) \underline{+} (y \underline{\times} z)$.

1. $(\underline{1} \underline{+} x \underline{=} \underline{1} \underline{+} y) \Rightarrow x \underline{=} y$

2. $\underline{0} \underline{+} x \underline{=} x$

3. $\rceil(\underline{1} \underline{+} x \underline{=} \underline{0})$ (en abrégé : $\underline{1} \underline{+} x \underline{\neq} \underline{0}$)

4. $\underline{1} \underline{\times} x \underline{=} x$

5. $(x \underline{\leq} y) \Leftrightarrow (\exists z \; x \underline{+} z \underline{=} y)$ ($\Leftrightarrow$ est une abréviation)

6. Le schéma d'axiomes, dit schéma de récurrence, qui, étant donné une relation $U(x)$ contenant x comme variable non quantifiée, fournit l'énoncé suivant :

$$(U(\underline{0}) \wedge (\forall x)\, (U(x) \Rightarrow U(x \underline{+} \underline{1}))) \Rightarrow ((\forall x)\; U(x)).$$

Un <u>modèle de "Peano"</u> est (par définition) une <u>interprétation</u> du langage $\mathcal{L}a$ dans laquelle les axiomes de Peano sont interprétés comme Vrais (pour toute interprétation des variables libres qui y figurent).

Le <u>modèle standard</u> de "Peano" est l'interprétation standard qui est définie au paragraphe précédent.

On sait démontrer que l'énoncé $R(x)$ (défini en fin de A1 et qu'on interprète dans le modèle standard par "x est un entier somme de 4 carrés") est interprété Vrai dans tout modèle de "Peano" pour toute valeur attribuée à x.

Par contre, l'énoncé $\forall x \; S(x)$ (où $S(x)$ est défini en fin de A1 et qu'on interprète dans le modèle standard par "tout entier pair ≥ 4" est somme de 2 nombre premiers) pose problème. Pour tout entier pair qu'on a voulu essayer, on a trouvé 2 nombres premiers dont il est la somme : $12 = 7 + 5$, $14 = 7 + 7$, $28 = 17 + 11$, etc ...

Mais on ne sait pas s'il est interprété Vrai dans le modèle standard. On ne sait pas non plus s'il est possible qu'il soit interprété Vrai dans le modèle standard et Faux dans un autre.

A4 - <u>Utilité et limites du langage $\mathcal{L}a$ pour étudier les propriétés des entiers naturels</u> :

Aux yeux des mathématiciens, le principal mérite d'un langage tel que $\mathcal{L}a$ est avant tout qu'il permet d'écrire de manière extrêmement précise des textes concernant les entiers naturels.

La rançon de cette "clarté et précision" des propriétés qu'on peut écrire au moyen <u>d'énoncés d'arithmétique</u> (c'est-à-dire d'énoncés appartenant au langage $\mathcal{L}a$), c'est que le langage $\mathcal{L}a$ ne permet pas d'écrire toutes les propriétés a priori intéressantes pour l'étude des entiers naturels.

Une propriété telle que "toute partie de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément" ne peut pas être écrite dans le langage $\mathcal{L}a$. C'est-à-dire, précisément : il n'existe aucun énoncé d'arithmétique dont l'interprétation dans le modèle standard soit la propriété énoncée ci-dessus. Pour quelle raison ? tout simplement parce que les parties de $\mathbb{N}$ qui peuvent être décrites comme "ensemble des entiers n vérifiant un énoncé U(x)" ne sont pas toutes les parties de $\mathbb{N}$.

Donc, ce que l'on gagne en "clarification de la formulation des propriétés" on le perd sous forme de "restriction quant aux propriétés étudiées".

Mais, magie de la dialectique, cette "perte" est néanmoins source d'enrichissement car, désormais, une classification des propriétés concernant $\mathbb{N}$ est apparue : parmi les propriétés concernant $\mathbb{N}$, il y a celles qui sont les interprétations (standard) d'énoncés d'arithmétique et on les appelle les propriétés arithmétiques de $\mathbb{N}$. Les autres propriétés sont "plus complexes" et seront plus difficiles à étudier. Mais c'est déjà un bon renseignement que de savoir si une propriété est de nature arithmétique ou non arithmétique !

En particulier, on adoptera la définition suivante :

une partie de $\mathbb{N}$ est dite arithmétique si elle est la collection des entiers n qui vérifient (dans l'interprétation standard) un énoncé d'arithmétique U(x) à une seule variable libre.

De même, on définirait :

une relation liant 2 éléments de $\mathbb{N}$ est dite arithmétique s'il existe un énoncé d'arithmétique V(x, y) tel que pour 2 entiers naturels n, m arbitraires, n et m sont liés par la relation si et seulement si V(x, y) s'interprète Vrai dans le modèle standard lorsqu'on donne à x et y les valeurs n et m.

B - Première discussion sur la notion de vérité en mathématiques, à travers l'exemple des entiers naturels

V

> Feuerbach, qui ne satisfait pas la <u>pensée abstraite</u>, en appelle à <u>l'intuition sensible</u> mais il ne considère pas le monde sensible en tant qu'activité <u>pratique</u> concrète de l'homme.
>
> Marx : thèses sur Feuerbach

B1 - Pour définir la valeur "Vrai" ou "Faux" d'un énoncé d'arithmétique lorsqu'il est interprété au moyen d'une interprétation de $\mathcal{L}_a$ (par exemple lorsqu'il est interprété dans le modèle standard de "Peano"), nous avons fait comme si cela ne posait a priori aucun problème.

Autrement dit, nous avons implicitement admis comme évidente la notion de <u>vérité sémantique</u> d'un énoncé d'arithmétique une fois qu'il est interprété dans un modèle.

Regardons pourtant ce que signifie la phrase :

"l'énoncé d'arithmétique '$\forall x\ S(x)$' est interprété Vrai dans le modèle standard"
(où $S(x)$ est l'énoncé défini en fin de A1.

Cette phrase signifie :

"tout nombre entier pair ≥ 4 est somme de 2 nombres premiers".

<u>Pour infirmer ce résultat</u> : "il suffit" d'une vérification : trouver un entier pair $n \geq 4$. Etablir la liste des nombres premiers inférieurs à n, et vérifier que la somme de 2 d'entre eux n'est jamais égale à n.

<u>Pour confirmer ce résultat</u> : il faut, soit une démonstration convaincante, soit (si on n'en trouve pas) une infinité de vérifications : pour tout entier pair ≥ 4, il faut trouver 2 nombres premiers dont il est la somme.

Or, HOMO SAPIENS ne sait pas, et ne saura jamais, faire une infinité de vérifications en un temps fini.

Penser qu'a priori "$\forall x\ S(x)$" est nécessairement interprété Vrai ou Faux dans le modèle standard réclame donc de croire en un "dieu de $\mathbb{N}$" qui soit capable de faire, lui, l'infinité de vérifications nécessaires. C'est croire que "la vérité dans $\mathbb{N}$" existe indépendamment de la pratique d'HOMO SAPIENS.

Si on introduit des formules plus compliquées que '$\forall x\ S(x)$', avec des quantificateurs en cascade, du type :

$$\forall x\ \exists y\ \forall z \quad W(x, y, z)$$

on s'apercevra qu'en général (c'est-à-dire lorsqu'on ne dispose pas de démonstration convaincante) il faudra une infinité de vérifications aussi bien pour infirmer que pour confirmer la vérité d'un énoncé d'arithmétique une fois qu'il est interprété dans le modèle standard.

B2 - Face à cette objection des intuitionnistes, il peut exister deux attitudes possibles :

Ou bien on pense que l'objection n'est pas fondée car de toute manière "ou bien tout nombre pair est somme de 2 nombres premiers" "ou bien ce n'est pas vrai" et ainsi de suite pour tous les énoncés d'arithmétique (c'est-à-dire rappelons-le, les énoncés de $\mathcal{L}a$) interprétés dans le modèle standard,

ou bien on ignore le problème de l'interprétation du langage, on ignore le problème de la vérité sémantique et on fait comme si on n'étudiait que les propriétés du langage pour lui-même. C'est le point de vue formaliste poussé à l'extrême, tel qu'il est exposé dans l'introduction de Bourbaki. Mais c'est un point de vue, en apparence confortable, en fait complètement débilitant et qui réduit l'activité des mathématiciens à l'étude d'un <u>jeu</u> particulier : celui du "langage de la théorie mathématique" dans lequel on cherche les combinaisons gagnantes (théorèmes) et les combinaisons perdantes (théorème $\neg R$) ; les combinaisons indéterminées (ni démontrable, ni son contraire démontrable) ne faisant d'ailleurs même pas partie de l'étude du jeu tel que la définit Bourbaki.

Dans la suite de ce texte, j'adopterai la terminologie suivante :

le point de vue intuitionniste (pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}a$) est l'attitude qui consiste à n'admettre pour "Vrai" ou "Faux" a priori dans le modèle standard que les énoncés d'arithmétique pour lesquels on dispose soit d'une démonstration convaincante, soit d'un processus de vérification aboutissant en un temps fini.

Cette attitude implique qu'on refuse la loi du Tiers exclu dans les "démonstrations convaincantes" dont il est question.

Le point de vue classique (pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}a$) est l'attitude qui consiste à admettre que tout énoncé d'arithmétique est forcément Vrai ou Faux une fois qu'il est interprété dans le modèle standard.

Le point de vue formaliste (pour $\mathcal{L}a$) consiste à ignorer le modèle standard $\mathbb{N}$, à refuser de se poser la question de la vérité sémantique dans l'interprétation standard, et à étudier $\mathcal{L}a$ pour lui-même.

J'explique un peu plus en détail le point de vue formaliste pour $\mathcal{L}a$ dans le paragraphe qui suit.

B3 - Description rapide (et informelle) de la "théorie formelle de l'arithmétique de Peano" :

Au lieu de rechercher quels sont les énoncés d'arithmétique qui sont "Vrai" lorsqu'interprétés dans le modèle standard, on recherche quels sont tous les énoncés d'arithmétique "qu'on peut déduire des axiomes de Peano au moyen de règles de déduction logique répertoriées et considérées valables d'un point de vue classique".

Ces "règles de déduction logique répertoriées considérées valables d'un point de vue classique" constituent ce qu'on appelle la logique formelle (classique) des langages du 1er ordre (c'est-à-dire des langages semblables à $\mathcal{L}a$).

La collection des énoncés d'arithmétique ainsi obtenus est appelée la "théorie formelle de l'arithmétique de Peano", ou encore "collection des théorèmes formels de l'arithmétique de Peano".

Si je note P_1 le système d'axiomes de Peano, je note alors $Tf(P_1)$ la collection des théorèmes formels de l'arithmétique de Peano.

On voit qu'ici, on a une double limitation a priori :

. La limitation dont on a déjà parlé en A4 : on ne s'intéresse qu'aux "énoncés d'arithmétique" lesquels, une fois interprétés dans $\mathbb{N}$, ne traduisent que certaines des propriétés de $\mathbb{N}$.

. On ne s'intéresse qu'aux énoncés "qui peuvent se déduire d'un nombre fini d'axiomes, ou du moins d'axiomes parfaitement bien définis a priori".

Si on se place d'un point de vue classique, tous les "théorèmes de l'arithmétique formelle de Peano" sont Vrai lorsqu'interprétés dans $\mathbb{N}$ parce que la logique formelle utilisée (c'est-à-dire les règles de déduction logique répertoriées utilisées) sont valables du point de vue classique (quand les énoncés sont interprétés dans un modèle de "Peano").

Si on se place d'un point de vue intuitionniste, certains "théorèmes de l'arithmétique formelle de Peano" ne sont pas forcément Vrai lorsqu'interprétés dans $\mathbb{N}$, parce que la logique formelle utilisée n'est pas valable.

Le point de vue formaliste "à outrance" ignore tout simplement le débat sur la nature de la vérité sémantique.

B4 - <u>Les règles de la logique formelle (pour un langage du premier ordre) sont "entièrement satisfaisantes" du point de vue classique (théorème de complétude de Godel)</u> :

Cette affirmation, que je vais essayer d'expliquer, est évidemment d'un grand soulagement pour les formalistes à outrance, car ça leur permet de garder dans un coin de leur tête (mais sans le dire) que tout ce qui se fait en mathématiques formelles a quelque chose à voir avec "le sens" et la "réalité".

Godel commence par décrire un certain nombre de "règles de déduction logique" qui constituent <u>la logique formelle</u> (classique).

Du point de vue formel, ces règles sont de simples manipulations d'énoncés. Par exemple, une de ces règles est la suivante : si $A \Rightarrow B$ et si A font partie de la collection des théorèmes formels, alors, par la règle dite MODUS PONENS, B fait également partie de la collection des théorèmes formels.

Ensuite, le théorème de Godel (de complétude) établit une <u>adéquation parfaite</u>

entre, d'une part :

"énoncés d'un langage du 1er ordre démontrables au moyen de la logique formelle"

et, d'autre part :

"énoncés prenant la valeur Vrai dans toute interprétation du langage (du premier ordre) considéré".

Rappelons ici qu'un langage du premier ordre est un langage du même type que $\mathcal{L}_a$ mais où on s'autorise à prendre d'autres symboles de fonction, d'autres symboles relationnels et d'autres symboles de constante que ceux de $\mathcal{L}_a$.

Rappelons aussi que la logique formelle est un ensemble de règles de manipulations d'énoncés qui, lorsque ces énoncés sont "interprétés", constituent des règles de déduction logique valables d'un point de vue classique.

Evidemment, l'adéquation parfaite démontrée dans le théorème de Godel est démontrée au moyen de raisonnements sur les modèles faisant appel à des principes de déduction logiques valables d'un point de vue classique uniquement.

Néanmoins, il est important de noter que la phrase

"énoncé prenant la valeur Vrai dans toute interprétation du langage considéré"

peut être comprise dans un sens relativement faible qui est précisé maintenant :

on peut se limiter aux interprétations où la collection des objets est, ou bien finie, ou bien $\mathbb{N}$ et, dans le cas où la collection des objets est $\mathbb{N}$, on peut se limiter aux interprétations où les symboles relationnels et les symboles fonctionnels peuvent être définis arithmétiquement (voir A4 par exemple pour la définition d'une relation binaire arithmétique dans $\mathbb{N}$).

Autrement dit : si un énoncé E d'un langage $\mathcal{L}$ (du premier ordre) n'est pas un théorème de logique formelle, on peut trouver une "interprétation arithmétique" des symboles (de constante, de fonction, de relation) figurant dans le langage $\mathcal{L}$, tel que l'énoncé E soit interprété Faux (pour cette interprétation).

A ce résultat de complétude (d'entière satisfaction) de la logique formelle du 1er ordre, il faut opposer trois faits importants :

- ce résultat n'est établi que pour les langages du 1er ordre, lesquels introduisent a priori une limitation dans l'étude des propriétés d'un objet mathématique (tel que $\mathbb{N}$ par exemple),
- la logique formelle utilisée n'est pas acceptable d'un point de vue intuitionniste,
- du point de vue classique, les règles de la logique formelle du 1er ordre n'épuisent pas toutes les possibilités de raisonnement mathématique, parce qu'il n'y a pas de raison de se limiter à l'étude des "propriétés du 1er ordre" pour raisonner mathématiquement.

C - Les problèmes posés par la formalisation de la théorie des ensembles et par la théorie des ensembles elle-même

C1 - Nous avons déjà remarqué dans l'introduction qu'un minimum de théorie naive des ensembles est nécessaire pour développer toute théorie mathématique.

On a besoin de la notion d'objets distincts, on a besoin de savoir repérer que 2 signes d'un alphabet sont "les mêmes" alors qu'ils sont écrits en 2 endroits distincts de la page, on a besoin de la notion de "collection finie d'objets" pour définir les mots d'un langage ou pour définir un objet d'étude de mathématiques, de la notion de "collection potentiellement infinie" (par exemple : la collection potentiellement infinie des entiers naturels).

Avec l'avènement de la théorie des ensembles, il s'est agi de tout autre chose et Cantor avait bien raison (de son point de vue) de remercier Dieu d'avoir créé un "univers mathématique" infini dans lequel on peut sans scrupule :

- considérer un ensemble infini tel que $\mathbb{N}$ comme un infini "actuel" (et non potentiel),
- construire, pour tout ensemble donné A, l'ensemble de toutes les parties de cet ensemble ("beaucoup plus gros" que A),
- considérer, une fois qu'un ensemble "existe" que toute partie de cet ensemble "existe" également, pour elle-même, en dehors du fait qu'elle puisse être pensable ou non par un homme.

Avec l'univers mathématique de Cantor (ou plutôt celui de Zermelo-Frankel qui a permis d'éliminer tous les paradoxes apparus à ce jour dans celui de Cantor) nous voici dans le royaume de la vérité sémantique absolue.

Les mathématiques sont désormais l'étude de cet univers à la fois monstrueux et admirable, dont certaines des propriétés resteront à tout jamais cachées aux HOMO SAPIENS, mais qu'importe.

Et, chose remarquable, si un tel univers existe et peut être soumis aux investigations par les méthodes relevant de la logique classique (répertoriées dans la logique formelle), alors on peut définir en son sein d'autres Univers qui ont les mêmes propriétés de base (que celles énoncées précédemment) et qui, en outre, vérifient d'autres propriétés particulièrement commodes pour les raisonnements mathématiques.

Par exemple, l'axiome du choix, un temps controversé, est devenu un vulgaire "axiome des parallèles d'Euclide" : aucun danger à considérer qu'il est vrai puisque, si un univers mathématique existe <u>sans</u> axiome du choix, on pourra construire avec lui un autre univers mathématique <u>avec</u> axiome du choix (de la même manière que l'existence d'une géométrie euclidienne garantit l'existence d'une géométrie non euclidienne et vice versa).

Il y a pourtant une différence de taille entre la géométrie euclidienne et la théorie des ensembles.

La différence est la suivante :

. tout mathématicien qui croit en le modèle standard de l'arithmétique croit du même coup en la géométrie euclidienne car on peut construire sur $\mathbb{N}$ une géométrie euclidienne [certains éléments de $\mathbb{N}$ étant appelés "points", d'autres "droites", d'autres "plans", d'autres "cercles", d'autres "sphères", et étant définis entre eux les relations "le point est sur la droite", "la droite est dans le plan" etc ..., le tout vérifiant les axiomes d'une géométrie euclidienne. De plus, cette construction sera parfaitement explicite, y compris la vérification des axiomes de la géométrie euclidienne dans le modèle : il s'agit donc d'une géométrie euclidienne satisfaisante d'un point de vue intuitionniste (voir article de J. Merker)],

. mais tout mathématicien qui croit en le modèle standard de l'arithmétique ne croit pas forcément pour autant à l'univers mathématique de Zermelo-Frankel.

A cela deux ordres de raison :

- comme l'univers mathématique de Zermelo-Frankel, s'il existe, contient des ensembles infinis non dénombrables (c'est-à-dire "strictement plus gros que $\mathbb{N}$") on ne peut espérer disposer un jour d'une construction (analogue à celle de la géométrie euclidienne) d'un univers mathématique au sein de $\mathbb{N}$.

  Dans la croyance en l'existence d'un univers mathématique à la Zermelo-Frankel, il y a véritablement 2 "actes de foi" qui surpassent de loin "l'acte de foi en l'arithmétique", ce sont :

→ l'acte de foi de l'infini actuel,

→ l'acte de foi de l'ensemble des parties d'un ensemble.

- si, au lieu de considérer comme acquise l'existence d'un univers mathématique de Zermelo-Frankel, on considère seulement comme acquis le fait que les axiomes de Zermelo-Frankel sont non contradictoires, on peut alors construire (à l'aide du théorème de complétude de Godel, qui a pour conséquence qur tout système d'axiomes bien défini et non contradictoire possède un modèle, et même un modèle arithmétique) un "modèle réduit" d'univers mathématique construit dans $\mathbb{N}$, pour lequel tous les axiomes de ZF sont "Vrai". Dans ce cas, on se trouve néanmoins confronté à 3 problèmes d'importance :

  → le fait que le "modèle réduit" d'univers mathématique n'est vraiment que le pâle reflet de l'univers mathématique "réel" puisque tous les "ensembles dans le modèle", s'ils ne sont pas "dénombrables dans le modèle", sont néanmoins "dénombrables hors du modèle" puisque ces "ensembles dans le modèle" peuvent tous être définis comme des parties arithmétiques de $\mathbb{N}$,

  → le fait que le "modèle réduit" d'univers mathématique possède des propriétés de type pathologique (voir les résultats de Rabin paragraphe suivant) et en particulier n'est pas du tout acceptable d'un point de vue intuitionniste,

  → le fait enfin que la construction du modèle réduit n'est possible que si les axiomes de ZF sont non contradictoires, or HOMO SAPIENS ne sait pas, et ne saura jamais, si les axiomes de ZF sont non contradictoires (voir D).

C2 - <u>Les résultats de M.O. RABIN</u> :

Ces résultats concernent les "modèles réduits" dénombrables d'univers mathématique ou, si l'on préfère, les "modèles ayant comme collection d'objets les entiers naturels".

Le système d'axiomes utilisé n'est pas ZF mais une version affaiblie du système GB (GB comme : Godel Bernays).

Je vais décrire rapidement et informellement ce système d'axiomes affaibli que je noterai GB^-, mais précisons tout de suite que ZF et GB sont fondamentalement équivalents (au même sens que géométrie euclidienne et non euclidienne sont fondamentalement équivalentes).

Décrivons tout d'abord le langage utilisé (qui est le même pour ZF ou GB) :

- il y a un seul symbole de constante : $\underline{\emptyset}$,
- il n'y a pas de symbole de fonction,
- il y a 2 symboles de relation : $\underline{=}$ et $\underline{\in}$,
- il y a enfin les symboles logiques communs à tous les langages du 1er ordre.

Je noterai $\mathcal{L}e$ ce "langage de la théorie des ensembles".

Les axiomes de GB décrivent un univers mathématique où il y a 2 types d'objets : d'une part les ensembles, d'autre part les classes. Tout ensemble est une classe (donc tout objet est une classe), toute classe est entièrement définie par les ensembles qui lui appartiennent, mais certaines classes sont "trop grosses" pour être des ensembles (par exemple la classe de tous les ensembles).

Dans un univers mathématique de GB, l'énoncé :

$$\text{"}(\exists x)\ \ y \underline{\in} x\text{"}$$

s'interprète : y est un ensemble

et l'énoncé :

$$\text{"}(\forall x)\ \ \underline{\neg}\ y \underline{\in} x\text{"}$$

s'interprète : y est une classe propre (une classe qui n'est pas un ensemble).

Voici donc les axiomes de GB^- (cf annexe pour leur écriture sous forme d'énoncés de $\mathcal{L}e$) :

- pour les classes (classes propres ou ensembles) :
  - . il existe une classe contenant tous les ensembles : W,
  - . il existe une classe contenant tous les couples d'ensembles (x, y) tels que $x \in y$,
  - . si 2 classes A et B existent alors $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$, $W - A$ existent également,

- 2 classes qui ont les mêmes ensembles pour éléments sont égales,
- si une classe A existe, alors la classe :

$$\mathrm{Dom}\ A = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in A\}$$

  existe également,
- 4 axiomes annexes introduits pour des raisons techniques et qui sont vérifiés de manière évidente dans les modèles de GB^-.

- pour les ensembles (du modèle) : les axiomes habituels de ZF, en enlevant l'axiome de l'ensemble infini et l'axiome du choix, et en remplaçant un schéma d'axiome dit "schéma de substitution" par un seul axiome, grâce au recours des classes.

Décrivons maintenant un "modèle naturel" de GB^-, plus crédible qu'un univers de GB (dans lequel il y a nécessairement des "ensembles" infinis).

Pour décrire ce "modèle naturel", nous nous plaçons d'un point de vue "théorie naive des ensembles finis".

Nous considérons donc toutes les collections finies qui peuvent être "écrites à la main" en utilisant les symboles $\emptyset$ { , et }.

Par exemple :

$$\emptyset\ ,\ \{\emptyset\}\ ,\ \{\emptyset\ ,\ \{\emptyset\}\}\ ,\ \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\ ,\ \{\emptyset\ , \{\emptyset\}\}\}\ .$$

Toutes ces collections finies peuvent être obtenues comme éléments des collections finies V_n, construites par récurrence comme suit :

$$V_o = \emptyset \qquad V_1 = P(V_o) = \{\emptyset\ ,\ \{\emptyset\}\}$$

$$V_2 = P(V_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\ ,\ \{\{\emptyset\}\}\ ,\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\ldots\ V_{n+1} = P(V_n)$$ (P(V) est la collection des parties de V)

Pour construire notre "modèle naturel", nous posons tout d'abord :

$$V_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

puis

$$W = P(V_\omega)\ .$$

Enfin nous considérons W comme collection des objets du "modèle naturel", et nous interprétons $\underline{\in}$ par $\in$ dans W.

Je dis qu'on obtient un modèle de GB^-.

En effet, on démontre par récurrence que $V_n \subset V_{n+1}$, puis que toute partie finie de V_ω est un élément de V_ω.

Par ailleurs, tout élément de V_ω est une partie finie de V_ω. Donc $V_\omega \subset W$ et on a :

- tout objet du modèle est une partie de V_ω,
- les parties finies de V_ω sont les "ensembles" du modèle,
- les parties infinies de V_ω sont les "classes propres" du modèle.

On vérifie facilement que les axiomes de GB^- sont vérifiés dans ce "modèle naturel".

Ce "modèle naturel" W et ce système d'axiomes GB^- constituent en quelque sorte le degré 0 de la théorie des ensembles de Cantor, le point précis où l'on décolle du point de vue purement "naif" ("intuitif").

De plus, le système d'axiomes est fini et peut donc être remplacé par un axiome unique.

Pour tout mathématicien qui croit en W et qui croit en la logique formelle lorsqu'elle est interprétée dans W, le système d'axiome GB^- est manifestement non contradictoire (de la même manière qu'un mathématicien qui croit en $\mathbb{N}$ et en la logique formelle lorsqu'elle est interprétée dans $\mathbb{N}$ pense du même coup que le système d'axiome de Peano est non contradictoire).

Les deux résultats de Rabin concernent le système d'axiomes GB^-. Si ce système est non contradictoire, il admet, d'après une conséquence du théorème de complétude de Godel, un modèle dénombrable et même un modèle arithmétique (c'est-à-dire, rappelons-le, un modèle où la collection des objets est $\mathbb{N}$ et où la relation $\in\!\!\!\!\in$ (qui interprète le symbole $\underline{\in}$) est une relation arithmétique).

<u>1er résultat</u> :

> Il est impossible de trouver une fonction $n \longmapsto (x_n, y_n)$ parfaitement explicite de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, telle que la collection des couples (x_n, y_n) soit la collection des couples vérifiant $x_n \in\!\!\!\!\in y_n$, où "$\in\!\!\!\!\in$" est une relation binaire sur $\mathbb{N}$ qui vérifie les axiomes de GB^-.

Autrement dit : il n'y a pas de modèle dénombrable explicite pour les axiomes de GB^- ; il n'y a pas de modèle convaincant d'un point de vue intuitionniste pour GB^-.

2ème résultat :

Considérons sur $\mathbb{N}$ une relation binaire arithmétique, que nous notons $\in$, qui fasse de $(\mathbb{N}, \in)$ un modèle arithmétique de GB^{-}. Alors ce modèle est "non standard pour les entiers",
c'est-à-dire : ce qui, dans ce modèle, joue le rôle de la "classe propre des entiers naturels" contient non seulement les analogues de 0, 1, 2, 3 etc ... mais encore des tas d'autres éléments appelés "entiers non standard".

Autrement dit : si on se place sur une position intermédiaire où, sans être intuitionniste jusqu'au bout, on admet comme crédibles les "parties de $\mathbb{N}$ définies de manière arithmétique", mais pas d'autres collections plus compliquées, alors GB^{-} n'admet pas non plus de modèle "satisfaisant".

C3 - Vérité des résultats d'arithmétique établis au moyen des axiomes de ZF ?

(On pourra sauter ce paragraphe en première lecture).

Si les mathématiciens utilisent la théorie des ensembles et la "logique formelle classique" (pour des propriétés interprétant des énoncés écrits en un langage du 1er ordre), c'est pour des raisons de simplicité et de facilité des démonstrations dans ce cadre.

Dans ce cadre, ils sont amenés à utiliser des objets mathématiques assez incroyables. Par exemple, on définit au moyen d'énoncés explicites des ensembles dont on ne sait définir explicitement aucun élément isolé et dont on démontre qu'ils sont infinis. Un peu comme si on savait définir l'ensemble des nombres réels mais qu'on ne sache définir aucun de ces nombres isolément.

Il n'y a pas besoin d'être intuitionniste pur et dur pour mettre en doute "le sens réel" de résultats concernant de tels objets. Mais, les mathématiciens "classiques" ne sont pas masochistes : s'ils utilisent des objets "complètement farfelus" et "pas du tout crédibles" c'est comme intermédiaires dans des démonstrations concernant des objets tout à fait ordinaires et crédibles, tels que les entiers naturels.

On voit immédiatement que se pose le problème de la validité de résultats concernant les entiers naturels, mais obtenus au prix de détours dans l'univers mathématique de Zermelo-Frankel.

Le point de vue formaliste a l'avantage d'ignorer ce problème puisque le mathématicien formaliste joue au jeu "langage de la théorie des ensembles, axiomes de ZF et règles de la logique formelle" et ne prétend jamais que les énoncés qu'il appelle "théorèmes" s'interprètent en une réalité Vraie. Même s'il démontre au moyen de ZF l'énoncé de $\mathcal{L}$e qui s'interpréte par "tout nombre pair ≥ 4 est somme de 2 nombres premiers", le mathématicien formaliste ne prétend pas avoir démontré que tout nombre pair ≥ 4 soit somme de 2 nombres premiers. Si, par la suite, quelqu'un trouve un nombre pair qui ne soit pas somme de 2 nombres premiers, le mathématicien formaliste dira : les axiomes de ZF sont donc contradictoires et mon jeu est sans intérêt, je vais essayer de jouer à autre chose.

Pour le mathématicien qui admet le point de vue classique (pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}$a) mais qui admet difficilement l'existence d'un univers mathématique aussi "monstrueux" que celui de ZF, quelle est la validité des "résultats d'arithmétique" obtenus au moyen de ZF ?

J'avoue que j'ai bien du mal à répondre à cette question, pourtant cruciale.

Mais il me semble que la réponse est à l'heure actuelle incertaine.

Plaçons-nous du point de vue de ce mathématicien ("classique pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}$a seulement") et supposons que la théorie formelle de ZF soit non contradictoire. Alors, d'après le théorème de complétude de Godel, je sais que je dispose d'un modèle dénombrable de ZF, et ce modèle est construit de telle sorte que la relation $\in$ est arithmétique dans le modèle (qui a pour collection d'objets $\mathbb{N}$).

Au sein de ce modèle, il y a un objet, défini par un énoncé du langage de la théorie de ZF, qui fait fonction de "ensemble des entiers du modèle".

Tous les énoncés qui sont des théorèmes formels de ZF sont interprétés Vrai dans le modèle arithmétique en question. Pourtant, il existe dans ce modèle des entiers non standard et même (résultat de Rabin dans le même article) il y a des énoncés d'arithmétiques interprétés Faux dans le modèle standard de "Peano" et interprétés Vrai dans "l'ensemble des entiers" de ce modèle arithmétique de ZF.

Donc je ne suis pas assuré a priori qu'un énoncé d'arithmétique démontré formellement dans ZF soit Vrai dans le modèle standard de "Peano". Il se pourrait bien justement, après tout, que l'énoncé en question soit un énoncé Vrai dans tout "ensemble des entiers" d'une interprétation arithmétique de ZF et Faux dans $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$.

Pour me résumer, il me semble que :

il faut admettre plus que la logique formelle lorsqu'elle est appliquée à $\mathcal{L}a$ et $\mathbb{N}$, pour être convaincu qu'un énoncé d'arithmétique démontré formellement dans ZF soit Vrai dans $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ (en supposant évidemment ZF non contradictoire),

ou encore, pour essayer de dire la même chose mais autrement : les mathématiques couramment pratiquées n'ont de "sens" que si elles ne permettent de démontrer que des énoncés d'arithmétique Vrais dans le modèle standard $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$. Or, pour être assuré de cela il ne suffit pas de supposer que ZF est non contradictoire (pour lui-même), il faut en plus supposer que ZF est non contradictoire avec tout énoncé d'arithmétique Vrai dans le modèle standard (et traduit dans $\mathcal{L}e$).

Ordinairement, en fait, les mathématiciens admettent que ZF possède un modèle dans lequel "l'ensemble des entiers" est standard pour l'arithmétique, mais "l'acte de foi" de la croyance en un tel modèle semble presque aussi fort que celui de la croyance en l'univers de ZF.

D - L'insuffisance fondamentale des systèmes formels

L'ensemble de ce paragraphe est écrit en se plaçant d'un point de vue classique pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}a$. Il serait évidemment tout à fait utile et intéressant d'exposer les résultats, ou non-résultats, analogues obtenus en se plaçant d'un point de vue intuitionniste pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}a$ (il y a donc du pain sur la planche ...).

Dans le premier paragraphe, j'explique en quoi la recherche des théorèmes d'une théorie formelle (pour un langage du 1er ordre donné et pour un système d'axiomes bien défini de ce langage) est équivalente à l'étude d'une fonction bien définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Ce simple fait inciterait déjà fortement à douter de la capacité d'une théorie formelle à être la traduction de la notion de vérité en mathématiques.

Dans le deuxième paragraphe, j'explique (j'essaie) ce que signifie le théorème d'incomplétude de Godel : ce théorème précise de manière très frappante où réside cette "incapacité" d'une théorie formelle. Elle réside dans l'incapacité à démontrer "sa propre non contradiction".

Dans le troisième paragraphe, j'explique en quoi ce résultat absolument remarquable de Godel peut être interprété pour apporter de l'eau au moulin des intuitionnistes.

Dans le quatrième paragraphe, j'explique (j'essaie) ce que signifie le théorème de "non-définissabilité de la vérité" de Tarski. Ce théorème se situe sur un terrain légèrement différent du théorème d'incomplétude de Godel, il ne s'attaque pas à la notion de théorie formelle mais seulement à la notion de langage formel et il affirme qu'un langage formel est incapable de décrire "sa propre vérité sémantique" dans une interprétation donnée.

D1 - Arithmétisation d'une théorie formelle du 1er ordre :

Nous considérons donc un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ analogue à $\mathcal{L}a$ (c'est-à-dire avec les mêmes symboles logiques, mais avec des symboles de fonction, de constante et de relation différents) et un système $\mathfrak{J}$ d'axiomes bien définis écrits dans $\mathcal{L}$. Autrement dit $\mathfrak{J}$ est une sous-collection bien définie de la collection des énoncés de $\mathcal{L}$.

La théorie formelle de $(\mathcal{L}, \mathfrak{J})$ est définie de la même manière que la théorie formelle de l'arithmétique de Peano. Cela signifie donc : la théorie formelle de $(\mathcal{L}, \mathfrak{J})$ est la collection des énoncés de $\mathcal{L}$ qui peuvent être déduits des énoncés de $\mathfrak{J}$ au moyen des règles de la logique formelle. Nous noterons $Tf(\mathfrak{J})$ la collection de ces énoncés qui sont appelés les théorèmes (formels) de cette théorie formelle.

Nous commençons par numéroter les énoncés de $\mathcal{L}$ (c'est-à-dire attribuer un numéro, qui est un entier naturel ordinaire, à chaque énoncé de $\mathcal{L}$). Voici comment c'est possible :

- tout d'abord on range dans un certain ordre les symboles de l'alphabet de $\mathcal{L}$ (on supposera pour simplifier cet alphabet fini),
- ensuite, on remarque que si un mot est écrit au moyen de cet alphabet, on peut déterminer par un processus explicite si ce mot est un énoncé (bien écrit) de $\mathcal{L}$ ou non,
- enfin on remarque que les énoncés qui ont une longueur déterminée n sont en nombre fini et peuvent donc être rangés par ordre alphabétique,
- alors, pour obtenir le numéro d'un énoncé de $\mathcal{L}$, on compte d'une part tous les énoncés qui ont une longueur plus petite et d'autre part tous les énoncés qui ont même longueur mais qui sont avant lui dans l'ordre alphabétique. La somme des 2 nombres obtenus est le numéro de notre énoncé. Par exemple, l'énoncé le plus court et le premier par ordre alphabétique (parmi les énoncés de même longueur) a pour numéro : 0,
- on voit que ce processus permet d'établir une correspondance entre $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}$ telle qu'à tout nombre soit associé un et un seul énoncé (qui ait ce nombre pour numéro).

Je dis qu'il existe une fonction parfaitement explicite :

$$f : n \longmapsto f(n)$$

de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que la collection des numéros f(n) soit la collection des théorèmes *(formels)* de la théorie formelle de $(\mathcal{L}, \mathfrak{J})$.

Ceci n'est pas très difficile à démontrer mais demanderait pas mal de détails techniques. Disons que comme la collection $\mathfrak{T}$ est bien définie et comme les règles de la logique formelle sont elles aussi bien définies, on peut définir de manière explicite ce qu'est une "démonstration formelle", et on peut numéroter les "démonstrations formelles" (de la même manière à peu près qu'on a numéroté $\mathcal{L}$). Enfin, un "théorème formel" est un énoncé pour lequel il existe une démonstration formelle. La fonction f est donc la fonction qui, à un nombre n, fait correspondre le numéro (dans $\mathcal{L}$) du dernier énoncé de la démonstration formelle qui a pour numéro n (dans la collection des démonstrations formelles).

Si on regarde en détail ce travail d'arithmétisation de la théorie formelle de $(\mathcal{L}, \mathfrak{T})$, on voit qu'apparait constamment la notion de processus parfaitement bien défini (ou parfaitement explicite). En fait, tous ces processus parfaitement explicites admettent une traduction formelle dans le langage $\mathcal{L}a$, langage qui joue donc un rôle central dans les théories formelles.

Voici ce résultat énoncé précisément :

<u>Théorème d'arithmétisabilité d'une théorie formelle</u> :

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre et soit $\mathfrak{T}$ un système d'axiomes bien défini de $\mathcal{L}$ (par exemple un système d'axiomes fini).

Soit Tf $(\mathfrak{T})$ la sous collection de $\mathcal{L}$ formée par les théorèmes de la théorie formelle de $(\mathcal{L}, \mathfrak{T})$.

Soit $n \longmapsto E_n$ une numérotation explicite des énoncés de $\mathcal{L}$.

Il existe un énoncé $U(x, y)$ de $\mathcal{L}a$ à 2 variables libres x et y tel que l'on ait :

- pour tout entier naturel n, il existe un et un seul entier naturel m tel que :

  $U(n, m)$ est interprété Vrai dans l'interprétation standard de $\mathcal{L}a$.

- la fonction $n \longmapsto f(n) = m$ ainsi définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est parfaitement explicite.

- un énoncé E_m de $\mathcal{L}$ est un théorème de Tf $(\mathfrak{T})$ si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $U(n, m)$ soit Vrai dans l'interprétation standard de $\mathcal{L}a$.

NB : L'expression "fonction parfaitement explicite de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$" est justifiable d'une définition qui précise le sens intuitif qu'on lui attribue. Ici on peut fournir un processus explicite qui, à partir du numéro n permet de calculer le numéro $f(n)$ en un temps fini. Ce processus est décrit informellement au début du paragraphe.

Commentaires :

1. Ainsi, la théorie formelle de ZF (système d'axiome mis au point pour décrire un univers mathématique complètement "énorme"), toute la théorie formelle de ZF, se réduit à l'étude d'une seule fonction explicite de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, fonction qui peut être "écrite dans $\mathcal{L}a$",
2. et ceci sera vrai pour toute théorie formelle : cela justifie que j'aie depuis le début attaché une importance particulière au point de vue classique (ou intuitionniste) pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}a$,
3. une fois arithmétisée la théorie formelle de $(\mathcal{L}, \mathfrak{T})$, le problème de la consistance (ou "non contradiction") de cette théorie formelle, admet une nouvelle formulation :

   la théorie formelle $Tf(\mathfrak{T})$ est dite non contradictoire (ou consistante) si la collection des théorèmes ne contient pas de contradiction.
   En fait, vu les règles de la logique formelle, si une théorie formelle $Tf(\mathfrak{T})$ sur un langage $\mathcal{L}$ contient une contradiction, alors $Tf(\mathfrak{T})$ est la collection $\mathcal{L}$ toute entière ("tout" peut être démontré formellement à partir d'une contradiction).

   Soit donc n_o le numéro d'un énoncé qui est une contradiction (c'est-à-dire un énoncé de la forme $A \wedge \neg A$), on voit que $Tf(\mathfrak{T})$ est contradictoire si et seulement si l'énoncé E_{n_o} de numéro n_o fait partie des théorèmes de la théorie formelle.

   Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction explicite de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ décrite dans le théorème d'arithmétisabilité, on a donc :

   "$Tf(\mathfrak{T})$ est non contradictoire" si et seulement si "pour tout n $f(n) \neq n_o$".

   Si $U(x, y)$ est l'énoncé d'arithmétique décrit dans le théorème d'arithmétisabilité, on a donc un énoncé d'arithmétique, noté Consis $\mathfrak{T}$ (*), qui

(*) Consis $\mathfrak{T}$ est l'énoncé d'arithmétique suivant :

$$\forall x \quad \neg U(x, \overline{n_o})$$

($\underline{n_o}$ est ici une abréviation pour : $(..((\underline{1} + \underline{1}) + \underline{...} + \underline{1}) + \underline{1})$ (n_o fois)).

vérifie :

"Tf($\mathfrak{T}$) est non contradictoire" si et seulement si "Consis $\mathfrak{T}$ est Vrai dans l'interprétation standard".

D2 - Le théorème d'incomplétude de Godel :

C'est ce théorème qui a ruiné les espoirs du projet formaliste de Hilbert.

Théorème d'incomplétude :

1. Consis Peano n'est pas un théorème de "Peano",
2. Consis ZF peut être "traduit" dans le langage $\mathcal{L}e$ de la théorie des ensembles. Notons alors CONSIS ZF la traduction de Consis ZF dans $\mathcal{L}e$. Alors CONSIS ZF n'est pas un théorème de ZF, à moins que ZF soit contradictoire,
3. soit, de manière plus générale, un système d'axiome $\mathfrak{T}$ explicite sur un langage du premier ordre $\mathcal{L}$. Supposons que ce système d'axiome soit assez fort pour permettre une traduction dans $\mathcal{L}$ de l'arithmétique de Peano. Supposons enfin que Tf($\mathfrak{T}$) soit non contradictoire. Soit enfin CONSIS $\mathfrak{T}$ la traduction de Consis $\mathfrak{T}$ dans $\mathcal{L}$. Alors CONSIS $\mathfrak{T}$ n'est pas un théorème de Tf($\mathfrak{T}$).

Ce théorème reste imprécis pour le lecteur dans la mesure où je n'ai pas expliqué la notion de traduction (cf un exemple en annexe).

Voici cependant quelques commentaires en un langage que j'espère compréhensible.

Commentaires :

1. La théorie des ensembles et les méthodes de démonstration qu'elle autorisait semblait, à son apparition, et semble encore à beaucoup de mathématiciens le cadre dans lequel s'inscrivent toutes les mathématiques.

   Pourtant, si ZF est non contradictoire, il y a un énoncé d'arithmétique (Consis ZF) qui, interprété dans le modèle standard, est Vrai, mais indémontrable au moyen de ZF.

   Donc la théorie des ensembles, dès qu'on en a choisi une formulation axiomatique telle que ZF, est insuffisante à démontrer des énoncés arithmétiques <u>simples</u> : en effet, Consis ZF exprime "seulement" qu'une fonction $f : n \longmapsto f(n)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, bien définie, ne prend pas une valeur n_o bien définie.

2. Appelons $\mathcal{P}_1$ le système d'axiomes de Peano.

   Puisque (comme dans tout D) nous nous plaçons d'un point de vue classique pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}a$, ce système est manifestement non contradictoire (il admet en effet un modèle explicite : c'est le modèle standard $\mathbb{N}$ et toute contradiction dans la théorie formelle de Peano impliquerait une contradiction dans le modèle explicite, ce qui est impossible).

   Donc, Consis $\mathcal{P}_1$ est Vrai lorsqu'on l'interprète dans le modèle standard.

   Mais, comme Consis $\mathcal{P}_1 \notin Tf(\mathcal{P}_1)$, on obtiendra une meilleure description de $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ avec un système d'axiomes $\mathcal{P}_2$ où :

   $\mathcal{P}_2$ est le système d'axiomes formé par les axiomes de $\mathcal{P}_1$ et Consis $\mathcal{P}_1$.

   Mais, de nouveau, Consis $\mathcal{P}_2$ est à la fois Vrai dans le modèle standard et indémontrable formellement à partir de $\mathcal{P}_2$ (c'est-à-dire Consis $\mathcal{P}_2 \notin Tf(\mathcal{P}_2)$).

   Donc on obtiendra une meilleure description de $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ avec le système d'axiomes $\mathcal{P}_3$ où :

   $\mathcal{P}_3$ est le système d'axiomes formé par les axiomes de $\mathcal{P}_2$ et Consis $\mathcal{P}_2$.

   Et ainsi de suite.

   De manière plus générale : il n'existe aucun système d'axiomes $\mathcal{P}$, défini de manière explicite sur $\mathcal{L}a$, pour lequel $Tf(\mathcal{P})$ soit la collection de tous les énoncés d'arithmétiques interprétés Vrai dans le modèle standard. Ou encore (il ne faut pas avoir peur de se répéter) la vérité sémantique dans $\mathbb{N}$ (pour des propriétés qui sont les interprétations d'énoncés de $\mathcal{L}a$) ne sera jamais enfermable dans un système d'axiomes bien défini a priori.

   Dans la discussion précédente nous avons démontré la Vérité dans $\mathbb{N}$ d'énoncés tels que Consis $\mathcal{P}_1$, Consis $\mathcal{P}_2$ etc ... Mais, pour ce faire, nous avons dû faire des aller-retour entre théories formelles et modèle standard $\mathbb{N}$. C'est dans ces aller-retour que peut seul se situer l'intérêt profond des théories formelles.

(Par exemple, l'analyse non standard utilise, pour étudier les propriétés de fonctions standard de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le comportement de ces fonctions standard par rapport à des réels non standard, "infinitésimaux", c'est-à-dire infiniment petits par rapport aux nombres réels standard).

D3 - <u>Propriétés arithmétiques qu'on ne démontrera jamais</u> :

Rappelons que nous avons appelé propriété arithmétique, une propriété (concernant les entiers naturels) qui est l'interprétation standard d'un énoncé d'arithmétique (c'est-à-dire énoncé $\in \mathcal{L}_a$).

Considérons maintenant la propriété arithmétique suivante :

"la théorie formelle ZF est consistante" (interprétation de Consis ZF) et supposons qu'elle soit vraie.

La démontrer reviendrait (d'après une conséquence du théorème de complétude de Godel) à exhiber un modèle de ZF.

Exhiber un modèle infini non dénombrable est un rêve purement métaphysique.

Exhiber un modèle dénombrable se heurte à des obstacles considérables : en particulier, on sait qu'il n'y a aucun modèle explicite de ZF, et que les modèles arithmétiques de ZF sont pathologiques pour l'arithmétique : ce qui tient lieu "d'ensembles des entiers" dans un tel modèle contient en effet des entiers non standard et certains énoncés d'arithmétiques qui sont Vrai lorsqu'interprétés dans $\mathbb{N}$ seront Faux lorsqu'interprétés dans un tel modèle ZF(*).

Il semble donc bien que : "la théorie formelle ZF est consistante" est le type même de propriété arithmétique qui, si elle est vraie, est indémontrable à tout jamais par HOMO SAPIENS (mais là, je crois que je m'avance quand même un peu).

Ainsi serait levée l'objection habituelle des "classiques pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}_a$" aux "intuitionnistes pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}_a$" qui dit que tout énoncé d'arithmétique

---

(*) Cette affirmation "certains énoncés d'arithmétique qui sont Vrai lorsqu'interprétés dans $\mathbb{N}$ seront Faux lorsqu'interprétés dans un modèle arithmétique de ZF" est démontrée dans l'article de Rabin auquel j'ai déjà fait allusion ; on en déduit comme corollaire l'existence d'entiers non standards dans "l'ensemble des entiers naturels" du modèle arithmétique de ZF.

aujourd'hui indécis sera forcément un jour démontré Vrai ou Faux (dans $\mathbb{N}$) et donc qu'on peut lui appliquer la loi du tiers exclu.

D4 - Non définissabilité de la vérité (d'un langage par ce langage) :

Nous nous plaçons toujours d'un point de vue classique.

Considérons un langage du premier ordre $\mathcal{L}$ et une interprétation N de ce langage. Il s'agit, rappelons-le, d'une collection d'objets N, et pour chaque symbole de fonction, de constante ou de relation de $\mathcal{L}$, d'avoir une fonction, un objet, une relation qui lui est associée dans l'interprétation.

Puisqu'on se place d'un point de vue classique, tout énoncé de $\mathcal{L}$, une fois interprété dans N, est forcément vrai ou faux.

Notons alors $Ts(\mathcal{L}, N)$ la collection des énoncés de $\mathcal{L}$ qui sont Vrais lorsqu'on les interprète dans N (je note Ts comme : "théorème sémantique" de la même manière que plus haut j'ai noté Tf : comme "théorème formel").

Le théorème de "non définissabilité de la vérité" de Tarski affirme que la collection $Ts(\mathcal{L}, N)$ ne peut pas être définie avec "les seuls moyens du bord" que sont N et $\mathcal{L}$.

Cela reste un peu imprécis, je vais donc donner le théorème dans les cas de $(\mathcal{P}_1, \mathbb{N})$ et dans le cas de $(ZF, \mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ est un modèle de ZF.

Remarquons cependant tout de suite que ce théorème achève de ruiner tout espoir de formalisation de la vérité. Alors que le théorème de Godel est un théorème de "non démontrabilité de la vérité par des moyens purement formels", celui de Tarski va encore plus loin : la vérité sémantique échappe non seulement à la démonstration par des moyens purement formels, mais elle échappe également à la description (ou définition) par des moyens purement formels.

Théorème de non définissabilité en arithmétique :

Soit $E_o, E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ une numérotation explicite d'énoncés d'arithmétique sans variable libre.

Considérons la collection des entiers n tels que E_n s'interprète Vrai dans le modèle standard : $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ de $\mathcal{L}a$.

Alors cette collection n'est pas une partie arithmétique de $\mathbb{N}$ (rappelons qu'une partie arithmétique de $\mathbb{N}$ est la collection des entiers vérifiant une propriété définie par un énoncé d'arithmétique).

<u>Théorème de non définissabilité de la vérité dans ZF</u> :

> Etant donné un modèle $\mathcal{U}$ de ZF, il n'existe aucun énoncé R(x) de $\mathcal{L}e$, à 1 variable libre x, vérifiant la propriété suivante :
>
> pour chaque énoncé E sans variable libre
>
> $$E \Leftrightarrow R(\ulcorner E \urcorner) \text{ est Vrai dans } \mathcal{U}.$$

<u>NB</u> : Ici $\ulcorner E \urcorner$ est le numéro de E (pour une numérotation effective de $\mathcal{L}e$) traduit dans $\mathcal{U}$: $\mathcal{U}$ possède en effet des objets qu'on note $0, 1, \ldots, n$ et qui font fonction d'entiers naturels standard. Ils sont définis par récurrence : $0 = \emptyset$, $n+1 = n \cup \{n\}$.

E - Quelques conclusions

1 - La formalisation de la logique pour les énoncés écrivables en un langage du 1er ordre a un intérêt théorique remarquable en ce qu'elle permet une clarification du débat quant aux méthodes de raisonnements acceptables.

Ces méthodes de raisonnements "acceptables" ne le sont justement pas toutes par tous les mathématiciens.

Le débat reste donc ouvert et, semble-t-il, restera ouvert longtemps encore.

2 - L'étude d'objets mathématiques tels que "les entiers naturels", "les groupes finis", "les nombres réels", "les ensembles" etc ... est susceptible d'une formalisation dans des langages du premier ordre, mais au prix de "pertes sèches" importantes.

* Au lieu de s'intéresser alors à toutes les propriétés imaginables de ces objets (à supposer qu'on soit convaincu de leur existence), on ne s'intéresse alors qu'aux propriétés qui peuvent être écrites dans un langage du 1er ordre donné et, parmi ces propriétés, seulement à celles qui sont démontrables à partir d'un système d'axiomes préalablement choisis.

* Mais alors, de plus :

  . si l'objet est "peu puissant" (un groupe fini particulier par exemple), sa théorie formelle n'apporte rien de plus que sa théorie naive,

  . si l'objet est "assez puissant" (par exemple contient une partie identifiable à $\mathbb{N}$), aucune formalisation n'épuisera jamais la notion intuitive de vérité dans cet objet (quel que soit le point de vue qu'on adopte quant à la notion intuitive de vérité d'ailleurs),

  . si l'objet est "trop puissant" (par exemple un univers mathématique de Zermelo Frankel : objet de l'existence duquel on peut douter fortement et dont on ne connait pas de "copie modèle réduit" convaincante), alors le recours à une théorie formelle du 1er ordre <u>ne permet pas</u> de démontrer la cohérence d'un système d'axiomes censé le décrire partiellement.

3 - L'étude d'un objet mathématique, une fois réduite à l'étude d'une théorie formelle de cet objet (après choix d'un système d'axiomes écrits dans un langage du premier ordre), est ramenée à l'étude de l'ensemble des valeurs f(n) d'une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ parfaitement explicite.

Aucun mathématicien ne peut croire que les mathématiques pourraient se réduire à l'étude d'une seule fonction explicite de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, si complexe soit elle.

Henri LOMBARDI

Décembre 1982

Bibliographie

Outre la bibliographie conseillée à la fin de l'article "Le tiers exclu et l'infini ne font pas bon ménage", signalons (pour les mathématiciens) quelques références :

. Théorie des ensembles - Krivine (collection SUP du PUF),

. Logique mathématique - S. C. Kleene,

. Introduction to metamathematics Kleene (en anglais),

. On recursive enumerable and arithmetic models of set theory - Michael O. Rabin (Journ. of Symb. Logic, vol. 23, 1958).

ANNEXE 1 : Les axiomes GB

Par convention, les lettres latines minuscules désigneront les "ensembles" du modèle, tandis que les lettres majuscules désigneront indistinctement "ensembles" ou "classes".

Autrement dit encore un énoncé $\forall x\ R(x)$ est une abréviation pour :

$$\forall X\ ((\exists Y\ \ X \in Y) \Rightarrow R(X))$$

et un énoncé $\exists\ x\ \ R(x)$ est une abréviation pour :

$$\exists X\ \ \exists Y\ \ \ X \in Y \wedge R(X)$$

Les axiomes de GB sont alors les suivants :

1) Extensionalité : $(\forall z\ \ (z \in X \Leftrightarrow z \in Y)) \Rightarrow (X = Y)$
   (2 classes qui ont les mêmes éléments sont égales).

2) Ensemble vide : $\forall x \quad x \notin \emptyset$
   $\exists Y \quad \emptyset \in Y$

3) Ensemble à 1 ou 2 éléments : $\forall x\ \ \forall y\ \ \exists z\ \ \ \forall t\ \ (t \in z \Leftrightarrow (t = x \vee t = y))$.

4) Ensemble réunion des éléments de y : $\forall y\ \exists z\ \forall u\ ((u \in z) \Leftrightarrow (\exists\ t(u \in t \wedge t \in y)))$.

5) Ensemble infini : $\exists\ x(\emptyset \in x \wedge \forall\ y\ (y \in x \Rightarrow\ y \cup \{y\} \in x))$.

   Dans cet énoncé, $y \cup \{y\}$ désigne l'unique ensemble qui a pour éléments y et les éléments de y ; l'existence de cet ensemble unique est assurée par les axiomes 3 et 4.

6) Ensemble des parties de x : $\forall\ x\ \exists\ y\ \forall\ u\ \ (u \in y\ \Leftrightarrow u \subset x)$

   ($u \subset x$ est une abréviation pour : $\forall\ t\ (t \in u \Rightarrow t \in x)$).

7) Axiome de substitution : on définit le couple $\langle x, y\rangle$ comme étant égal à $\{\{x, y\}, \{x\}\}$. On a alors $\langle x, y\rangle = \langle z, t\rangle$ si et seulement si $x = z$ et $y = t$. L'axiome de substitution s'écrit alors :

$$\forall X [(\forall x \exists\ !\ y\ \langle x, y\rangle \in X) \Rightarrow \exists v\ \forall y\ [y \in v \Leftrightarrow (\exists x (x \in u \wedge \langle x, y\rangle \in X]]$$

   En gros : l'ensemble v est l'image de l'ensemble u par la classe X qui joue le rôle d'une fonction.

Comme conséquence de 7 on a notamment : toute classe contenue dans un ensemble est un ensemble (pour $\exists\,!\,y$ voir commentaire après 8).

8) Axiome du choix fort :

$$\exists C \ \forall x [x \neq \emptyset \Rightarrow \exists\,!\,y \ (y \in x \wedge \langle x, y\rangle \in C)]$$

(La classe C "choisit" dans chaque ensemble x un élément y. Le symbole $\exists\,!\,y$ est une abréviation, et il signifie "il existe un et un seul y").

9) $\exists A \ \forall a (a \in A \Leftrightarrow (\exists x \exists y (a = \langle x, y\rangle \wedge x \in y)))$

(Il existe une classe A dont les éléments sont les couples d'ensembles tels que $x \in y$).

10) Réunion de 2 classes : $\forall Y \forall Z \exists X \forall a \ (a \in X \Leftrightarrow (a \in Y \vee a \in Z))$.

11) Complémentaire d'une classe : $\forall Y \exists Z \forall a \ (a \in Y \Leftrightarrow a \notin Z)$.

12) Domaine d'une relation entre ensembles :

$$\forall R \ \exists D \ \forall a (a \in D \Leftrightarrow \exists x \ \langle a, x\rangle \in R).$$

13) Classe des couples $\langle x, y\rangle$ où $x \in X$:

$$\forall X \ \exists Y \ \forall a [a \in Y \Leftrightarrow (\exists x \exists y (x \in X \wedge \ a = \langle x, y\rangle)].$$

14) Permutations entre éléments d'un triplet ou d'un couple :

$$\forall X \ \exists Y \ \forall x \ \forall y \quad (\langle x, y\rangle \in Y \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in X)$$

$$\forall X \exists Z \forall x \forall y \forall z \quad (\langle x, y, z\rangle \in Z \Leftrightarrow \langle y, z, x\rangle \in X)$$

$$\forall X \exists Z' \forall x \forall y \forall z \quad (\langle x, y, z\rangle \in Z' \Leftrightarrow \langle x, z, y\rangle \in X)$$

15) Fondation (tout à fait facultatif)

$$\forall X \ [X \neq \emptyset \Rightarrow \exists u (u \in X \wedge \forall y \ (y \in X \Rightarrow y \notin u))]$$

(Toute classe contient un ensemble "minimal" pour la relation $\in$).

<u>NB</u> : Pour la théorie ZF on utilise un seul type de variable. Les axiomes sont les axiomes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 15. Les axiomes 9 à 14 sont supprimés. L'axiome 7 est remplacé par :

7') Schéma de substitution : On réécrit l'axiome 7) en remplaçant $\langle x, y\rangle \in X$ par : $R(x, y)$
où R désigne un énoncé écrit dans $\mathcal{L}_e$.

Il y a donc un axiome pour chaque énoncé R. On dit que 7' est un schéma d'axiomes.

L'axiome 8 est remplacé par :

8') Axiome du choix :

$$\forall a \, \exists C \, \forall x \, [x \neq \emptyset \wedge (x \in a \Rightarrow \exists ! \, y \, (y \in x \wedge \langle x, y \rangle \in C))]$$

(L'ensemble C permet de choisir un y unique dans tout élément $x \neq \emptyset$ de l'ensemble a).

Pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de GB, les "ensembles" du modèle $\mathfrak{M}$ forment un modèle pour ZF. A partir de tout modèle $\mathfrak{M}$ de ZF, on peut construire ("mécaniquement") un modèle de GB.

ANNEXE 2

"Traduction" de l'arithmétique de Peano dans le langage $\mathcal{L}e$ de la théorie des ensembles

Considérons un "Univers de Zermelo Frankel" c'est-à-dire un modèle $\mathcal{U}$ du système d'axiomes ZF (du langage $\mathcal{L}e$).

Pour tout entier naturel n, on définit un objet bien déterminé de l'univers $\mathcal{U}$, objet qu'on notera par exemple $\underline{n}$.

Cet objet est défini par récurrence (ou, si l'on préfère, de proche en proche), en posant :

$$\underline{0} = \emptyset \qquad \underline{1} = \{\underline{0}\} \quad \underline{2} = \{\underline{0}, \underline{1}\}$$

$$\ldots \quad \underline{n+1} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots, \underline{n}\} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$$

<u>NB</u> : Il s'agit ici non d'une définition mais d'un schéma de définitions.

On démontre un schéma de théorèmes qui affirment que pour des entiers n et m distincts, $\underline{n}$ et $\underline{m}$ sont des objets distincts de l'univers $\mathcal{U}$ (il y a un théorème distinct de $\mathcal{L}e$ pour chaque couple d'entiers naturels distincts).

Qu'est-ce qui joue alors "le rôle de $\mathbb{N}$" dans l'univers $\mathcal{U}$?

Les axiomes de ZF permettent de montrer qu'il existe un objet ω de $\mathcal{U}$, unique, qui vérifie :

$$(\emptyset \in \omega) \wedge (\forall x \in \omega \quad x \cup \{x\} \in \omega)$$

$$\wedge\ \forall X \ [(\emptyset \in X \wedge (\forall x \in X \quad x \cup \{x\} \in X)) \Rightarrow \omega \subset X]$$

c'est-à-dire : ω est le plus petit ensemble qui contienne $\emptyset$ et qui soit stable pour l'opération qui à un élément x de ω associe l'élément $x \cup \{x\}$.

On démontre (ou plutôt on constate car c'est évident) que pour tout entier naturel n, l'objet $\underline{n}$ de $\mathcal{U}$ vérifie :

$$\underline{n} \in \omega .$$

Par contre, il n'y a aucun énoncé écrivable dans $\mathcal{L}e$ qui puisse traduire l'idée "pourtant simple" que ω ne doit pas avoir d'autres éléments que les objets n (et d'ailleurs, si ZF est non contradictoire, il y a des modèles de $Z\overline{F}$ pour lesquels ω contient des entiers non standard).

On démontre ensuite l'existence de "lois de composition" $\oplus$ et $\odot$ définies sur ω et vérifiant les axiomes de Peano.

Remarque :

Pour traduire "Peano" dans "ZF", on a été aidé par le fait que les axiomes de ZF permettent de définir un objet ω qui joue le rôle de "collection de tous les entiers".

En fait, on peut se débrouiller sans cet "infini actuel". C'est l'objet de l'explication plus générale qui suit.

ANNEXE 2 bis

"Traduction" de l'arithmétique de Peano dans une autre théorie formelle

On considère une théorie formelle définie par un système d'axiomes $\mathfrak{T}$ écrits dans un langage du premier ordre $\mathcal{L}$.

Une traduction de ($\mathcal{L}a$, Peano) dans ($\mathcal{L}$, $\mathfrak{T}$) est fournie par 5 énoncés de $\mathcal{L}$.

- Un énoncé $N(x)$ à 1 seule variable libre x (qu'on lira : x est un entier).
- Un énoncé $\Sigma(x, y, z)$ à 3 variables libres x, y, z (qu'on lira : z est l'entier somme des entiers x et y).
- Un énoncé $\prod(x, y, z)$ correspondant au produit.
- Un énoncé $E_0(x)$, un énoncé $E_1(x)$, (qu'on lira $x = 0$, $x = 1$).

Tout ceci doit "vérifier les axiomes de Peano" au sens suivant :

La théorie formelle de $\mathfrak{T}$ contient les théorèmes qui "traduisent" les axiomes de Peano, c'est-à-dire précisons :

- $\exists x \forall y \; N(x) \wedge E_0(x) \wedge (E_0(y) \Rightarrow y = x)$: (E_0 définit un entier unique)
- $\exists x \forall y \; N(x) \wedge E_1(x) \wedge (E_1(y) \Rightarrow y = x)$: (idem pour E_1)
- $\forall x \forall y \exists z \forall t \, \{(N(x) \wedge N(y)) \Rightarrow [N(z) \wedge \Sigma(x, y, z) \wedge (\Sigma(x, y, t) \Rightarrow t = z)]\}$
  (c'est-à-dire Σ définit l'entier z en fonction des entiers y et x)
- $\forall x \forall y \exists z \forall t \, \{N(x) \wedge N(y)) \Rightarrow [N(z) \wedge \prod(x, y, z) \wedge (\prod(x, y, t) \Rightarrow t = z)]\}$
  (idem pour $\prod$)
- $\forall x \forall y \forall z \quad (N(x) \wedge E_1(y) \wedge \Sigma(x, y, z) \Rightarrow \neg\, E_0(z))$
  (traduction du $x + 1 \neq 0$ de $\mathcal{L}a$)
- $\forall x \forall x' \forall y \forall z \forall z' \; [(N(x) \wedge N(x') \wedge E_1(y) \wedge \Sigma(x, y, z) \wedge \Sigma(x', y, z') \wedge z = z') \Rightarrow (x = x')]$

  (traduction de $x + 1 = x' + 1 \Rightarrow x = x'$)
- $\forall x \forall y \forall z \quad [(N(x) \wedge E_0(y) \wedge \Sigma(x, y, z)) \Rightarrow z = x]$
- $\forall x \forall y \forall z \quad [(N(x) \wedge E_1(y) \wedge \prod(x, y, z)) \Rightarrow z = x]$

  (traductions de $(x + 0 = x)$ $(x \,.\, 1 = x)$).

. Théorèmes traduisant l'associativité, la commutativité et la distributivité

. schéma de récurrence : pour toute formule A(x) de $\mathcal{L}$ on a le théorème formel suivant :

$$\{[\exists x(E_0(x) \wedge A(x))] \wedge [\forall y \forall z \forall t\ ((N(y) \wedge A(y) \wedge E_1(z) \wedge \Sigma(y, z, t)) \Rightarrow A(t))]\}$$

$$\Rightarrow [\forall y\ \ (N(y) \Rightarrow A(y))].$$

ANNEXE 3

Un autre modèle remarquable de GB^-

On considère l'ensemble V_ω construit comme en C2, puis, au lieu de prendre $W = \mathcal{P}(V_\omega)$, on prend :

W' = ensemble des parties de V_ω définies par un énoncé de $\mathcal{L}e$.

Une partie A de V_ω est dite "définie par un énoncé $R(x)$ de $\mathcal{L}e$" si $R(x)$ est un énoncé de $\mathcal{L}e$ à une seule variable libre x et si on a, pour tout x de V_ω

$$x \in A \Leftrightarrow R(x) \text{ est vrai dans } V_\omega$$

(Les parties de V_ω définies par un énoncé de $\mathcal{L}e$ sont appelées les parties "arithmétiques" de V_ω, parce que, pour une numérotation convenable de V_ω, elles correspondent exactement aux parties arithmétiques de $\mathbb{N}$).

Enfin, on interprète le symbole $\underline{\in}$ par la relation $\in'$ dans W'.

On obtient de nouveau un modèle de GB^-, mais cette fois-ci dénombrable (puisqu'on peut numéroter les énoncés à une variable libre de $\mathcal{L}e$).

Les "ensembles" de ce modèle sont de nouveau les parties finies de V_ω et les "classes" de ce modèle sont maintenant les parties arithmétiques de V_ω.

Ce modèle $(W', \in)$ de GB^- est déjà nettement plus crédible que le modèle $(W, \in)$ défini en C2, ne serait-ce que parce qu'il est dénombrable.

Cependant, il faut bien remarquer que la croyance en l'existence de $(W', \in)$ revient sur le fond à adopter un point de vue classique pour $\mathbb{N}$ et $\mathcal{L}a$.

Admettre que chaque énoncé à une variable libre de $\mathcal{L}e$ définit parfaitement une partie de V_ω revient à admettre que chaque énoncé à une variable libre de $\mathcal{L}_a$ définit parfaitement une partie de $\mathbb{N}$; c'est-à-dire revient à admettre que la loi du tiers exclu s'applique aux énoncés d'arithmétique lorsqu'on les interprète dans $\mathbb{N}$, donc à croire en l'existence *du "Dieu pour $\mathbb{N}$"*.

On pourra remarquer que dans ce modèle $(W', \in)$ les "entiers" sont tous standards puisque l'ensemble des entiers standards de W' est définissable par un énoncé de $\mathcal{L}e$.

Donc le résultat de Rabin montre qu'il n'existe pas de numérotation de W' qui fasse de $\in$ une relation arithmétique.

Mais ceci ne saurait nous surprendre vu le théorème de non-définissabilité de la vérité en arithmétique.

Enfin, pour conclure, il ne faudrait pas croire que "l'existence" de ce modèle quasi-naturel de GB^- implique "l'existence" de modèles aussi naturels de ZF car, si GB^- contient un axipme d'existence d'une classe infinie (par exemple : l'axiome 11 en prenant la classe complémentaire de la classe vide), ZF contient lui la combinaison de l'axiome d'existence d'un ensemble infini et de l'axiome de l'ensemble des parties d'un ensemble, combinaison aboutissant à des ensembles de "grosseur" véritablement "inimaginable".

Autrement dit : si GB^- correspond au premier "saut dans l'inconnu" consistant à admettre l'existence d'un infini actuel des nombres entiers (et à la loi du tiers exclu concernant les énoncés d'arithmétique), ZF correspond au deuxième "saut dans l'inconnu" et contient toute la force de la théorie des ensembles de Cantor.