LE FORMALISME A TRAVERS LA GEOMETRIE

1 - Les "éléments" d'Euclide.

2 - Les "fondements" de Hilbert.

3 - L'invention de la géométrie non-euclidienne.

4 - La non-contradiction de la géométrie. Le programme de Hilbert.

Conclusion

1 - Les "éléments" d'Euclide :

Le texte d'Euclide est un texte de mathématique déductive. C'est une originalité pour l'époque. Sont définies au départ les notions primitives : le point est "ce qui n'a pas de parties", la ligne est "la longueur sans largeur", etc..., ensuite sont posés les axiomes de départ : - par deux points passe une droite et une seule - par un point on peut mener une seule parallèle à une droite donnée (axiome des parallèles) - etc ...

Ensuite le texte déduit tous les théorèmes à l'aide du "Modus Ponens" : si la relation $\mathcal{A}$ est déjà démontrée, ainsi que la relation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, alors la relation $\mathcal{B}$ s'en trouve démontrée (remarque - Euclide n'a pas explicité tous les axiomes utilisés en fait dans ses démonstrations).

Le texte d'Euclide pose un double problème :

- D'un côté, le texte raconte indubitablement quelque chose au sujet du monde réel ou du monde des idées ; cela est bien évident dès le départ : "un point est ce qui n'a pas de parties" , et pourtant le texte, d'après sa forme même (forme déductive stricte), est en quelque sorte indépendant de son contenu. D'où la question du rapport de la pensée mathématique d'Euclide et de son expression dans le texte écrit.

- D'un côté, le texte d'Euclide frappe par sa rigueur et d'un autre côté ce texte, par sa nature même, est fondamentalement ambigu.

Illustrons le premier point au sujet du mot "exhaustion". Le deuxième point sera développé dans le paragraphe 2.

Le principe d'exhaustion :

On le voit à l'oeuvre dans la proposition : les aires de deux cercles ont une raison double de celle de leurs diamètres.

C'est-à-dire : $\frac{\text{Aire}(S)}{\text{Aire}(S')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$

La démonstration procède de la façon suivante :

d'après l'axiome de la quatrième proportionnelle, il y a une aire Σ telle que :

$$\frac{(AB)^2}{(A'B')^2} = \frac{\text{Aire}(S)}{\Sigma}$$

Il y a trois cas possibles :

$$\Sigma < \text{Aire}(S')$$

$$\Sigma > \text{Aire}(S')$$

$$\Sigma = \text{Aire}(S').$$

La démonstration consiste alors à éliminer les deux premiers cas de sorte qu'il ne reste que le dernier (voir J. Dhombres : nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire. Cedic/Fernand Nathan).

Le principe d'exhaustion consiste à épuiser tous les n cas possibles pour n'en garder qu'un : c'est le principe d'exhaustion <u>des cas</u>. Pourtant, pour y arriver, la démonstration utilise l'aire des polygones réguliers inscrits et excrits aux cercles ; ce qui, pour nous, revient à épuiser l'aire du cercle en prenant des polygones ayant un nombre toujours plus grand de côtés. Le principe d'exhaustion comme épuisement d'une aire par étapes successives est apparu plus tard dans les <u>textes</u> mathématiques. Peut-on conclure que les Grecs n'en avaient aucune notion, que la <u>pensée</u> mathématique grecque n'avait pas la notion de limite ? La pensée est-elle entièrement contenue dans son expression ?

2 - "Les principes fondamentaux" de Hilbert :

Ce texte (Les principes fondamentaux de la géométrie, D. Hilbert, Paris, Gauthier-Villars, 1900) a été publié à la fin du 19ème siècle, donc après la découverte des géométries non euclidiennes, et il ne parle guère de ces géométries. Mais la révolution produite par la découverte, ou mieux, l'invention des géométries non-euclidiennes, est présente à toutes les pages. Pourtant, une lecture rapide de quelques pages de ce texte pourrait faire croire que ce texte n'est pas très différent de celui d'Euclide.

En effet, Hilbert commence par énumérer les axiomes qu'il classe en cinq groupes (axiomes d'association, de distribution, des parallèles, de congruence, de continuité).

[Il n'est pas important d'avoir en tête le détail de tous ces axiomes. Si le travail mathématique de Hilbert (et d'autres) sur la géométrie était important à l'époque, il a perdu aujourd'hui de son importance, parce qu'aujourd'hui, on ne traite plus du tout la géométrie de la même façon. Néanmoins, le travail de Hilbert est très fin et difficile. Car, quand on écrit une liste d'axiomes, il faut être sûr qu'on n'en écrit pas trop, ni trop peu. Pas trop : on veut des axiomes indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'on ne peut pas déduire l'un des axiomes à partir des autres. Pas trop, aussi, au sens que ce qu'on écrit au début ne doit pas avoir des conséquences contradictoires. Pas trop peu : la liste d'axiomes doit être complète dans le sens qu'elle doit nous permettre de démontrer toutes les propriétés qu'on sait ou qu'on a constaté être vraies par ailleurs, empiriquement ou par d'autres moyens (par exemple, il faudra pouvoir démontrer à partir des axiomes que les hauteurs d'un triangle sont concourantes)].

Donnons quelques échantillons de ces axiomes, tels qu'ils sont écrits par Hilbert :

- Deux points distincts, A, B, déterminent toujours une droite a ; nous poserons $AB = a$ ou $BA = a$.

- A, B, C désignant trois points en ligne droite, si B est situé entre A et C, il l'est aussi entre C et A.

- Dans un plan α, par un point A pris en dehors d'une droite a, l'on peut toujours mener une droite et une seule qui ne coupe pas la droite a. Cette droite est dite la parallèle à a, menée par le point A.

. Lorsqu'un segment AB est congruent au segment $A'B'$ et de même au segment $A''B''$, alors $A'B'$ est aussi congruent au segment $A''B''$, c'est-à-dire que si l'on a $AB \equiv A'B'$ et $AB \equiv A''B''$, l'on aura aussi $A'B' \equiv A''B''$.

Ces énoncés sonnent exactement comme ceux d'Euclide. Pourtant il y a une différence fondamentale. Avant l'énumération des axiomes, on lit, page 6 :

<u>Convention</u> : concevons trois différents systèmes d'êtres : les êtres du premier système, nous les nommerons points et nous les désignerons par $A, B, C, \ldots$; les êtres du deuxième système, nous les nommerons droites et nous les désignerons par $a, b, c \ldots$; les êtres du troisième système, nous les nommerons plans et nous les désignerons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; les points seront aussi nommés éléments de la Géométrie linéaire ; les points et les droites, éléments de la Géométrie plane ; et les points, les droites et les plans, éléments de la Géométrie de l'espace ou éléments de l'espace.

Concevons que les points, droites et plans aient entre eux certaines relations mutuelles et désignons ces relations par des mots tels que : "sont situés", "entre", "parallèle", "congruent", "continu" ; la description exacte et complète de ces relations a lieu au moyen des axiomes de la Géométrie.

Les axiomes de la Géométrie se partagent en cinq groupes ; chacun de ces groupes, pris individuellement, exprime certaines vérités fondamentales de même catégorie qui dérivent de notre intuition.

Ce qui est nouveau chez Hilbert, c'est que les mots employés n'ont plus de sens : le mot "pouings" ne veut rien dire, on peut le remplacer par n'importe quel autre mot. De même pour les mots "entre", "situé sur", "parallèle". Si on garde ces mots qui correspondent à quelque chose de notre intuition, c'est justement que le travail qu'on fait, que fait Hilbert, l'axiomatisation formelle de la géométrie, est dans le but d'exprimer des vérités de notre intuition. Dans ce texte apparait un dédoublement qui est caractéristique des études d'axiomatisation, de fondements des *mathématiques*, de logique mathématique ; d'un côté, il y a un système formel de signes, de marques, qui n'ont pas de sens, ou dont leur seul sens est conféré par leurs règles d'association et, de l'autre côté, *il* y a l'intuition, l'être pensant qui est imbriqué dans un système de sens et de signification.

Les mots employés dans un système formel axiomatisé comme celui de Hilbert pour la géométrie, n'ont plus de sens et par là même ils deviennent, ainsi que les textes formels, parfaitement ambigus ; on peut les interpréter de multiples façons.

Par exemple :

Interprétons la marque "point" par le mot sensé "droite de l'espace passant par un point 0" et la marque "droite" par "plan de l'espace passant par le point 0". Ici (entre " , "), les mots point, droite, plan de l'espace sont pris au sens de la géométrie - physique - euclidienne de l'espace intuitif. C'est-à-dire, ces mots représentent l'interprétation ordinaire qu'on fait des marques "points", "droites", "plans". Nous avons donc ici deux interprétations :

marques sans sens	1ère interprétation	2ème interprétation
"point"	point euclidien ordinaire	point non ordinaire noté Point (grand P) : c'est une droite euclidienne ordinaire passant par un point ordinaire 0 fixe
"droite"	droite euclidienne ordinaire	droite non ordinaire notée Droite (grand D) : c'est un plan euclidien ordinaire passant par 0 (euclidien ordinaire)
"point situé sur une droite"	interprétation ordinaire	droite contenue dans un plan
etc ...		

La deuxième interprétation nous fournit une nouvelle géométrie qui sonne comme ceci :

. Par deux Points passe une Droite et une seule.

Oui, car par deux droites ordinaires concourantes en 0 passe un plan ordinaire et un seul.

. Par un Point P donné ne passe aucune Droite parallèle à une Droite D donnée, car

. Deux Droites quelconques sont concourantes en un Point (si elles sont distinctes).

Oui, car deux plans (distincts) passant par 0 se coupent selon une droite passant par 0.

Cette nouvelle géométrie contredit donc l'axiome des parallèles d'Euclide (elle en contredit d'autres). Mais si la géométrie euclidienne est cohérente, non-contradictoire, la nouvelle géométrie (il s'agit de la géométrie projective ou elliptique) l'est aussi, car elle est écrite à l'intérieur de la géométrie euclidienne.

La géométrie elliptique est d'ailleurs liée à une autre géométrie que les habitants de planète connaissent fort bien :

<u>la géométrie sphérique</u> :

Donnons le vocabulaire :

"Point-s" ("point sphérique") : c'est un point ordinaire sur une sphère ordinaire.

"Droite-s" ("droite sphérique") : c'est un arc de grand cercle ordinaire sur cette sphère.

"un Point-s est situé sur une Droite-s" si le point ordinaire correspondant est situé sur le cercle correspondant.

Cette géométrie énonce :

. Par deux Points-s passe au moins une Droite-s.

Oui, car par deux points sur la sphère passe un grand cercle et même un grand nombre de ces cercles si les deux points sont antipodaux.

. Deux Droites-s sont toujours concourantes.

Car, dans la géométrie euclidienne ordinaire de la sphère, deux grands cercles se coupent. De nouveau, cette géométrie est aussi "valable" que la géométrie d'Euclide. Toute contradiction dans cette nouvelle géométrie serait aussi une contradiction dans la géométrie d'Euclide.

Quel est maintenant le rapport entre géométrie sphérique et géométrie projective ?

Un Point-p (point projectif) étant une droite-e (droite euclidienne) passant par le point-e 0 supposé être le centre de la sphère-e, découpe deux points-e antipodaux sur la sphère.

Donc, à un Point-p correspond deux Points-s et réciproquement. En convenant d'identifier deux Points-s antipodaux (opération mathématique très courante (relation d'équivalence)), on obtient donc une nouvelle façon de voir un point projectif. On remarquera que cette identification fait disparaitre le fait de la géométrie sphérique que par deux points sphériques distincts pouvait passer une infinité de droites sphériques. Ceci ne pouvait arriver que si les deux Points-s étaient antipodaux, mais alors ils sont à confondre et ne deviennent plus qu'un seul point projectif.

Mais revenons au texte de Hilbert.

Le fait que chez Hilbert les mots n'ont a priori pas de sens, mais prennent seulement un sens une fois qu'on les interprète, se voit bien à la façon dont il établit d'une part la non-contradiction de sa liste d'axiomes, donc la non-contradiction de la géométrie euclidienne en la ramenant à la non-contradiction de l'arithmétique, et d'autre part l'indépendance des axiomes les uns des autres. Regardons la démonstration de l'indépendance de l'axiome des parallèles des autres axiomes. Elle se fait à l'aide de la géométrie de Lobatchevski, de la géométrie hyperbolique.

Mais avant, parlons donc de cette géométrie qui, au début, était <u>la</u> géométrie non-euclidienne (maintenant il y en a une infinité).

3 - L'invention de la géométrie non-euclidienne :

Vers 1830, Lobatchevski a créé de toute pièce une nouvelle géométrie, où tous les axiomes d'Euclide étaient maintenus sauf celui des parallèles qui est remplacé par l'axiome : par un point non situé sur une droite passe une infinité de parallèles à cette droite. Le texte de Lobatchevski se développe dans le même esprit que celui d'Euclide, c'est-à-dire il est déductif à partir d'axiomes.

A l'époque, ce texte posait un problème énorme, car il allait à l'encontre des positions philosophiques de l'époque, entre autre, contre les positions de Kant pour lequel la géométrie euclidienne était le fondement a priori (avec le temps), de l'entendement humain. Et si les esprits de l'époque se sont prononcés contre Lobatchevski et pour Euclide, c'est pour des raisons philosophiques et idéologiques et non pour des raisons mathématiques car, du point de vue mathématique, les deux textes sont parallèles, l'un utilisant l'axiome III a et l'autre l'axiome III b. Du point de vue mathématique se posait donc essentiellement le problème de la non-contradiction des systèmes en question.

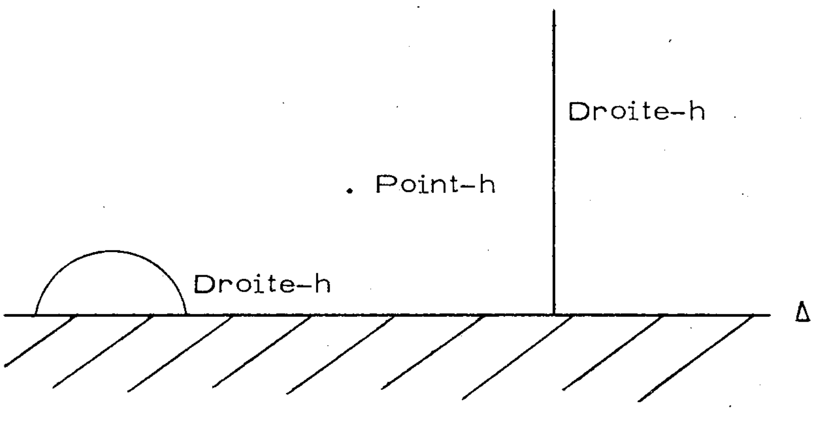
Lobatchevski lui-même avait réussi (plus ou moins) à prouver la non-contradiction de sa géométrie si on admettait celle de la géométrie d'Euclide (en reformulant sa géométrie en la basant sur des formules de trigonométrie).

Ce n'est que cinquante ans plus tard que Klein et Poincaré ont crée des modèles euclidiens de la géométrie non-euclidienne. Voici un modèle de Poincaré (il en a donné plusieurs) :

le principe employé est le même que celui employé au paragraphe précédent : on réinterprète les marques "points", "droites", etc ...

Voici le dictionnaire (partiel bien sûr) pour le modèle de Poincaré de la géométrie hyperbolique :

Point-h (point hyperbolique) : c'est un point ordinaire du demi-plan supérieur strict



Droite-h : c'est l'arc d'un cercle centre sur l'axe Δ et contenu dans le plan supérieur ou bien une demi-droite (ordinaire) perpendiculaire à Δ.

La relation "situé sur" a son interprétation évidente.

Dans cette géométrie, <u>tous</u> les axiomes d'Euclide (ou ceux de Hilbert) sont vérifiés, sauf celui des parallèles.

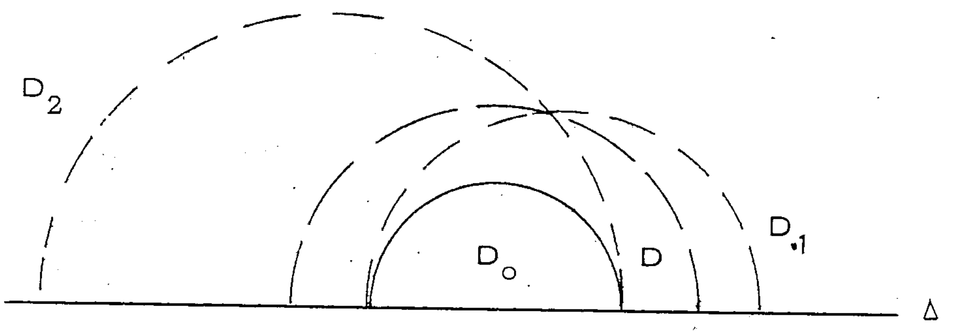
Regardons seulement :

- Par deux Points-h passe une Droite-h et une seule.

C'est une propriété des cercles euclidiens.

- Par un Point-h passe une infinité de parallèles à une Droite-h donnée.

<u>Dessin</u> :



Les droites hyperboliques D_1 et D_2 sont parallèles à la droite-h D_o (les points sur l'axe ne sont pas à compter parmi les points hyperboliques).

La droite hyperbolique D aussi est parallèle à D_o et il y en a une infinité de ce type.

Tout ceci sont des propriétés de la géométrie ordinaire. La géométrie hyperbolique étant ainsi écrite dans la géométrie ordinaire, si celle-ci est cohérente (consistante, sans contradiction), celle de Lobatchevski l'est aussi.

En plus, tout en supposant toujours la non-contradiction, l'axiome des parallèles d'Euclide ne peut être une conséquence des autres axiomes, car sinon, dans le modèle de Poincaré, les <u>deux</u> axiomes de parallèles seraient vrais. Or ces deux axiomes sont contradictoires.

[NB : Nous n'avons singularisé que deux axiomes pour illustrer ce qui se passe. Pour faire un travail complet, il faudrait parler des axiomes de congruence (ou des déplacements non euclidiens ou de la distance non euclidienne) etc ... Il est important qu'il y ait eu des mathématiciens qui ont fait ce travail dans le moindre détail. Il n'est pas obligatoire de le refaire intégralement pour comprendre l'essentiel. Pour ceux qui veulent approfondir, une petite bibliographie est bien vite constituée].

Ces deux géométries étant ainsi mises sur pied d'égalité, se pose néanmoins la question sur l'espace : est-il euclidien ou non euclidien ? Peut-on décider par l'expérience si c'est l'une ou l'autre, ou une troisième ?

Gauss avait essayé de mesurer les angles d'un triangle très grand. Si l'espace est elliptique, la somme des angles est supérieure à 180°, si hyperbolique, inférieure à 180°, si euclidien égale à 180° (les cas elliptique et hyperbolique se voient sur un dessin ; pour la géométrie elliptique qui provient de la géométrie sphérique par identification, tracer un triangle sur la sphère formé par un "équateur" et deux "méridiens"). Les mesures de Gauss ne permettaient pas de conclure.

Poincaré a soutenu le point de vue que l'espace est comme on a envie qu'il soit, que c'est une question de convention plus ou moins commode. Il défend son point de vue dans "Science et hypothèse", Edit. Flammarion.

Riemann a imaginé des espaces dont la géométrie varie continûment d'une portion de l'espace à une autre, cette variation étant due au changement de la répartition des masses.

Ces idées de Riemann sont reprises par Einstein qui opte pour une géométrie sûrement non euclidienne dans sa relativité restreinte et surtout générale.

4 – La non contradiction de la géométrie :

Dans le texte de Hilbert, celui-ci ramène la consistance (la non contradiction) de la géométrie euclidienne à la non contradiction de l'arithmétique, mais pas tout à fait.

L'idée, c'est les coordonnées de Descartes. Si on trace deux axes de coordonnées dans le plan, à tout point P est associé un couple de deux nombres (x, y), ses coordonnées. Toute droite a alors une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont trois nombres non tous nuls. On peut aussi transcrire analytiquement des transformations géométriques telles que translation ou rotation. Une transformation géométrique transforme un point P de coordonnées (x, y) en un point P' de coordonnées (x', y'). Ecrire analytiquement cette transformation consiste à écrire les équations qui donnent x' et y' en fonction de x et y.

Pour une translation, on a :

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases} \qquad \text{où } \alpha, \beta \text{ sont deux nombres.}$$

Pour une rotation, on a :

$$x' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\, x - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\, y$$

$$y' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\, x + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

où α et β sont les coordonnées du point obtenu à partir du point de coordonnées $(1, 0)$ à l'aide de la rotation en question.

Maintenant procédons à l'interprétation des marques "point" et "droite" et "situé sur". Comme nous l'avons fait dans d'autres cas :

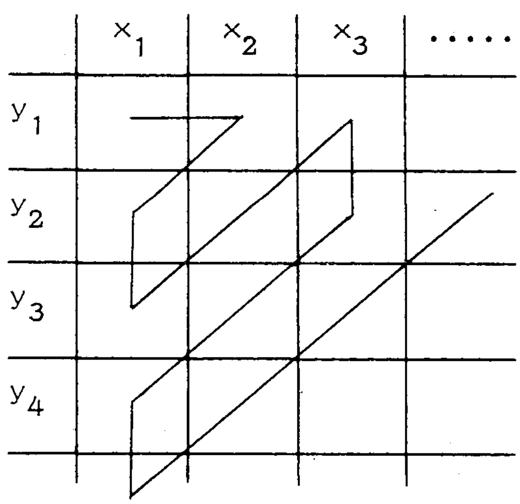
appelons Point-a (point "analytique"), tout couple (x, y) de deux nombres (<u>quels</u> nombres sera précisé tout de suite),

appelons Droite-a tout triplet de nombres (a, b, c) non tous nuls (pas tout à fait : par exemple $(1, 2, 3)$ et $(2, 4, 6)$ représenteront la même droite ; il y a donc une relation d'équivalence en jeu).

On interprète le Point-a (x, y) est sur la Droite-a (a, b, c) par "la relation" "a x + b y + c = 0". Il faut ensuite bien sûr interpréter toutes les relations formelles figurant dans les axiomes, entre autre la relation de congruence. Ce sont les transformations de translation et de rotation qui permettent de les définir (interpréter). Or, à cause des formules de la page 15, il faut que, si α et β font déjà partie du système de nombres, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha\sqrt{1+(\frac{\beta}{\alpha})^2}$ en fasse partie aussi. Finalement, on considère le système de nombres obtenus en partant de 1 et en appliquant de toutes les façons les cinq opérations , +, −, ×, ÷ , et $\sqrt{1+\omega^2}$. Le domaine de nombres ainsi obtenu est infini mais dénombrable. Tous les axiomes sont alors vérifiés (à l'exception bien sûr du dernier qui imposerait au système de nombres d'être le système de <u>tous</u> les nombres réels qu'on sait être infini <u>non</u>-dénombrable). Tous les axiomes sont alors vérifiés (à l'exception bien sûr du dernier qui imposerait au système de nombres d'être le système de <u>tous</u> les nombres réels qu'on sait être infini <u>non</u>-dénombrable).

Hilbert ramène ainsi la consistance de la géométrie à celle de l'algèbre construite sur le système dénombrable de nombres en question.

Mais sa consistance n'en est pas pour autant ramené à celle de l'arithmétique, bien que le système de nombres utilisés soit dénombrable, donc en bijection avec les entiers naturels. Car la notion de couple est une notion ensembliste et non arithmétique (a priori). De même pour la notion de triplet et de relation d'équivalence. En effet, comment écrire (x, y) à l'aide des symboles et relations de l'arithmétique qui sont 0, 1, 2, ..., +, ×, et quelques autres. Une idée serait de se rappeler que l'ensemble des couples (x, y) est dénombrable lui aussi (principe de la diagonale).



De même pour les triplets. Mais la relation d'équivalence ... ? Ceci pose bien des problèmes. Il faudrait une étude soigneuse pour pouvoir écrire proprement la géométrie euclidienne totalement à l'intérieur de l'arithmétique. Mais laissons cela. En résumé : la géométrie est ramenée à l'arithmétique + quelques notions ensembles pas bien méchantes.

Les notions ensemblistes n'étaient pas bien méchantes au départ. Elles le sont devenues quand sont apparues les paradoxes. A ce moment, comme lors de l'apparition des géométries non-euclidienne, il fallait se mettre au travail et clarifier de façon extrêmement précise toutes les notions utilisées en mathématiques. C'est ce que propose de faire Hilbert dans un programme qui pousse au bout ce qui est contenu en germe dans ses fondements de la géométrie. Pour chaque théorie mathématique, surtout l'arithmétique et la théorie des ensembles, construire un langage formel qui est formé de marques (sans sens) qu'on assemble selon des règles bien précises ; et de règles (règles d'inférences) pour déduire des théorèmes à partir d'axiomes précisés au départ. Toutes les descriptions et règles, opérations devant être parfaitement finitistes.

C'est Gödel qui met une fin négative à ce programme formaliste.

Conclusion :

Dès les premiers textes mathématiques déductifs apparait le dédoublement entre le sens et le formalisme. Ce dédoublement est complètement mis à nu à partir de Hilbert. Gödel y apporte une fin de non-recevoir. Ce n'est pas pour autant que le dédoublement quasiment ontologique des textes mathématiques entre sens et non-sens est résorbé. Il est toujours des formalistes pour qui le "sens" d'un texte mathématique n'est rien d'autre que la combinatoire de sa forme.

Cette attitude rappelle celle des "moléculistes" en biologie pour qui même les niveaux les plus élevés d'organisation biologique sont entièrement déterminés et explicables à partir de symboles (briques) élémentaires (les acides aminés par exemple).

En biologie comme en mathématiques ou ailleurs, nous nageons en pleine incertitude.

Jean MERKER
Janvier 1983