A PROPOS DES PARADOXES DE ZENON

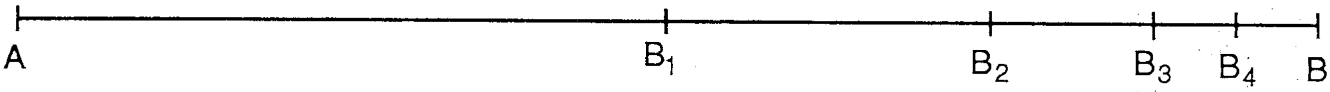
INTRODUCTION

Cet article est écrit en commentaire critique de :

> Adolf Grünbaum: Modern science and Zeno's paradoxes of motion : p 422-501 in «The Philosophy of Time» ed. par R.M. GALE, (New Jersey, Humanities Press, et Sussex, Harvester Press, 1978 (reprint de 1968)).

Les trois formes des paradoxes de Zénon sur le mouvement étudiées dans l'article de Grünbaum sont les suivantes :

1. Le mouvement de A à B est impossible parce qu'il implique que le mobile qui va de A en B doit occuper une infinité de positions intermédiaires en une infinité d'instants distincts. Or le temps de parcours est fini



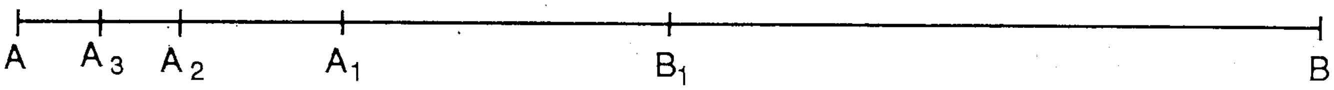
   les positions intermédiaires sont celles correspondant au dessin ci-dessus :

   B_1 milieu de AB
   B_2 milieu de B_1B
   B_3 milieu de B_2B
   etc...

   En bref le mobile ne pourra jamais atteindre B.
   Nous appellerons par la suite ce paradoxe :

   paradoxe de dichotomie progressive.

2. Le mouvement de A à B est impossible parce que le départ depuis A est impossible : supposer que le mobile a bougé, c'est supposer qu'il est déjà passé par une infinité de positions intermédiaires et qu'une infinité d'instants se sont déjà écoulés. Les positions intermédiaires sont celles correspondant au dessin ci-dessous :

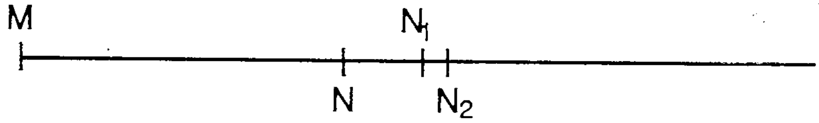


   B_1 milieu de AB
   A_1 milieu de AB_1
   A_2 milieu de AA_1
   A_3 milieu de AA_2
   etc...

En bref, le mobile ne pourra jamais quitter A.
Nous appellerons ce paradoxe :

paradoxe de dichotomie régressive.

3. Un mobile A(chille) ne peut jamais rattraper un mobile T(ortue).
En effet, supposons A en M et T en N.
Lorsque A arrive en M, T est en N_1.



Lorsque A arrive en N_1, T est en N_2
etc...
Nous appellerons ce paradoxe :

paradoxe de dichotomie progressive explicitée par le contexte
(dans le cas présent "le contexte" c'est la tortue).

Signalons un 4ème paradoxe souvent étudié :

4. Un objet ne peut pas être en mouvement puisqu'à chaque instant, il occupe une position déterminée, et ne peut donc, dans l'instant en question, être distingué d'un objet fixe.

Grünbaum part d'un point de vue réaliste, selon lequel le mouvement existe bel et bien, et explicite dans ce contexte quels sont les problèmes réellement posés par l'énoncé des paradoxes.
Ils sont au fond ceci :

> Est-ce que la modélisation mathématique du mouvement adoptée par les physiciens ne renferme pas des contradictions du point de vue de la logique proprement dite, ou au moins du point de vue de la physique ?

Rappelons les présupposés sous-jacents à la modélisation mathématique du mouvement :

- L'espace est assimilable à un continuum à 3 dimensions ; en particulier une droite est assimilable à un continuum à une dimension. Une propriété remarquable du continuum mathématique à une dimension est d'être ordonné et dense (entre deux points il y a toujours un troisième point distinct des deux précédents).
- Le temps est assimilable à un continuum à 1 dimension.
- Le mouvement (selon un axe Ox pour simplifier) est modélisé par une fonction f qui associe à tout instant t la position du mobile en cet instant : $t \longmapsto x = f(t)$.

Les positions défendues par Grünbaum sont les suivantes :
- Il n'y a pas d'absurdité *logique* dans la modélisation mathématique ordinaire du mouvement ; toutes les tentatives de prouver une telle absurdité sont vouées à l'échec dès lors qu'on admet que l'intervalle [0, 1] de réels contient bien une infinité de réels, en acte.
- Il n'y a pas d'incompatibilité substantielle entre cette modélisation mathématique et la réalité physique expérimentale.

- Si les paradoxes de Zénon sont si prégnants, c'est à cause de notre système de perception du temps, qui nous fait apparaître son écoulement comme une succession d'instants.

Ma critique de ces positions sera la suivante :

- Grünbaum déblaie le terrain en réfutant les formes naïves, pourtant répandues chez les philosophes, d'approbation des arguments de Zénon.
- Il a raison de pointer que la pertinence des arguments de Zénon devrait être cherchée du côté de : la modélisation mathématique du mouvement est-elle adéquate, du point de vue logique d'une part, du point de vue physique d'autre part ?
- Mais il a tort lorsqu'il écarte par des arguments purement mathématiques les interrogations ayant trait à la physique. Notamment il ne tient aucunement compte du fait que les particules de la physique quantique n'ont pas à proprement parler de mouvement, ceci en vertu du principe d'incertitude de Heisenberg
- Enfin il va "un peu vite" pour écarter les éventuelles contradictions "logiques" liées à la notion d'infini actuel.

Je reprends maintenant le fil du texte de Grünbaum pour développer ces commentaires critiques selon trois volets successifs :

- Légitimité de la dichotomie appliquée à l'espace ?
- Légitimité de la dichotomie appliquée au temps ?
- Peut-il se passer une infinité d'événements clairement distincts en un laps de temps fini ?

Je terminerai par un commentaire sur le paradoxe n° 4.

A) LEGITIMITE DE LA DICHOTOMIE APPLIQUEE A L'ESPACE ?

Le modèle mathématique

Rappelons qu'une ligne AB est modélisée mathématiquement par l'ensemble $[0,\ell]$ des nombres réels, ℓ étant la longueur de la ligne AB.

Notons que tous les mathématiciens n'ont pas la même vision de cet ensemble $[0,\ell]$.

Avant Cantor, on refusait de considérer que les réels situés entre 0 et ℓ forment un ensemble "achevé", un "infini en acte". On préférait considérer qu'il s'agissait d'une potentialité "jamais épuisée" : par exemple entre deux nombres a et b de cet intervalle on peut toujours expliciter un "nouveau" nombre (a+b)/2.

C'est encore aujourd'hui la position des mathématiques constructives. Pour ce courant des mathématiques, les abstractions mathématiques sont des objets imaginaires créés par l'esprit humain et potentiellement réalisables sous forme concrète (un nombre entier est potentiellement réalisable sous forme de son écriture décimale, un nombre rationnel potentiellement réalisable sous forme de deux entiers (le numérateur et le dénominateur), une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ potentiellement réalisable sous forme d'un processus de calcul explicite etc...).

En ce qui concerne le courant actuellement dominant des mathématiques, il considère, après Cantor, l'existence d'ensembles «infinis actuels» (infinis en acte) comme non problématique quant aux conséquences logiques qu'on en tire, voire comme une sorte de "réalité idéale" : des ensembles tels que $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels), $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (ensemble des sous-ensembles du précédent), seraient donc doués d'une sorte d'existence quasi-objective. Cette position philosophique reçoit habituellement le nom de "réalisme platonicien".
Pour Grünbaum, qui se situe dans ce courant dominant des mathématiques, les paradoxes de dichotomie (progressive ou régressive) sont nuls et non avenus *au niveau du modèle mathématique tout au moins* : s'étonner de ce qu'une infinité de réels puisse être mise en évidence sur un segment $[0, \ell]$ de longueur finie, c'est tout simplement ignorer le b, a, ba de la théorie de Cantor : non seulement ce n'est pas absurde du point de vue logique, mais il y a effectivement, préexistants, avant même qu'on les ait montrés, une infinité de nombres réels sur l'intervalle $[0, \ell]$, qui est doué d'une préexistence objective en tant que totalité.

Le rapport avec la réalité physique

Qu'en-est-il du rapport entre modèle mathématique et réalité physique ?
Grünbaum ne discute pratiquement pas cette question, et c'est bien dommage.

En effet, une chose est de constater que "personne ne voit d'objection a priori" à ce qu'un intervalle d'espace donné soit divisible en deux indéfiniment ; autre chose est de discuter la réalité physique du processus. Comme le fait très justement remarquer Grünbaum, un "point" sur une ligne est considéré par un physicien comme la position *possible* d'un "objet". Or l'*expérimentation physique* est par nature *limitée quant à sa précision*. Et il est très improbable par exemple qu'on arrive jamais à une précision de l'ordre de 10^{-50} mètres sur une mesure de longueur. De ce point de vue, l'ensemble des positions physiquement possibles sur une ligne est plutôt fini que infini, même si on n'est jamais arrivé à mettre en évidence la moindre "discontinuité" dans l'espace. A supposer que l'espace soit formé d'un nombre fini, mais très grand, de "positions possibles" espacées de 10^{-100} mètres, la validité du modèle mathématique resterait presque entière tant qu'on n'est pas capable de mettre en évidence expérimentalement des longueurs de l'ordre de 10^{-100} mètres : il se trouve en effet que les calculs sont souvent plus faciles avec des variables continues qu'avec des variables discrètes. Un bon modèle mathématique est celui qui permet d'avoir une intuition claire des calculs à faire (clarté du modèle du point de vue conceptuel) et qui permet de faire les calculs facilement (efficacité du modèle du point de vue de ses applications). En ce sens un modèle "continu" peut très bien être un bon modèle pour une réalité discontinue mais dont les discontinuités ne sont pas perceptibles. Bref, la "marche triomphale" de Newton à Einstein et à la mécanique quantique ne dit rien quant au caractère, discret ou non, de l'espace, alors même que ces trois théories utilisent un espace modélisé par $\mathbb{R}^3$ (localement du moins, et pour aller vite...).

Notons que les théories physiques actuelles admettent une taille minimale pour une particule (on pense en effet qu'on finira un jour par épuiser le sujet), un volume fini pour l'univers en espace, voire même en espace temps. En aucune façon la notion "d'infini actuel" n'est donc fondamentalement nécessaire à la physique d'aujourd'hui. Il est probable que verront bientôt le jour des théories physiques où *toutes* les variables seront quantifiées, y compris l'espace et le temps : dans ce cas l'infini, actuel ou potentiel, pourrait être évincé du modèle mathématique lui-même.

Ici je me permets de poser "une question à mille francs" au lecteur de ces lignes : en imaginant un espace et un temps discrets, quelle expérience physique est-il nécessaire de monter pour mettre en évidence ce caractère discret, discontinu de l'espace et du temps ?

La perception physiologique de l'espace

Comme le fait très justement remarquer Grünbaum, notre perception "physiologique" de l'espace nous prépare à l'acceptation d'un modèle mathématique "continu". Quand nous regardons une ligne tracée sur un papier, nous la voyons comme un trait continu. Quand nous divisons un mètre en deux demi-mètres, nous avons le sentiment de retrouver "la même réalité" à une dilatation de rapport 2 près.

Certes nous savons que du point de vue physique, 10^{20} mètres, 1 mètre et 10^{-20} mètres, sont 3 réalités fondamentalement distinctes, (alors qu'elles sont équivalentes du point de vue du modèle mathématique de l'espace), mais notre perception physiologique est limitée entre 1/10 de millimètre et quelques mètres.

Nous savons également qu'une ligne tracée sur le papier se laissera résoudre en un éparpillement de petites tâches d'encre par le microscope, et que le microscope *électronique* montrera que chacune de ces petites tâches est formée de touts petits grains, mais tous les microscopes du monde n'ont pas encore atteint (à moins que nous n'ayons pas su interpréter correctement certaines images) un seuil de discontinuité pour l'espace. Ici donc, les microscopes ont pris le relais de notre intuition immédiate pour nous convaincre de la justesse du modèle continu de l'espace.

En fait Grünbaum, qui attaque à juste raison notre perception physiologique du temps, n'a pas l'air de se rendre compte que ses arguments peuvent être directement retournés contre l'intuition de l'espace que nous avons (il y a aussi une absence remarquable chez lui : ce sont les problèmes logiques soulevés par le recours à l'infini actuel).

L'argument de Grünbaum, quant au fond, est le suivant

1) le mouvement existe et le mouvement d'un mobile établit une correspondance "point" à "instant" entre les points d'une ligne et les instants de la durée utilisée pour parcourir la ligne ;
2) personne n'a d'objection a priori contre un espace continu ;
3) donc un temps continu est très raisonnable.

Or la première prémisse serait-elle vérifiée, cela prouverait seulement qu'une ligne d'espace et une durée de temps doivent être modélisées de manière analogue, mais cela n'impliquerait aucun argument en faveur d'une modélisation continue plutôt que discrète.

Par ailleurs, on sait qu'en mécanique quantique, la notion de mouvement d'une particule a dû être abandonnée en raison du principe d'incertitude d'Heisenberg (on y reviendra).

Terminons ce paragraphe par une réflexion concernant la manière habituelle de convaincre l'interlocuteur de l'existence d'une infinité actuelle (en acte) de points d'espace sur une ligne d'espace.
On dit :

« le milieu de la ligne peut être montré,
puis le milieu de la moitié à droite,
puis le milieu de la moitié restant à droite,
etc...
Si ces points peuvent être montrés, c'est bien qu'ils existaient avant qu'on les ait montrés ».

Relisons ces arguments avec un esprit critique : ils montrent que pour mettre en évidence une infinité de points sur une ligne, nous devons supposer cette ligne présente, immobile, pendant une durée de temps à venir infinie. Bref c'est seulement en nous appuyant sur notre sentiment d'un temps à venir infini que nous arrivons à concevoir par la pensée une infinité de points sur une ligne finie (et toute infinité quelle qu'elle soit d'ailleurs). Nous sommes bien loin de la réalité physique !
Et nous avons triché avec nos sentiments ; nous avons transféré notre sentiment d'infinité du temps à venir, sur un segment de longueur finie pour y découvrir une infinité de points *actuellement existants*.
Le plus sophiste dans l'histoire est-il bien Zénon ?

B) LEGITIMITE DE LA DICHOTOMIE APPLIQUEE AU TEMPS ?

Fausseté de la perception physiologique discontinue

Notre perception physiologique du temps est une succession d'états de conscience, ordonnés en "avant" – "après" grâce au phénomène de la mémoire. Nous nous rappelons les instants passés comme autant d'états de conscience marqués par telle ou telle particularité du moment. Or toute "particularité" a besoin d'une durée minimum pour se manifester à la conscience. Bref notre conscience du temps vécu est discrète, finie.

Grünbaum fait remarquer à juste titre que le temps physique est notablement "plus fin" que le temps physiologique. La discrétisation du temps par le subconscient est d'ailleurs elle-même plus fine que celle opérée par le conscient. Le temps physique n'a, à ce jour, présenté, semble-t-il, aucun caractère discret au niveau expérimental. En conséquence il est facile de réfuter quelques arguments de zénophiles en herbe du genre : où peut bien être le mobile *à l'instant qui suit immédiatement* le départ du mobile ?
Question sans fondement, répond Grünbaum, puisqu'il n'y a pas d'instant qui suit immédiatement l'instant du départ.

Nous dirons cependant : que le temps physique soit extraordinairement fin, c'est indéniable. Mais qu'il soit "continu" est par nature improuvable expérimentalement. Prouver par exemple expérimentalement qu'une bille qui tombe de A à B passe par une infinité de positions intermédiaires, en photographiant ces positions, non seulement réclamerait "beaucoup" de plaques photos, mais surtout nécessiterait d'éclairer l'objet (la bille) avec une intensité lumineuse infinie, car il faudra au moins un photon pour chaque position détectée. Ainsi, la bille sera désintégrée au cours de l'expérience, de manière fondamentalement incontournable, avant qu'une infinité de positions aient pu être mises en évidence, ne serait-ce que dans une expérience de pensée.

Que prouve le mouvement ?

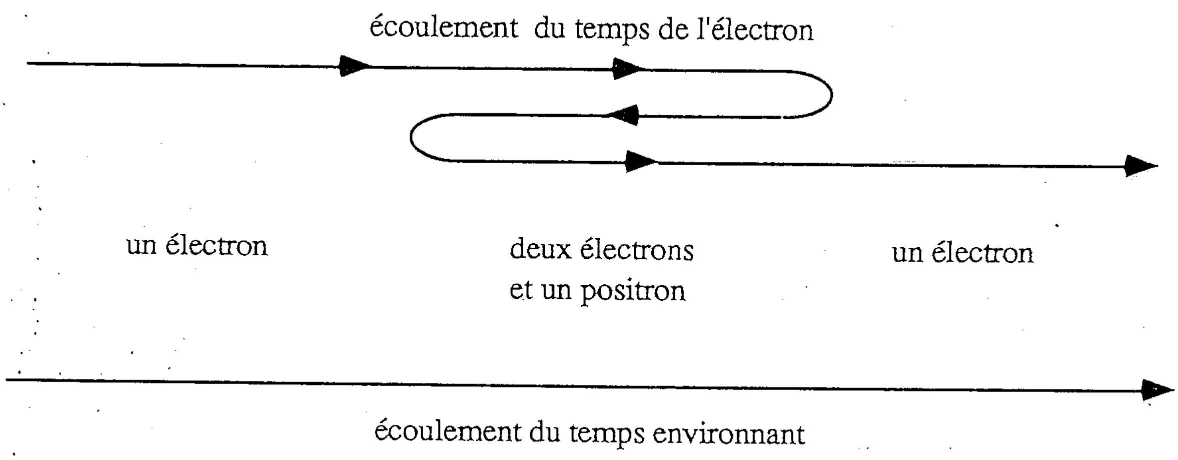
Le mouvement est une réalité. Que prouve l'existence de cette réalité ? Grünbaum nous dit : cela prouve qu'il y a une correspondance exacte entre points d'une ligne d'espace et instants d'une durée de temps.

En fait, la modélisation du mouvement sous la forme classique : $x = f(t)$ n'est plus valable en mécanique quantique. En effet, le principe d'incertitude affirme qu'il est impossible de connaître à l'instant t_0 *a la fois* x et dx/dt pour une particule donnée.

Or si la correspondance $x \longleftrightarrow t$ était modélisable par une fonction $t \longmapsto x = f(t)$, x et dx/dt seraient connaissables à chaque instant dans le modèle. Ce qui montre que le modèle n'est pas fidèle à la réalité.

Ainsi la conception du mouvement qui se dégage de la mécanique quantique est plutôt qu'il n'y a pas de correspondance exacte entre points d'une ligne d'espace et instants d'une durée de temps. En tout cas que le mouvement n'établit pas une telle correspondance.
Evidemment, il n'y a pas d'interprétation universellement admise du principe d'incertitude. L'interprétation la plus courante est que les objets microscopiques ne sont pas des objets à proprement parler, et que là est la raison profonde pour laquelle le mouvement des particules n'établit pas de correspondance exacte entre points ... et instants ...
Mais il y a d'autres possibilités d'interprétation, notamment celle selon laquelle l'espace et le temps ne sont pas fidèlement modélisés par $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$ (continuums de dimension 3 et 1), même localement. Peut-être le temps et l'espace sont-ils des réalités de nature très sensiblement différentes, au niveau des infiniment petits, de celle à laquelle nous a habitué notre expérience immédiate (qui se situe au niveau macroscopique). Ces "données a priori" (comme dirait Kant) qui sont le "milieu naturel" dans lequel les théoriciens cherchent les bonnes équations doivent peut-être être remises fondamentalement en cause.

Mais revenons à un point de vue moins spéculatif, plus immédiat, plus expérimental. De ce point de vue, le mouvement est la mesure du temps.
Autrement dit : le mouvement est la méthode expérimentale d'approche du temps, la seule connue.
Toute mesure d'une durée se fait par l'intermédiaire d'une mesure d'un déplacement, d'une longueur parcourue.
L'expérimentation physique a, pour des ordres de grandeur pas trop microscopiques, établi l'existence d'une *cohérence* des différents mouvements entre eux : c'est cette *cohérence* qui conduit au concept de temps "absolu", c'est-à-dire indépendant de l'expérience destinée à le mesurer (nous ne parlons pas ici d'"absolu" en un sens opposé au "relatif" de la relativité restreinte : c'est un temps absolu *pour un observateur donné* qui est ici raisonnable en raison de la cohérence des différentes expériences de mouvement faites par cet observateur).
Cependant, il est de notoriété publique que certaines expériences impliquant des ordres de grandeur très petits peuvent être interprétées comme un dérèglement local du temps d'une particule par rapport au temps environnant. Feynman interprète, à titre de jeu-suggestion, que lorsqu'on voit un électron donner deux électrons et un positron puis, très peu de temps après, de nouveau un seul électron, on pourrait dire que l'électron a parcouru le temps environnant de la manière suivante



Sur le fond, que nous dit le principe d'incertitude quant au temps ?

Si le mouvement au niveau microscopique (particules élémentaires) n'existe pas à proprement parler, et si le mouvement est la seule mesure possible du temps, alors le temps au niveau microscopique n'existe pas à proprement parler. Pour prendre une image : si le jour solaire et le jour stellaire n'étaient pas dans un rapport constant mais seulement approximatif et probable, si de même 2 horloges à quartz n'indiquaient la même heure qu'avec une certaine probabilité, nous ne songerions peut-être pas à modéliser le temps par un continuum à une dimension, toile de fond commune à toutes les expérimentations et toutes les théorisations. Cela suggère naturellement d'abandonner l'espace et le temps comme données extérieures a priori par rapport au champ d'une expérience. La querelle sur "continu ou discret" s'effacerait au profit d'une remise en cause plus fondamentale.

C) UNE INFINITE DE TACHES PEUVENT-ELLES ETRE ACCOMPLIES EN UN TEMPS FINI ?

Herman Weyl (Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton, 1949, p. 42) disait que supposer l'existence d'une infinité actuelle d'instants distincts sur une durée de une seconde revient à admettre la possibilité d'énumérer tous les nombres entiers (1, 2, 3, ...) dans le même laps de temps.

Un argument de nature différente est avancé par J. F. Thomson (Tasks and Supertasks, Analysis, 15 : 1, 1954; repris dans le livre déjà cité en entrée «The philosophy of Time» p 406-421) :
Considérons la suite des instants décrite dans la dichotomie progressive n° 1. Une telle suite contient une contradiction logique "en soi" parce que si elle existait on pourrait imaginer une expérience (de pensée) où un interrupteur serait actionné à chacun des instants décrits, allumant et éteignant alternativement une lampe. Mais quelle serait alors la position de l'interrupteur au bout de la dichotomie progressive ?

Grünbaum attaque ces arguments en décrivant des expériences de pensée, où il se passe une infinité de choses clairement distinctes en un laps de temps fini, et où aucune contradiction "cinématique" n'apparait.

Pour lui une contradiction "cinématique" serait l'utilisation d'une fonction mathématique (décrivant le mouvement) où la vitesse deviendrait infinie à un moment ou un autre. Grünbaum est légèrement ennuyé par le fait que ses expériences de pensée impliquent en général des contradictions "dynamiques" (fonctions impliquant des accélérations infinies). Il conclut néanmoins que l'absence de contradiction "cinématique" implique clairement une certaine possibilité d'existence physique de l'expérience (comme expérience de pensée), et en particulier qu'il n'y a aucune contradiction logique "en soi" dans la dichotomie progressive.

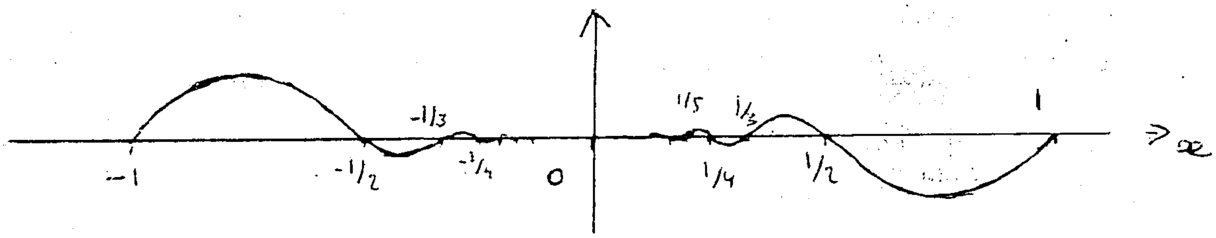
Pour ma part, me situant sur la même position que H. Weyl, je vais tâcher de répondre à Thomson et à Grünbaum.

Tout d'abord Thomson va beaucoup trop loin en prétendant découvrir une contradiction logique "en soi" au moyen de son raisonnement.

Je m 'explique. En tant que fonction mathématique, une fonction telle que :

$$f(x) = \sin(\pi/x) \,.\, \exp(-1/x^2)$$

est parfaitement définie
Son graphe ressemble à ceci.



Elle change cependant de signe "une infinité de fois" sur le segment [–1,0]. L'expérience de pensée de Thomson revient à dire :

Imaginons un interrupteur ouvert pour les instants t tels que $f(t) > 0$ et fermé lorsque $f(t) < 0$, que se passera-t-il à l'instant 0 ?

Nous pourrons répondre facilement :

Cela dépend de ce que vous imaginerez, arbitrairement, pour l'instant 0. Votre expérience de pensée ne définit pas l'état de l'interrupteur à cet instant, ni à aucun des instants pour lesquels $f(t) = 0$. C'est un défaut de votre expérience de pensée et non une contradiction logique.

Thomson pourrait essayer de contr'attaquer en disant :

Lorsque $f(t) = 0$, je décide que l'interrupteur est ouvert si $f'(t) > 0$ et fermé si $f'(t) < 0$" : l'état de l'interrupteur est cette fois-ci défini pour tous les t où $f(t) = 0$, sauf pour $t = 0$.

Mais nous pourrons répondre exactement de la même manière.

Si on analyse plus à fond l'argument de Thomson, nous verrons qu'il s'agit de l'étonnement du non-mathématicien devant une fonction telle que

$$f(x) = \sin(\pi/x) \,.\, \exp(-1/x^2)$$

qui présente un caractère à la fois extrêmement régulier (donc extrêmement acceptable) et une bizarrerie (cette infinité de changements de signe entre -1 et 0).

Du point de vue des mathématiques constructives, l'infinité de changements de signe de $f(x)$ entre -1 et 0 a exactement le même statut que l'infinité des entiers naturels : il s'agit d'un infini potentiel, et non actuel, décrivable dans le cadre d'un processus de base analogue (ici : la mise en évidence de l'infinité de changements de signes nécessite le calcul de valeurs de la fonction f, donc l'ensemble du processus est légèrement plus compliqué que le processus de Peano "ajouter 1 au nombre précédent", mais la mise en évidence de l'infini est de nature identique quant au fond dans les deux cas).

Je répondrai maintenant à Grünbaum en commençant par calmer ses débuts d'angoisse sur "les contradictions dynamiques" de ses fonctions :

la fonction $x \longmapsto \sin(\pi/x) \,.\, \exp(-1/x^2)$ ne présente aucune "contradiction" du point de vue de la valeur de ses dérivées successives : elle est indéfiniment dérivable en tout point, et au point 0, toutes ses dérivées sont nulles.

Par ailleurs le débat sur l'existence ou non d'une contradiction "purement logique" dans une telle fonction n'est pas substantiellement différent, comme je l'ai fait remarquer ci-dessus, du

débat sur l'existence ou non d'une contradiction "purement logique" dans un système "à la Peano" décrivant les entiers naturels.
Si on entend alors par "contradiction purement logique" une contradiction au niveau du système formel, ce débat a été "tranché" par Gödel lorsqu'il a montré qu'un système de Peano "classique" est ni plus ni moins contradictoire (du point de vue de la logique formelle) qu'un système de Peano "constructif" (ou "intuitionniste" comme on disait à l'époque). (La démonstration de Gödel n'implique aucun recours à un infini actuel, et est entièrement recevable par un mathématicien finitiste).

Bref, il me semble peu judicieux de lever des lièvres qui ont déjà été abattus.

C'est H. Weyl qui pose le bon problème. Et le débat qui demeure, sérieusement, est au niveau de la *sémantique* du système de Peano. Les "classiques" (qui n'existent que depuis Cantor, soulignons-le) ont une sémantique où $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont des "réalités mathématiques existantes" jouissant de propriétés a priori (par exemple : tous les énoncés sensés y sont vrais ou faux, depuis toujours et à jamais). Tandis que les "constructivistes" voient dans $\mathbb{N}$ "une manière de parler", et seuls les entiers naturels individuels ont le statut de "réalité mathématique existante" (tout énoncé sensé concernant un entier naturel particulier est *a priori* vrai *ou* faux, car il implique un simple "calcul", potentiellement faisable. Il n'en est plus de même pour un énoncé concernant la totalité des entiers naturels (comme le grand théorème de Fermat), énoncé dont la vérification peut demander un temps de calcul infini).

Notons, pour terminer ce point, que Grünbaum tend à inférer de la "non contradiction cinématique" de ses modèles, la possibilité de leur existence comme décrivant une réalité physique.

En fait, on en est très loin. Et la difficulté du problème soulevé en titre du paragraphe (une infinité de tâches accomplies en un temps fini ?) est telle, du point de vue physique, qu'on n'arrive même pas à imaginer une expérience de pensée (où l'on disposerait d'un espace infini pour engranger les résultats) mettant en évidence qu'il s'est bien passé une infinité de choses en un temps fini dans un volume fini : une telle expérience nécessite en effet de dépenser une énergie infinie dans le volume fini en question, ce qui empêche physiquement l'expérience de se dérouler "jusqu'au bout" du laps de temps considéré (cf. B premier sous-paragraphe).

D) LE QUATRIEME PARADOXE

Rappelons un énoncé de ce paradoxe :

> dans la modélisation du mouvement comme succession de "positions instantanées", rien ne permet de distinguer, à chaque instant, l'objet mobile de l'objet immobile qui occuperait à cet instant la position identique.

Ce paradoxe est à la fois extrêmement frappant et apparemment insaisissable.

Une réponse "facile" serait la suivante : ce qui "à l'instant t_0" distingue l'objet mobile de l'objet immobile, c'est précisément sa vitesse instantanée.
Mais cette réponse est, du point de vue mathématique, doublement fausse.
D'une part, lorsqu'un objet *commence* à bouger à l'instant t_0 , sa vitesse instantanée est nulle, et ne le distingue pas d'un objet immobile.
D'autre part, la définition de la vitesse instantanée, comme valeur limite d'une vitesse moyenne entre t_0 et $t_0 + \Delta t$, nous amène au cercle vicieux suivant : c'est seulement après ou avant l'instant t_0 qu'on peut constater le fait que l'objet possède une vitesse "instantanée" non nulle en t_0 . Autrement dit, la vitesse instantanée n'est pas une propriété du mouvement "à l'instant t_0" mais "au voisinage de l'instant t_0", si du moins on accepte la modélisation du mouvement par une fonction $t \longmapsto M(t)$, qui, à chaque instant t fait correspondre une position $M(t)$.

Nous voyons que nous sommes ainsi questionnés sur plusieurs points, lorsque nous essayons de comprendre en quoi le 4ème paradoxe nous gène :

- quelle est la nature du continu mathématique ?
- un continu de dimension 1 est-il une bonne modélisation pour l'écoulement du temps ?
- qu'est-ce qu'une fonction dérivable de $[t_0,t_1]$ dans $\mathbb{R}$? et est-ce que c'est un bon modèle pour le mouvement d'un point ?

En ne regardant que les problèmes proprement mathématiques nous entrons au coeur du débat entre points de vue contrastés : le point de vue "classique" (le réalisme platonicien généralement partagé par les adeptes de la théorie des ensembles dans sa version Zermelo-Frankel), le point de vue "non standard" (qui réintroduit les infiniment petits dans la pratique mathématique) et le point de vue "constructif". Nous nous limiterons à une brève discussion sur la nature du continu mathématique.

Une traduction du 4ème paradoxe peut être la suivante :

> comment une *durée* peut-elle n'être constituée que d'instants *sans durée* ?

ce qui, (si on modélise une durée par un continu mathématique de dimension 1) donne la question :

> comment l'intervalle [0, 1] de longueur 1 peut-il n'être rien d'autre que la réunion de tous les intervalles [x,x] de longueur nulle contenus dans [0, 1] ?

On sait qu'en théorie de la mesure, l'égalité des ensembles :

$$[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1/4] \cup [1/4,1/8] \cup [1/8,1/16] \cup \ldots$$

se traduit par l'égalité des nombres :

$$1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$$

chaque segment dans la première égalité étant représenté par sa longueur dans la seconde. Ceci, en général, rassure beaucoup les mathématiciens par rapport au paradoxe de la dichotomie progressive. Malheureusement aucune théorie de la mesure ne peut rendre compte de l'égalité des ensembles :

$$[0, 1] = \bigcup_{x \in [0, 1]} [x,x] \qquad (*)$$

qui devrait se traduire par une égalité de nombres :

$$1 = \sum_{x \in [0, 1]} 0$$

Cela montre bien[1] que la théorie de la mesure ne résout pas vraiment le paradoxe de la dichotomie progressive : elle ne fait qu'en proposer une interprétation, à travers une définition adéquate de certaines sommes comportant une infinité de termes.

Quant à l'égalité problématique (*)

$$[0, 1] = \bigcup_{x \in [0, 1]} [x,x]$$

voici comment trois mathématiciens, un classique, un non-standard et un constructiviste pourraient y faire face.

<u>Le classique</u> :
Pour moi, tout objet mathématique est un ensemble, ce qui signifie que son essence est d'être une simple collection d'objets (qui sont eux-mêmes des ensembles). Donc je suis tout à fait d'accord avec l'égalité proposée.

Le paradoxe : $1 = \sum_{x \in [0, 1]} 0$, n'est qu'apparent. Il y aurait un véritable paradoxe si l'infini {0, 1] était un infini dénombrable, de même grandeur que $\mathbb{N}$. Le paradoxe est “résolu” par le fait que l'infini [0, 1] est beaucoup plus grand, ce qui rend la somme écrite au second membre sans signification.

<u>Le non-standard</u> :
Pour moi, l'ensemble [0, 1] contient beaucoup plus que les éléments construits par le classique, éléments que j'appelle standards.
Je pense que chaque réel standard est entouré d'un halo de points infiniment voisins, indiscernables à l'oeil nu. Le halo x° entourant chaque x standard contient des segments de longueur infinitésimale mais non nulle. Au lieu de l'égalité problématique (*), j'en propose une autre :

$$0^\circ \cup [0, 1] \cup 1^\circ = \bigcup_{x \text{ standard} \in [0, 1]} x^\circ \qquad (**)$$

Le fait que chaque x° contienne des intervalles de longueur non nulle peut être considéré comme une bonne explication du fait que leur réunion a une longueur non nulle. Ceci *dit*, je ne peux pas mesurer la longueur de x° et je ne peux donc pas donner de traduction numérique directe pour l'égalité d'ensembles (**). Mais je peux encore vous proposer une autre égalité du même style, plus précise. Soit N un entier infiniment grand, on a :

---

1 ainsi que le fait remarquer Grünbaum dans un raisonnement où il montre le rôle central joué par l'infini actuel en mathématiques cantoriennes

$$[0,1] = \bigcup_{0 \leq n < N} \left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N} \right] \qquad (***)$$

Chacun des intervalles du second membre a une longueur infinitésimale non nulle $1/N$ et est contenu dans le halo d'un unique réel standard x de $[0, 1]$. Ainsi, le découpage proposé en (***) est plus fin que celui proposé en (**) et il est susceptible d'un traitement numérique :

$$1 = \frac{1}{N} + \ldots\ldots + \frac{1}{N} \quad \text{(N fois)}$$

En bref, pour moi, l'introduction des réels non standards élucide complètement l'égalité problématique (*) en en proposant une interprétation «numérique» du même style que pour l'égalité non problématique :

$$[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1/4] \cup [1/4,1/8] \cup [1/8,1/16] \cup \ldots$$

<u>Le constructiviste</u> :
Mon point de vue est assez proche du non standard puisque, pour moi également, chaque réel x est entouré de réels si proches de lui que je n'arrive pas à les discerner, ce qui m'empêche d'accepter le tiers exclu classique : $x < y$, ou $x = y$, ou $y < x$. Certains s'avèreront un jour égaux à x , d'autres distincts de x , et pour d'autres encore nous ne serons jamais fixés.
Pour moi, l'ensemble $[0, 1]$ n'existe jamais comme simple collection d'objets. Il est d'emblée muni de sa topologie naturelle. Par exemple, je suis dans l'impossibilité de construire une bijection de cet ensemble sur lui-même qui ne soit pas en même temps un isomorphisme pour sa topologie.
C'est avec ces incertitudes mathématiques, qui me rappellent les incertitudes expérimentales de la physique, qu'il faut que je travaille.
Et si j'ai un peu plus de mal que le mathématicien classique pour établir mes théorèmes, je pense que mes résultats sont plus sûrs et mieux adaptés à la physique.
Je n'arrive pas à concevoir $[0, 1]$ comme un ensemble de points bien distincts, et par exemple, pour moi, $[0, 1]$ n'est pas la réunion de $[0, 1/2[$, $\{1/2\}$ et $]1/2, 1]$ dans la mesure où certains réels semblent hésiter à tout jamais entre être égaux à 1/2 ou très légèrement inférieurs, ou très légèrement supérieurs. Aussi, sans pouvoir la démontrer fausse, je conteste l'égalité :

$$[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} [x,x]$$

dans la mesure où elle dit que la réunion du second membre est une réunion disjointe en un sens fort, et qu'elle pourrait donc être munie d'une topologie discrète.

Séminaire EPIPHYMATHS

Henri LOMBARDI
Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
25030 BESANCON CEDEX