LE TIERS EXCLU ET L'INFINI NE FONT PAS BON MENAGE

Les affirmations du langage courant se prêtent très mal à la logique du Vrai et du Faux. Lorsqu'on dit par exemple : "ceci est une grosse pomme" la limite entre Vrai et Faux est entourée d'une zone de flou importante. Tout d'abord concernant la partie "ceci est une pomme" (s'il manque la queue ? si elle est coupée en 2, si on a enlevé les pépins, etc...) et aussi concernant l'affirmation que la pomme est "grosse".

En un certain sens on peut dire que l'homme a inventé des êtres mathématiques abstraits tels que "les nombres" ou "le plan euclidien" de manière à pouvoir raisonner "sans ambiguité de sens", c'est-à-dire de manière à pouvoir raisonner avec une logique du Vrai et du Faux. Une fois définies les opérations élémentaires sur les nombres entiers une affirmation telle que :

"si p est un nombre premier et si r est un entier $< p$"
"le nombre $r^{(p-1)} - 1$ est divisible par p "

est vraie, et on peut en donner une démonstration parfaitement convaincante.

Cependant l'introduction par Cantor des ensembles infinis dans les mathématiques a jeté une grande confusion au sujet de la notion de Vrai et Faux.

On pourrait croire que l'infini en mathématiques existait bien avant Cantor, dès que la notion de nombre entier fut mise au point. La collection des entiers naturels, en effet, a la particularité de n'être "jamais finie". En fait, avant Cantor, personne n'avait eu l'audace de considérer "l'ensemble de tous les entiers naturels" comme une totalité donnée, actuelle. L'esprit humain, en effet, ne peut appréhender qu'un nombre fini d'objets, les uns après les autres.

Avant Cantor donc, la collection des entiers naturels était seulement un infini en puissance, un infini "potentiel" et non "actuel". Ce que l'homme avait clairement en tête, c'est <u>le processus</u> qui permet de passer de l'entier n à l'entier n + 1, processus qui fait que la collection des entiers n'est jamais finie.

La croyance en un infini actuel équivaut en fait de manière quasiment logique à la croyance en un "Dieu" mathématicien capable, lui, d'appréhender "d'un seul coup" l'ensemble de tous les entiers naturels. Les mathématiciens grecs ne croyaient pas en l'infini actuel.

Zenon d'Elée, à sa manière et à juste titre, avait soulevé la contradiction existant entre l'homme et "Dieu" puisque Dieu est capable de diviser en un temps fini (en une seconde !) l'intervalle de temps constitué par 1 seconde en une infinité de subdivisions, alors que l'homme n'arrive jamais au bout de la description complète de cette "subdivision à l'infini", ni en une seconde, ni en un siècle.

De même Euclide, dans ses Eléments, ne considère pas "un espace infini à 3 dimensions" mais seulement "un espace à 3 dimensions qui n'est jamais fini". Il ne considère pas "l'ensemble de tous les entiers naturels" mais seulement "des entiers naturels" (collection ouverte, jamais finie). Il ne considère pas "l'ensemble des nombres réels" mais se contente de mesurer (par ce qu'aujourd'hui nous appellerions un nombre réel) toute grandeur qui vient à se présenter à lui dans sa quête géométrique.

La notion d'infini mathématique actuel s'est avérée extrêmement "pratique" et a été adoptée par la majorité des mathématiciens.

Cependant, le prix à payer est en fin de compte assez cher. En effet, les notions logiques de base, qui ne posent pas problème lorsqu'elles sont utilisées pour des propriétés bien définies portant sur des collections finies d'objets mathématiques, ne peuvent s'appliquer aux propriétés concernant des ensembles infinis qu'au prix d'une extrapolation douteuse.

Je vais donner ici quelques exemples.

<u>1er exemple</u> : La conjecture de Goldbach. Cette conjecture est que : tout entier pair supérieur à 4 est somme de 2 nombres premiers. Nous sommes tellement habitués à raisonner avec l'infini actuel que si vous lisez :

- la conjecture est forcément vraie ou fausse.

Vous avez l'impression de lire une trivialité.
Or ce n'est pas du tout une trivialité.

Dire que la conjecture est fausse c'est dire qu'on peut trouver un entier pair supérieur à 4 qui n'est pas somme de 2 nombres premiers.

Donc il suffit d'une vérification pour montrer que la conjecture est fausse.

Par contre dire que la conjecture est vraie c'est signifier, ou bien qu'on en possède une démonstration convaincante, ou bien qu'il faut faire une infinité de vérifications (chose que l'homme ne sait pas faire).

Maintenant supposez que la situation concrète soit la suivante :

- l'homme ne trouvera jamais de démonstration convaincante de la conjecture,

- l'homme ne trouvera jamais de contre-exemple prouvant que la conjecture est fausse.

Alors dans ce cas, seul le "Dieu mathématicien" (s'il existe) peut dire que la conjecture est forcément vraie ou fausse.

Vous direz sans doute que je coupe des cheveux en 4. En fait je mets seulement en évidence qu'il n'est pas du tout <u>trivial</u> de considérer que la loi du tiers exclu s'applique aux ensembles infinis.

L'inconvénient avec les mathématiciens Cantoriennes n'est pas tant d'affirmer "la conjecture de Goldbach est forcément vraie ou fausse", mais c'est de tirer des conséquences logiques à partir d'affirmations "douteuses" de ce type.

Prenons un 2ème exemple.

2ème exemple : l'hypothèse du Continu : L'hypothèse du continu est le problème suivant : existe-t-il une partie A de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dont le cardinal sort strictement compris entre le cardinal de $\mathbb{N}$ et le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Si les "infinis actuels" $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ existent réëllement "quelque part" (pour un Dieu mathématicien) alors l'hypothèse du continu admet certainement une réponse positive ou négative.
Pourtant Godel et Cohen ont démontré 2 résultats que les mathématiciens s'accordent à interpréter de la manière suivante : l'homme ne saura jamais démontrer si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse.

On voit donc que l'introduction des 2 infinis actuels $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ suffit à introduire des problèmes à jamais insolubles pour l'homme. Voici qui jette un flou considérable sur la notion de "Vérité" appliquée dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$!

On peut d'ailleurs remarquer que l'homme ne pourra, quant à lui, jamais définir qu'une quantité "dénombrable" de parties de $\mathbb{N}$: une partie de $\mathbb{N}$ définie par un homme sera toujours en fin de compte définie par une phrase imprimée dans un livre. Donc l'homme ne dispose que d'un infini "potentiel" de parties de $\mathbb{N}$, pas plus gros que l'infini "potentiel" des nombres entiers. L'affirmation selon laquelle "l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$" a un cardinal strictement plus grand que "l'ensemble $\mathbb{N}$" est donc une vérité moins "absolue" que 2 + 2 = 4 ; elle est entachée d'un certain flou ; elle nécessite en quelque sorte "les parties de $\mathbb{N}$ que l'homme ne pourra jamais définir".

Après tout vous pouvez penser que je continue à couper des cheveux en 4 et que d'ailleurs l'hypothèse du continu n'a aucune conséquence importante pour les mathématiques couramment pratiquées.

Je vais donc donner un 3ème exemple :

3ème exemple : Un théorème de mathématiques classiques (*) affirme que :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels appartenant à l'intervalle $[0,1]$, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente (φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).

La démonstration, non moins classique, de ce théorème, consiste à couper $[0,1]$ en 2 morceaux : $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$; et à dire :

- ou bien il y a une infinité de termes de la suite sur $[0,1/2]$, et je choisis $u_{\varphi(o)} \in [0,1/2]$
- ou bien c'est faux, et alors il y a une infinité de termes de la suite sur $[1,1/2]$, et je choisis $u_{\varphi(o)} \in [1/2,1]$

Ensuite, je recommence le processus avec l'intervalle $[0,1/2]$ ou $[1/2,1]$ selon le cas, et ainsi de suite.

On voit tout de suite que cette "démonstration" demande une coopération active du "Dieu mathématicien" qui décide, à chaque étape du processus, s'il y a une infinité de termes de la suite, ou non, dans le premier des 2 demi-intervalles considérés.(**)

Ce théorème possède d'ailleurs un "contre théorème" en mathématiques classiques, qui s'énonce comme suit :

Il n'existe pas de processus effectif qui, au vu d'un processus effectif fournissant la suite $(u_n)_{u \in \mathbb{N}}$, soit capable de fournir un processus effectif pour la fonction $\varphi(n)$ (qui permet d'extraire une sous suite convergente).

(*) On dit "mathématiques classiques" pour les mathématiques qui utilisent sous scrupule les ensembles infinis actuels.

(**) On aura remarqué que la "coopération active du Dieu mathématicien" consiste à valider "le tiers exclu" exprimé dans la démonstration sous la forme : - ou bien... - ou bien...

Plusieurs remarques sur ce contre théorème :

. sa "signification" est en gros la suivante, "même si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée de façon parfaitement explicite, il n'existe pas de méthode explicite générale pour en extraire une sous-suite convergente".

.. l'énoncé du contre théorème est un peu "flou" dans la mesure où la notion de "processus effectif" demande à être définie de manière précise. Disons seulement que les mathématiciens "classiques" sont globalement tombés d'accord sur une définition de la notion de "processus effectif" qui correspond à l'intuition qu'ils en ont.

... ce "contre théorème" ne pose pas de "problème de conscience" insurmontable à un mathématicien "classique". Pour lui le théorème proprement dit énonce une vérité "absolue", tandis que le contre théorème exprime la faiblesse humaine face aux vérités absolues.

Néanmoins, on voit clairement que le contre théorème réduit à néant l'utilité pratique du théorème lui-même.
Supposez qu'un physicien décrive un phénomène observable au moyen d'un processus engendrant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels appartenant à l'intervalle $[0,1]$.
Supposez qu'ensuite il bâtisse une théorie du phénomène en question dans laquelle il a besoin d'extraire une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergente. Et bien, malgré le fait que "dans l'absolu" une telle sous-suite est sensée exister, la théorie du phénomène en question n'est absolument pas opératoire. (*)

(*) Pour certaines suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe une sous-suite extraite convergente explicite, et dans ces cas particuliers, la théorie du physicien pourrait être soumise à vérification expérimentale. Mais la théorie n'est cependant pas opératoire "en général" dans la mesure où il n'y a pas moyen, en général, de connaître ce que prédit cette théorie dans une situation concrète donnée, et donc il n'y a pas moyen de soumettre cette théorie à une vérification expérimentale.

Retournons maintenant au point de vue "purement mathématique". Toutes les conséquences qu'on tire du "théorème" de l'existence d'une sous-suite convergente sont elles réellement "valides" ?
Cette question a un sens dans la mesure où certaines conséquences du théorème peuvent avoir une signification beaucoup plus "tangible", "concrète", (donc effectivement vérifiable) que le théorème lui-même. Supposez par exemple que vous démontriez la conjecture de Goldbach, (resp : son contraire) en utilisant le théorème de la sous-suite convergente. Etes vous pour autant assurés de ne jamais trouver de contre-exemple à cette conjecture (resp : de pouvoir en trouver un) ?
Le problème à vrai dire n'est pas clairement tranché et les logiciens ne sont pas tous du même avis sur la question.
La structure de votre démonstration de la conjecture de Goldbach pourrait être :

Si je possède un contre-exemple à cette conjecture, alors je sais construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels $\in [0,1]$ pour laquelle je prouve qu'il n'y a pas de suite extraite convergente.

Mais cette démonstration, a priori, ne convaincra que ceux qui pensent que le théorème de la sous-suite convergente représente une "vérité absolue" : invérifiable par l'homme certes mais "vérité" néanmoins.
Ceux qui pensent que le théorème de la sous-suite convergente n'a pas de "signification réelle", et ne représente qu'une "manière de parler" adoptée par les mathématiciens "classiques", ne seront pas du tout convaincus a priori par la démonstration.

La conclusion générale de la discussion concernant ce troisième exemple est pour moi que la notion de "vérité" est entachée de flou dès qu'on l'applique à des propriétés (même bien définies) concernant des ensembles infinis "actuels".

J'en viens maintenant à un dernier exemple, qui met bien en évidence que l'extrapolation aux ensembles infinis des lois de la "logique des ensembles finis" est vraiment <u>périlleuse</u> (même pour un adepte de Cantor).

4ème exemple :

Revenons tout d'abord sur la nature de "l'extrapolation" qui a été décrite dans le 1er exemple.

Notons "A(x)" pour : "2x + 4 est somme de 2 nombres premiers"
Soit $\mathbb{N}_k = \{1, \ldots, k\}$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et k.
On a pour tout entier x :

$$A(x) \quad \text{ou} \quad \text{non } A(x)$$

En effet l'affirmation A(x) est parfaitement décidable puisqu'on dispose d'un processus qui permet de calculer tous les nombres premiers inférieurs à 2x + 4.
On a donc aussi pour tout entier k :

$$\text{"}\forall\ x \in \mathbb{N}_k \quad A(x)\text{"} \quad \text{ou} \quad \text{"}\exists\, x \in \mathbb{N}_k \quad \text{non } A(x)\text{"}$$

Cette affirmation demande "simplement" de répéter k fois la vérification selon laquelle A(x) est vrai ou faux.
L'extrapolation à l'infini consiste à affirmer :

$$\text{"}\forall\ x \in \mathbb{N} \quad A(x)\text{"} \quad \text{ou} \quad \text{"}\exists\, x \in \mathbb{N} \quad \text{non } A(x)\text{"}$$

Je pense avoir à peu près expliqué en quoi cette extrapolation à l'infini pose problème.(*)

Je vais maintenant montrer une autre extrapolation à l'infini qui semble à priori tout aussi légitime et qui, en réalité, ne l'est pas du tout (pour les adeptes de Cantor eux-mêmes).
Il s'agit de considérer un jeu où 2 adversaires s'affrontent sans intervention du hasard.
Ce jeu, par exemple le jeu d'échec, est d'abord supposé de nature finie

(*) A vrai dire, si l'entier k est "assez grand" la vérification de l'énoncé : B_k : "$\forall x \in \mathbb{N}_k \ A(x)$" ou "$\exists x \in \mathbb{N}_k$ non A(x)" est susceptible de dépasser "les capacités de calcul de l'Univers". Admettre la "vérité" de B_k demande donc également une extrapolation. Cette extrapolation est appelée par l'école russe "extrapolation du potentiellement réalisable". Il s'agit néanmoins d'une toute autre extrapolation que "l'extrapolation à l'infini".

c'est-à-dire que le nombre de coups dans une partie est limité a priori (par exemple à 1 000) et que dans chaque situation le joueur ne peut choisir qu'entre un nombre fini de possibilités (mettons par exemple 200).

La partie peut alors grosso modo être décrite comme suit :

le premier joueur choisit un nombre entre 1 et 200 : x_1

le deuxième joueur choisit à son tour un nombre entre 1 et 200 : x_2

etc...

Au bout de 1000 coups la partie s'arrête (si elle est terminée avant on peut convenir que tous les coups de la fin sont d'un type donné, réservé à cet effet).

La partie ainsi complètement décrite est une suite $(x_n)_{1 \leqslant n \leqslant 1\,000}$ de 1 000 nombres entiers compris entre 1 et 200.

Si j'appelle A l'ensemble de toutes les suites de 1 000 nombres entiers $\in \mathbb{N}_{200}$ (ensemble qui possède $200^{1\,000}$ éléments), la "règle du jeu" peut être considérée comme donnée par une partie B de A pour laquelle on a :

. si $(x_n)_{1 \leqslant n \leqslant 1\,000} \in B$ c'est le joueur 1 qui a gagné

. si $(x_n)_{1 \leqslant n \leqslant 1\,000} \notin B$ c'est le joueur 2 qui a gagné (il n'y a pas de partie nulle).

Comme $200^{1\,000}$ est un nombre hors d'atteinte des ordinateurs les plus puissants, il est possible que le jeu en question (si B est suffisamment compliquée) reste à jamais un mystère pour l'homme.

C'est peut être le cas du jeu d'échec par exemple.

Néanmoins, on peut affirmer (*)

- ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante
- ou bien le deuxième joueur dispose d'une stratégie gagnante.

(*) si on admet "l'extrapolation du potentiellement réalisable".

En effet, la première affirmation peut s'écrire :

(i) $\exists x_1 \in \mathbb{N}_{200} \quad \forall x_2 \in \mathbb{N}_{200} \quad \exists x_3 \in \mathbb{N}_{200} \ldots \forall x_{1000} \in \mathbb{N}_{200} : (x_n)_{1 \leqslant n \leqslant 1000} \in B$

Et la 2ème affirmation n'est que la négation de la première :

(ü) $\forall x_1 \in \mathbb{N}_{200} \quad \exists x_2 \in \mathbb{N}_{200} \quad \forall x_3 \in \mathbb{N}_{200} \ldots \exists x_{1000} \in \mathbb{N}_{200} : (x_n)_{1 \leqslant n \leqslant 1000} \notin B$

En admettant "l'extrapolation au potentiellement réalisable", une et une seule ces 2 affirmations est forcément vraie, car ceci est vérifiable en <u>un nombre fini</u> d'opérations purement mécaniques(cela peut faire l'objet d'un programme d'ordinateur).

Passons maintenant au problème de "l'extrapolation à l'infini" de cette affirmation ("ou bien 1 dispose d'une stratégie gagnante, ou bien c'est 2").

On se trouve face à la question d'interpréter la signification d'une écriture : "$\forall x_1 \in \mathbb{N}_{200} \quad \exists x_2 \in \mathbb{N}_{200} \ldots\ldots\ldots\ldots$ "
où on trouverait une infinité de quantificateurs en cascade.

Il faut pour cela donner une formulation équivalente à (i) dans le cas "fini" et pour laquelle "l'extrapolation à l'infini" soit plus facile à écrire.

Voici donc une formulation équivalente à (i)

(i') $\begin{cases} \exists x_1 \ \exists f_2 \ \exists f_3 \ \ldots \ \exists f_{499} \ \forall x_2 \ \forall x_4 \ldots \forall x_{1000} : \\ (x_1, x_2, f_1(x_2), x_4, f_2(x_2, x_4), \ldots, x_{1000}) \in B \end{cases}$

dans cet énoncé écrit de manière abrégée $x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{1000}$ doivent êtres pris dans $\mathbb{N}_{200}$, tandis que f_1 est une fonction de $\mathbb{N}_{200}$ dans $\mathbb{N}_{200}$, f_2 est une fonction de $\mathbb{N}_{200}^2$ dans $\mathbb{N}_{200}$, etc...

Il est clair que la formulation (i') est équivalente à (i) : en effet le "$\exists x_3$" dans (i) signifie que le premier joueur a le moyen de riposter à tous choix x_2 fait par le 2ème joueur au moyen d'un nombre $x_3 = f_1(x_2)$.

De même le "$\exists x_5$" dans (i) signifie que le premier joueur a le moyen de riposter à tous choix x_2 et x_4 faits par le 2ème joueur, etc...

Nous sommes maintenant en mesure de donner une signification à la phrase "le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante lorsqu'on "extrapole à l'infini" c'est à dire "lorsqu'on remplace $\{1,2,\ldots,1000\}$ par $\mathbb{N}$".

Prenons donc pour A l'ensemble $\mathbb{N}_{200}^{\mathbb{N}^*}$ de toutes les suites infinies de nombres entiers compris entre 1 et 200, et prenons pour B une partie arbitraire de A.

L'énoncé (i") qui signifie "le premier joueur a une stratégie gagnante pour le jeu B" est le suivant :

$$(\text{i}")\begin{cases} \exists x_1 \in \mathbb{N}_{200} \quad \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \forall (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} : \\ \quad \text{en posant} \quad x_{2n+1} = f_n(x_2, x_4, \ldots, x_{2n}) \quad \text{on a} \\ \quad\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in B \end{cases}$$

Dans cet énoncé $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ doit être pris dans l'ensemble des suites de fonctions de $\mathbb{N}_{200}^{n}$ dans $\mathbb{N}_{200}$.

Autrement dit, $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est pris dans l'ensemble suivant :

$$\prod_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{N}_{200}^{(\mathbb{N}_{200}^{n})}$$

De même, l'objet $x = (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ doit être pris dans l'ensemble : $\mathbb{N}_{200}^{2\mathbb{N}^*}$ (où $2\,\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers pairs $\geqslant 2$).

On pourrait de même écrire un énoncé (ii") qui ait pour signification "le 2ème joueur a une stratégie gagnante pour le jeu B".

On s'attend alors, en extrapolant "cette forme particulière de tiers exclu" à l'infini(*), à ce qu'on ait le résultat suivant :

{ pour tout jeu infini $B \subset \mathbb{N}_{200}^{\mathbb{N}^*}$ ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante, ou bien le 2ème joueur dispose d'une stratégie gagnante.

(*) Il ne s'agit pas du "tiers exclu" au sens ordinaire de la logique classique ; il s'agit néanmoins d'une forme "intuitive" de tiers exclu, apparemment parfaitement raisonnable, ni plus ni moins "contestable" que la forme ordinaire du tiers exclu.

Disons plutôt : on s'attend à ce que ce résultat soit vrai (ou au pire que son contraire soit indémontrable) dans une théorie des ensembles couramment pratiquée.
Eh bien, surprise ! ce résultat est <u>démontré</u> FAUX dans la théorie des ensembles "ordinaire " appelée ZF (axiomatisée par Zermelo Frankel, et fonctionnant selon les règles de la logique "classique", donc admettant la version ordinaire du tiers exclu).

Des logiciens ont proposé de modifier la théorie ZF en supprimant l'axiome du choix et en introduisant un nouvel axiome "de tiers exclu" :

Axiome de détermination (Mycielski) : Pour tout jeu $B \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante, ou bien le 2ème joueur dispose d'une stratégie gagnante.

Mais cette solution, qui sauve le tiers exclu dans le cas des "jeux infinis", ne sauve nullement le principe général d'extrapolation à l'infini.

En effet, l'axiome du choix est "évidemment vrai" dans le cas d'ensembles finis, et il n'y a aucune raison de refuser son extrapolation à l'infini pour un mathématicien classique.

Godel a d'ailleurs démontré que l'axiome du choix était "non contradictoire avec les autres axiomes de ZF."
Autrement dit "s'il existe" un "univers mathématique" où les axiomes de ZF moins l'axiome du choix sont vérifiés, alors on peut construire en son sein un autre "univers mathématique" où tous les axiomes de ZF (y compris l'axiome du choix) sont vérifiés.

L'enseignement que je tirerai de ce "4ème exemple" est que, d'un point de vue Cantorien, toutes les extrapolations à l'infini "raisonnables" ne sont pas compatibles entre elles.
C'est le témoignage d'une <u>fragilité interne</u> certaine du système de pensée Cantorien.

Conclusion :

Face aux problèmes posés par la "signification réelle" des énoncés mathématiques de la théorie des ensembles (*) d'une part, et par la "validité réelle" des résultats obtenus dans cette théorie (problème de validité qui se pose lorsque ces résultats ont une signification concrète évidente), la tentation est grande de se rabattre sur un système formel du genre "théorie axiomatique des ensembles ZF".

C'est pourtant un choix catastrophique, car quel intérêt porter à une théorie formelle dont les "théorèmes" ne prétendent plus énoncer des Vérités ?

De plus, cruelle ironie du sort sans doute, dans une théorie formelle telle que ZF, on découvre chaque jour de nouveaux énoncés A pour lesquels on a tout à la fois

. (A ou non A) est démontrable.(c'est même un axiome)
. A n'est pas démontrable.
. non A n'est pas démontrable.

Et c'est le cas non seulement d'énoncés tels que l'hypothèse du continu (énoncé dont la signification concrète est discutable) mais d'énoncés ayant une signification concrète évidente (énoncés du type "Conjecture de Goldbach").

Le point de vue "constructif" en mathématiques est le point de vue "réaliste concret" qui, à propos de chaque énoncé mathématique, pose le problème de sa "signification réelle".
Le point de vue "constructif" demande que toute affirmation mathématique ait un sens. Cela ne revient pas à jeter bas toutes les mathématiques "classiques" mais à les aborder d'un autre point de vue.

E. Bishop, auteur de "Fondements de l'analyse constructive", fait à ce sujet la remarque suivante :

"Le point de vue constructif ne signifie pas que les mathématiques

(*) Ce qu'on appelle ordinairement la "théorie des ensembles" est en fait une "théorie des ensembles "infinis actuels"".

classiques sont "sans valeur". Ce serait aussi stupide que de dire que, d'un point de vue "classique" les mathématiques "non rigoureuses" seraient "sans valeur".
Tout théorème de mathématiques classiques pose un défi au mathématicien constructif :

- soit en trouver une démonstration constructive
- soit en donner une version constructive."

Je terminerai en remarquant que dans les applications "concrètes" des mathématiques (en physique théorique, en astronomie...) il s'agit toujours en fin de compte de décrire des processus de calcul qui, à partir de certaines données numériques, permettent d'obtenir des résultats sous forme numérique, à vérifier ou infirmer par l'expérience. Ainsi seule la partie "constructive" des mathématiques s'avèrera en définitive un jour ou l'autre "utile" et "vérifiable" (*). La partie non constructive, elle, consiste essentiellement en un discours concernant des êtres mathématiques dont l'existence réelle est tout sauf évidente. Et personne (sauf un Dieu mathématicien) ne peut être sûr que ce discours n'est pas en grande partie "vide de sens".

LOMBARDI Mars 1983.

(*) Il ne faut pas prendre cette affirmation pour la défense d'un point de vue "utilitaire".
Même la partie constructive d'une théorie mathématique donnée n'est pas forcément directement ou immédiatement "utilisable" en physique théorique par exemple (son utilité peut n'apparaître que bien longtemps après sa construction comme théorie mathématique : cf la théorie des groupes).
Cependant, toute mathématique constructive est toujours "immédiatement utile" en tant que partie de la "théorie générale des processus" : ce qui revient à dire : tout énoncé de mathématiques constructives démontré constructivement a bien un sens.

BIBLIOGRAPHIE

. "Penser les mathématiques" - Collection Seuil Points.
On comparera avec intérêt les articles de Dieudonné et de Apéry.
Une bibliographie assez complète se trouve à la fin de l'article d'Apéry.

. "Les mathématiques : fin en soi ou instrument ?" Pierre Thuillier
La Recherche n° 37.

. "Les fondements des mathématiques" - Morris Kline.
La Recherche n° 54.

. "Mathématiques constructives" - Allan Calder.
Pour la Science n° 26.

. "Les progrès des mathématiques" bibliothèque "pour la Science"
On consultera notamment les articles
- "Suites aléatoires et démonstrations mathématiques" G. CHAITIN
- "Les problèmes intrinsèquement difficiles" Lorry Stockmeyet et Ashok Chandra.

Il n'existe pas actuellement de réel livre de références en français (seulement des articles de revue).

Citons néanmoins (en anglais) :

. "Foundations of constructive analysis" : E. Bishop
New York Mac Graw Hill 1967 épuisé

. "Constructive real numbers and constructive function spaces"
Translation of Mathematical Monographs (traduit du russe)
American Mathematical Society Vol. 21 1968.

. "Constructive functional analysis" Bridges D. London Pitman 1979.

. "Intuitionism" Heyting 1966. Amsterdam NorthHolland

. "Fondements des mathématiques. Intuitionisme. Théorie de la démonstration"
Heyting 1955.
Paris Gauthier Villars. Louvain E. Nauwelaerts épuisé

<u>REMARQUES</u> : Le point de vue intuitionniste de Brouwer et Heyting est critiqué dans certains de ses aspects "idéalistes" par Bishop et Sanin.

L'école russe (Markov, Sanin) admet la coïncidence de la notion intuitive d'effectivité avec la notion mathématique de récursivité générale, ce que n'admet pas Bishop (ni Brouwer et Heyting).

Les divergences de point de vue existant entre différents mathématiciens "constructivistes" (ou intuitionnistes) ne doivent pas cacher l'existence d'un socle fondamental commun, basé sur la critique de la notion de "vérité absolue" en mathématiques. Le livre de Bishop, qui reste le plus prudent, contient ce socle fondamental commun.