

## LA RIGUEUR CHEZ VON NEUMANN

En 1932 paraît le livre de von Neumann : «Les fondements mathématiques de la mécanique quantique». (Traduction par la Librairie Félix Alcan en 1946, réimpression par les éditions Jacques Babay en 1988).

A cette époque les fondements de la nouvelle physique étaient déjà bien établis. L'interprétation probabiliste de Born date de 1926. Dirac vient d'écrire son «Principles of Quantum Mechanics». Quel est alors l'apport du travail de von Neumann ? Il est communément admis que celui-ci réside dans la rigueur du traitement mathématique, mais en même temps dans le fait d'avoir traité rigoureusement des questions qui n'avaient pas trouvé de réponses satisfaisantes, comme le problème des variables cachées (auquel nous rajoutons le théorème sur la mesure simultanée de deux grandeurs), et la question de la mesure quantique.

Nous étudierons ces deux questions dans le livre de von Neumann en essayant une analyse critique de ces thèmes du point de vue de la rigueur. Nos citations et références aux numéros de pages concernent l'édition française.

Par rigueur nous ne voulons pas entendre seulement rigueur mathématique, mais rigueur du raisonnement en général. Notre étude se veut une analyse du texte de von Neumann pris comme corpus. Cela ne nous empêchera pas néanmoins d'essayer de situer le texte en question dans un cadre plus général en vue de son interprétation.

Les analyses sur certaines parties du travail de von Neumann sont assez nombreuses. Par exemple l'analyse de son théorème de complétude, "théorème" reconnu faux depuis longtemps. Mais à notre connaissance aucune analyse formelle du texte lui-même n'a été faite. Nous nous proposons de dégager *la structure de l'erreur* de von Neumann. On voit souvent écrit : le théorème (de la complétude ou de l'incompatibilité de deux grandeurs) est faux, mais sa démonstration mathématique ne saurait être mise en cause. C'est-à-dire, on préserve la rigueur chez von Neumann, son erreur venant par exemple de conditions imposées trop restrictives. Nous essayerons d'analyser en profondeur la rigueur chez von Neumann, et nous verrons si cette idée de rigueur peut être maintenue.

Nous distinguerons essentiellement deux parties dans le livre de von Neumann :

- La partie purement mathématique qui occupe environ 40% de la totalité du texte.
- La partie interprétative qui se divise grossièrement en deux
  - . les postulats de la mécanique quantique et son caractère statistique
  - . le problème de l'irréversibilité et la théorie de la mesure

## § 1 LA RIGUEUR PUREMENT MATHÉMATIQUE

La notion de rigueur (mathématique) est relative. Un texte admis comme rigoureux il y a deux siècles peut ne plus l'être aujourd'hui. Il est communément admis que la méthode axiomatique, dont Hilbert est un des fondateurs, est une condition garantissant la rigueur des textes mathématiques. Cette attitude est, d'une certaine façon correcte, et elle est adoptée par un grand nombre de mathématiciens. Malheureusement elle a comme corollaire la stérilité, dans la mesure où "tout ce qui est rigoureux est insignifiant" (René Thom). Mais d'un autre côté, le doute ou la discussion est reportée aux fondements, c'est à dire au système axiomatique utilisé, et sur ce terrain on assiste à de larges incertitudes ouvrant un grand champ de latitudes (cf à ce sujet l'article traduit par Henri Lombardi dans cette brochure).

Analyser le texte de von Neumann du point de vue de la rigueur et en particulier de la rigueur mathématique sous-entend donc de replacer les déductions dans le cadre de l'époque.

Au moment où von Neumann écrit son ouvrage, la théorie des ensembles («Paradis duquel personne ne nous chassera» (Hilbert)) est déjà bien établie. Les paradoxes de Russel sont antérieurs et ont été résolus par la mise en place d'une axiomatique convenable. Le premier théorème d'incomplétude de Gödel date de 1931. C'est-à-dire, la théorie des ensembles et la méthode axiomatique ont déjà achevé un tour complet.

L'attitude mathématique de von Neumann se situe dans ce contexte caractérisé par la théorie des ensembles et la méthode axiomatique. L'attitude ensembliste est manifeste quand il considère une fonction (de carré sommable) comme un "point" et qu'il considère la totalité de ces points (p 25). La méthode axiomatique est à l'oeuvre, non à son niveau "atomique" mais à un niveau plus élaboré, quand il considère les relations fondamentales qui caractérisent abstraitement un "espace de Hilbert" (p 23). La conception de von Neumann se place bien entendu dans un cadre mathématique idéaliste, à savoir que les entités mathématiques sont censées exister, sans référence à autre chose qu'à elle-même, aux relations fonctionnelles qui relient leurs éléments. Cette conception n'est pas affirmée explicitement, mais elle est sous-jacente. En effet, la position mathématique du début du siècle est essentiellement platonicienne. En fait von Neumann affirmera l'existence d'une totalité mathématique à divers moments et ce sera un point capital dans ses déductions. Comme on va le corroborer ultérieurement, la position de von Neumann, du point de vue mathématique, est une position idéaliste.

Elle s'oppose de ce point de vue à l'attitude de Dirac qui est essentiellement ouverte, l'activité mathématique de Dirac est non formaliste, si on entend qu'une exigence du formalisme est que "n'existerait" que ce que le formalisme à l'oeuvre permet d'exprimer de façon consistante.

La démarche mathématique de Dirac est non axiomatique (il ne faut pas confondre l'attitude mathématique de Dirac avec sa recherche d'établir les fondements de la physique moderne).

Ainsi le passage du symbole, discret, de Kronecker,  $\delta(i, j)$ , où les indices  $i$  et  $j$  sont discrets, au "symbole de Dirac"  $\delta(i-j)$  où  $i$  et  $j$  sont des variables continues, ne pose pas un problème existentiel à Dirac. La démarche "rigoureuse" de von Neumann n'est pas d'essayer de légiférer cette nouvelle existence ; il la considère comme inutile (introduction p.2) et même moins près de la réalité physique de la mesure que l'interprétation du formalisme rigoureux proposé par von Neumann (p.153). Il préfère rester dans le champ formel clos des espaces de Hilbert et de la théorie spectrale. En fait la démarche de von Neumann n'est pas celle d'un

physicien (comme Dirac), mais celle d'un mathématicien qui s'intéresse à la physique : le point de vue adopté est un point de vue formel (idéaliste) qui est *ensuite* interprété en relation avec la physique, le référent restant toujours le champ formel : les idées physiques sont suggérées par le formalisme à l'inverse de Dirac chez qui les idées physiques suggèrent la mise en oeuvre d'un formalisme qui devient seulement ensuite le constituant de la théorie physique.

Nous essayerons de montrer que la démarche de von Neumann est conditionnée par deux moments :

- Un moment interprétatif qui va du formel vers le physique : la théorie mathématique établie pour des raisons de rigueur mathématique par rapport à un champ formel clos est ensuite interprétée physiquement ;
- Un moment idéologique, non physique, qui émerge aux endroits où la rigueur de von Neumann laisse à désirer.

A l'intérieur du champ mathématique formel, la rigueur de von Neumann est parfaite. Ce texte, bien qu'étant un texte de mathématiques pures, est écrit dans un but précis : à savoir clarifier les fondements de la théorie quantique. C'est-à-dire que certains traits de cette physique ont motivé le développement de tel concept mathématique plutôt que tel autre (cf. p. 67, 71 : introduction d'opérateurs non continus, par exemple). Ceci ne nie en rien le développement général de l'ouvrage qui va du formel vers son interprétation. Lors de l'étude mathématique, von Neumann a dû être frappé par certains traits formels qui lui ont inspiré ou suggéré certains aspects de son interprétation.

Citons par exemple le passage de la décomposition de l'opérateur  $A = \int \lambda dE(\lambda)$  à la décomposition de l'opérateur  $p(A) = \int p(\lambda) dE(\lambda)$ , où  $p$  est une fonction n'opérant que sur les "valeurs"  $\lambda$  de  $A$  (p. 100). Cette possibilité de définir l'opérateur  $p(A)$  à partir d'une fonction  $p$  n'opérant que sur les "valeurs de la grandeur  $A$ " associée à l'opérateur  $A$  a dû influencer von Neumann dans l'énoncé des propriétés formelles de la bijection postulée par lui entre grandeurs et opérateurs (voir §2).

Bien que la rigueur soit parfaite (quand von Neumann fait un raisonnement approximatif ayant valeur heuristique, il le signale à chaque fois), il y a néanmoins certains passages dont l'incongruité est frappante.

Citons celui-ci :

Alors que von Neumann a développé en détail le calcul mathématique des projecteurs, au chapitre II, §4, il ne l'utilise pas directement au §6 pour motiver la recherche d'une situation équivalente au problème des valeurs propres (dans le cas fini), situation qui permet une généralisation au cas infini.

En effet, la généralisation qu'il a en vue est la décomposition de l'unité due à Hilbert. Or dans le cas fini où  $\phi_1, \dots, \phi_n$  sont les vecteurs propres de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de l'hamiltonien  $H$ , son calcul des projecteurs lui aurait permis d'écrire directement :

$$(1) \quad I = \sum P_{\phi_i}$$

qui est la traduction de la décomposition en sous-espaces propres :

$$(0) \quad E = \sum V_i$$

et ensuite :

$$(2) \quad H = \sum H P_{\phi_i} = \sum \lambda_i P_{\phi_i}$$

Ensuite, l'astuce qui permet la généralisation au cas infini est une opération banale en théorie de la mesure (de Borel-Lebesgue) théorie bien connue et maniée par von Neumann dans son ouvrage.

En effet, la relation (1) est l'analogue de la relation

$$(1)' \quad X = \sum A_i$$

où la somme signifie la réunion (finie) de parties  $A_i$  disjointe deux à deux. L'extension infinie dénombrable est évidente :

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

A partir de cette réunion disjointe on peut former une "réunion croissante"

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} B_k, \quad B_k \subset B_{k+1}$$

où

$$B_k = A_0 + A_1 + \dots + A_k$$

Les ensembles  $A_n$  sont alors récupérés par la relation

$$A_n = B_n - B_{n-1}$$

Les axiomes  $S_1, S_2, S_3$  de la décomposition de l'unité (p.82) s'en déduisent immédiatement en détruisant l'ordre arbitraire par la considération de la relation  $\leq$  :

$$E(\lambda) = \sum_{\lambda' \leq \lambda} P_{\phi_{\lambda'}} \quad \leftrightarrow \quad B_{\lambda} = \sum_{\lambda' \leq \lambda} A_{\lambda'}$$

Contrairement à cela, von Neumann utilise des expressions intrinsèques non indicielles (p.79 et p.80,81). Les calculs faits sont relatifs à " $(H, f, g)$ " dont on a besoin pour les questions de convergence intervenant lors du passage au cas infini. Mais on peut aussi bien considérer après coup les valeurs prises par les opérateurs pour définir les limites d'opérateurs, comme le fait remarquer von Neumann lui-même à la page 63, dans le même §4 sur les projecteurs.

Il s'agit peut-être d'une "bourde pédagogique", mais à un autre endroit, autrement plus stratégique (il s'agit du théorème sur la complétude), von Neumann complique la lecture en employant une écriture indicielle non invariante (voir §2 et p.217). Ce qui est plus étonnant encore, c'est que von Neumann utilise, à la page 91, l'expression condensée intrinsèque

$$E(\lambda) = \sum_{\lambda' \leq \lambda} P_{\phi_{\lambda'}}$$

en faisant remarquer par la note 80 qu'elle est équivalente : «cette formule n'est autre chose que la transposition exacte de la définition de  $E(\lambda; \xi, \eta)$  donnée au chapitre II §7».

Que von Neumann "n'ait pas vu" initialement cette équivalence est inconcevable. Mais il se trouve que cette expression formelle permet de trouver *de façon heuristique* "la

décomposition de l'unité associée à  $H$  dans des cas justement où l'intervention formelle du  $\delta$  de Dirac est manifeste (p.93).

On pourrait comparer ce phénomène aux formules de Cardan où l'intervention de  $\sqrt{-1}$  n'est que formelle, mais impérative, le résultat, lui, étant réel. Ceci doit un peu faire hésiter von Neumann, qui, dans sa démarche veut explicitement rejeter "des êtres mathématiques qui n'existent pas", en utilisant des méthodes rigoureuses. Dans la note 86 il justifie sa démarche en disant :

*«L'adoption de ce point de vue ne peut évidemment être justifiée que par le succès des applications physiques de la théorie correspondante.»*

Ce que von Neumann a en tête, c'est que l'interprétation de son formalisme est plus près des réalités physiques (p.153).

*«(Remarquons en passant que dans le cas que nous venons de traiter, notre procédé, mathématiquement rigoureux décrit bien mieux la réalité que ne le permet l'emploi des fonctions "fictives" ou n'appartenant pas à l'espace de Hilbert, dont il a été question dans l'introduction et dans le chapitre I §3 (cf également ch II §8 et en particulier les notes 84,86). En effet ces dernières font apparaître l'existence de certains états dans lesquels même les grandeurs à spectre continu peuvent prendre des valeurs déterminées, bien que, précisément, cela n'arrive jamais en réalité. C'est une raison de plus qui, s'ajoutant aux arguments d'ordre mathématique, nous incite à repousser de pareilles idéalizations, bien que leur emploi ait été souvent recommandé jusqu'à présent.)»*

Ceci met bien en évidence la démarche "interprétative" conditionnée par quelques préjugés de contenu physique ou idéologique de von Neumann. En effet, ce qui est typiquement quantique aux yeux de von Neumann est le spectre discret, "quantifié", le spectre continu correspondant à une grandeur non quantifiée et donc ressentie comme étant classique.

Notons encore au sujet de l'incongruité dont nous parlons que la mise en parallèle des relations (1) et (1)' de la page 4 aurait permis à von Neumann de mettre directement en correspondance le "ou" ensembliste "U", c'est-à-dire la logique classique avec le "ou" linéaire "+", analogie bien connue à l'époque.

C'est de nouveau la démarche interprétative de von Neumann qui le pousse à en parler au chapitre III consacré à l'interprétation du formalisme, mais dans le cadre assez flou de correspondance entre "grandeurs physiques" et opérateurs. Mais le contexte sémantiquement lourd de cette correspondance de confère pas nécessairement un sens physique profond à l'interprétation proposée.

## § 2 LA RIGUEUR DANS L'INTERPRETATION DU FORMALISME

Nous analyserons dans ce paragraphe, du point de vue de la rigueur, les chapitres III et IV de l'ouvrage de von Neumann. Ces deux chapitres comportent l'essentiel de l'interprétation du formalisme mathématique. Les titres de ces chapitres ne doivent pas induire en erreur. Le chapitre III s'intitule "la statistique quantique". Ceci n'implique pas que von Neumann a en vue une interprétation fréquentiste ou "ensembliste" du formalisme. Au contraire, la position de von Neumann consiste bien à accrocher "un  $\psi$ " à un "microsystème". L'attitude probabiliste de von Neumann est très nette, et, nous le pensons, de nature idéologique. Dès le § 2 de ce chapitre, von Neumann insiste sur le caractère a-causal de la mécanique quantique et évoque le problème des variables cachées pour prendre position :

*«Nous nous plaçons donc au point de vue exactement opposé, c'est-à-dire nous admettons le fait fondamental que les lois naturelles qui régissent les processus élémentaires (en d'autres termes, les lois de la mécanique quantique) sont des lois de nature statistique.» (p. 145)*

C'est au chapitre IV que von Neumann s'efforce à prouver cette position. Ce chapitre IV intitulé "Développement axiomatique de la théorie" traite en fait de la nature statistique au sens fréquentiste et non probabiliste de la théorie. von Neumann insiste bien sur le caractère mélangé, double, de la statistique quantique :

*«Cependant, la théorie présente en réalité un caractère statistique beaucoup plus prononcé par le fait qu'on ne sait pas du tout dans quel état se trouve effectivement le système donné.» (p. 204)*

von Neumann se propose dans ce chapitre de retrouver "à partir de considérations très générales" et des concepts mathématiques de trace et d'opérateur densité, la statistique du cas pur du chapitre III.

Nous trouvons dans ce chapitre les trois "préjugés" fondamentaux sur la physique quantique de von Neumann, à savoir :

- 1) - La quantification des grandeurs (spectre discret)
- 2) - La non-commutativité des opérateurs associés à des grandeurs non-simultanément mesurables
- 3) - L'a-causalité et la nature probabiliste fondamentale des processus élémentaires.

Nous avons déjà vu comment le premier point oriente l'interprétation du formalisme mathématique dans le Ch.I. Dans le chapitre III, von Neumann traite le deuxième point et dans le chapitre suivant il s'attaque au troisième.

Les deux théorèmes que von Neumann démontre dans ces chapitres :

- Le théorème de compatibilité : deux grandeurs sont simultanément mesurables si et seulement si les opérateurs associés commutent ;
- Le théorème de complétude: la mécanique quantique est une théorie complète : il ne saurait y avoir de variables cachées ;

sont des "méta-théorèmes". Leur enlever ce statut revient à les priver de contenu. C'est pourquoi l'analyse des correspondances

état physique du système  $\leftrightarrow$  état formel du système

grandeur physique  $\mathcal{R}$   $\leftrightarrow$  opérateur  $R$

est fondamentale. von Neumann analyse longuement la deuxième correspondance, mais pour ainsi dire pas la première. C'est dans l'absence d'une analyse sérieuse de ces correspondances que réside la faiblesse des déductions de von Neumann.

Nous analyserons la structure de cette faiblesse et nous montrerons que bien que les déductions formelles alignées par von Neumann aient un certain contenu formel, elles n'en possèdent pas moins aucun "méta-contenu" et donc que de ce point de vue (le seul réellement sigifiant à notre avis) les théorèmes de von Neumann peuvent être considérés comme vides.

## 1 -

La correspondance entre grandeurs physiques  $\mathcal{R}$  et opérateurs  $R$  étant fondamentale dans les démonstrations de von Neumann il est d'une grande importance d'en faire une analyse détaillée et de résumer tout ce que von Neumann dit à ce sujet.

Dans le chapitre I où von Neumann établit l'équivalence entre la mécanique des matrices de Heisenberg et la mécanique ondulatoire de Schrödinger apparaissent bien sûr les opérateurs  $q_i$  correspondant aux coordonnées  $q_i$ , les opérateurs  $(h/2i\pi)\partial/\partial q_i$  correspondant aux composantes de la quantité de mouvement et "l'opérateur de l'énergie"  $H$  correspondant à l'énergie (un rappel de ceci est fait dans la note 119).

von Neumann remarque aussi bien sûr "l'ambiguïté" du passage d'une grandeur classique à l'opérateur correspondant, l'ambiguïté étant due à la commutativité des premières et le non-commutativité en général des seconds. Dans la note 14 il écrit :

*«Nous n'insisterons pas d'avantage là dessus parce que le calcul des opérateurs que nous développerons plus loin nous permettra de saisir beaucoup mieux l'ensemble de ces propriétés.»*

von Neumann pense donc s'en sortir mieux avec son calcul entre opérateurs et sa correspondance entre grandeurs physiques et opérateurs.

La première référence à la correspondance en question est faite, en rappel, au début du Chapitre III, p.136. Nous y lisons :

*«Au chapitre I nous n'avons envisagé que la manière dont on peut calculer en mécanique quantique les valeurs possibles d'une grandeur physique déterminée, l'énergie, et nous avons vu que celles-ci étaient égales aux valeurs propres de l'opérateur correspondant  $H$  (c'est à dire au nombre constituant son spectre).»*

Mention de la correspondance générale est faite pour la première fois de façon implicite à la page 139 (Ch.III, §1) :

*«(W). Le système étant dans l'état  $\phi$ , la probabilité pour que les grandeurs physiques ayant*

*comme opérateurs  $R_1, R_2, \dots, R_l$  prennent respectivement les valeurs comprises dans les intervalles ...»*

Dans ces lignes, un renvoi est fait à la note 119 (dont nous avons déjà parlé) et qui dit :

*«Nous reviendrons en détail au Ch IV § 1, sur la correspondance qui relie chaque grandeur physique à un opérateur hermitique déterminé. Provisoirement, nous savons seulement, d'après le Ch I § 2, que les opérateurs  $R_j$  --- correspondent aux coordonnées etc ...»*

A la page 140, ligne 13, von Neumann remarque qu'une conséquence du postulat (W) est le théorème :

*«Une grandeur  $R_j$  ne peut prendre que des valeurs égales à ses valeurs propres, c'est à dire aux nombres qui constituent son spectre.»*

Ces lignes appellent une remarque. Alors que von Neumann distingue systématiquement, dans son livre, une "grandeur" physique, notée par une lettre grasse  $\mathfrak{R}$  et l'opérateur hermitien (hyper maximal)  $R$  qui lui correspond, il est à noter que dans les lignes citées il ne le fait pas. Faute d'impression ou lapsus ? (l'édition allemande de 1932 comporte exactement la même typographie). Si nous notons  $vm(\underline{R})$  l'ensemble des valeurs mesurées de la grandeur physique  $\underline{R}$  et par  $vp(R)$  l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur  $R$ , ce "lapsus" pourrait cacher qu'implicitement von Neumann suppose l'égalité  $vm(\underline{R}) = vp(R)$ .

Le fait que ce lapsus est significatif est précisé dans les lignes qui suivent (p.140, lignes 19-22). En effet von Neumann déduit du postulat l'énoncé (E1) et l'énoncé (E2) cités plus bas. Il commence la démonstration de (E1) à la page 140, ligne 19, en écrivant :

*«Considérons maintenant le cas  $l = 1$  et écrivons  $R_1 = R$ . Soit  $\underline{R}$  la grandeur physique à laquelle nous faisons correspondre l'opérateur  $R$  (cf la note 119). Soit  $F(\lambda)$  une fonction quelconque ; il s'agit de calculer l'espérance mathématique de  $F(\underline{R})$ .»*

Or, si l'opérateur  $F(R)$  est parfaitement défini (à la page 101, la lettre  $F$  étant remplacée par la lettre  $p$ ), le symbole  $F(\underline{R})$  - en fait "la grandeur physique  $F(\underline{R})$  - ne l'est pas.

Si von Neumann "oublie" cette définition, c'est que, d'après nos réflexions à la page 3, elle va de soi pour von Neumann qui, poussé par son formalisme, pense pouvoir définir une grandeur physique par référence à ses valeurs mesurées seulement. Ces lignes sont significatives du fait que von Neumann mélange le domaine formel et le domaine de son interprétation en amalgamant les deux. Du point de vue des deux méta-théorèmes que vise von Neumann, ces deux lapsus ne sont pas anodins.

Voici les énoncés (E), page 140, où apparaît l'essentiel sur la correspondance entre grandeurs et opérateurs. D'abord est énoncé :

*«(E1) :  $\underline{R}$  étant une grandeur physique quelconque dont  $R$  est l'opérateur correspondant, et  $F(\lambda)$  étant*

une fonction arbitraire, l'espérance mathématique de  $F(\underline{R})$  dans l'état  $\phi$  est donnée par la formule

$$Esp(F(\underline{R}), \phi) = \langle \phi | F(\underline{R}) | \phi \rangle \quad \gg$$

et ensuite l'énoncé particulier :

«(E2) :  $\underline{R}$  et  $R$  ayant la même signification que plus haut, on a pour l'espérance mathématique de  $\underline{R}$  dans l'état  $\phi$  :

$$Esp(\underline{R}, \phi) = \langle \phi | R | \phi \rangle \gg$$

Ensuite nous trouvons en bas de la page (4) :

«(Nous faisons donc l'hypothèse qu'à chaque grandeur physique  $R$  correspond un opérateur hermitique hypermaximal et réciproquement)»

et suit un renvoi à la note 119 et au Chapitre IV § 2, renvoi également inséré dans l'énoncé (E1).

Ni avant, ni après ces énoncés n'est fait allusion à la définition de  $F(\underline{R})$ .

En appliquant l'hypothèse de correspondance bi-univoque à laquelle von Neumann fait allusion en bas de la page 141, on pourrait considérer que l'égalité  $-Esp(F(\underline{R}), \phi) = \langle \phi | F(\underline{R}) | \phi \rangle$  - définit la grandeur  $F(\underline{R})$ .

Cette supposition ne serait pas contraire à l'esprit de von Neumann car nous lisons beaucoup plus loin au Chapitre IV p. 213, dans un autre contexte :

«E - A partir d'un certain nombre de grandeurs quelconques  $\underline{R}, \underline{S}, \dots$ , nous définirons une autre  $\underline{R} + \underline{S} + \dots$  indépendante du choix de la fonction  $Esp(\underline{R})$  par la condition

$$Esp(\underline{R} + \underline{S} + \dots) = Esp(\underline{R}) + Esp(\underline{S}) + \dots \gg$$

Ce qui revient à "définir"  $\underline{R} + \underline{S}$  par la relation  $Esp(\underline{R} + \underline{S}, \phi) = \langle \phi | R + S | \phi \rangle$  (que les grandeurs  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$  soient simultanément mesurables ou non)

Dans le cas présent néanmoins il n'en n'est rien car à la ligne 10 (p.141) on lit :

«Désignons par  $S$  l'opérateur de  $F(\underline{R})$ »

ce qui sous-entend que  $F(\underline{R})$  est premier.

C'est seulement à la page 205, au chapitre IV, que nous trouvons la définition de la grandeur  $F(\underline{R})$  :

« Soit  $R$  une grandeur et  $f(\lambda)$  une fonction quelconque; la grandeur  $f(R)$  se définit de la façon suivante : le résultat de la mesure de  $f(R)$  est  $f(a)$ , où  $a$  est la valeur fournie par une mesure de  $R$ . »

Revenons à la page 141 où von Neumann prend soin "d'énoncer séparément l'important résultat" :

« (F) Si  $R$  est l'opérateur de  $R$ ,  $f(R)$  sera l'opérateur de  $f(R)$  »

En fait, dans les pages 140 et 141, von Neumann démontre l'équivalence des énoncés (W), (E1) et (E2). Mais alors la question se pose : comment est-il possible que von Neumann puisse démontrer un tel résultat *avec un symbole non défini* ?!

L'analyse de ce phénomène est plus important qu'il n'y paraît. En fait on voit déjà à l'oeuvre dans ces pages le vice fondamental des déductions de von Neumann, vice de forme qu'on retrouve dans le théorème de compatibilité et dans le théorème de complétude.

Si von Neumann peut faire les démonstrations des pages 140 141, c'est que le symbole  $F(R)$  est totalement inopérant et il est de même du symbole  $R$ . C'est à dire les raisonnements peuvent se faire en restant intégralement à l'intérieur du domaine formel mathématique en n'utilisant que les opérateurs  $R$ , les fonctions d'opérateurs et les spectres d'opérateurs. L'énoncé (W) s'écrit alors :

(W') Le système étant dans l'état  $\phi$ , la probabilité  $w$  pour que les opérateurs  $R_1, R_2, \dots, R_l$  «prennent respectivement les valeurs comprises dans les intervalles  $I_1, \dots, I_l$ » est

$$w = \| E_1(I_1) \dots E_l(I_l) \phi \|^2$$

où  $E_1(I), \dots, E_l(I)$  sont les décompositions de l'unité correspondant à  $R_1, R_2, \dots, R_l$

Cet énoncé doit être compris comme donnant une définition mathématique de la phrase entre guillemets.

Cette définition doit être complétée par la suivante.

**Définition** - L'opérateur  $R$  «prend la valeur  $\lambda^*$  », dans l'état  $\phi$  si pour tout intervalle  $I = \{\lambda', \lambda''\}$  la probabilité que « $R$  prenne une valeur dans  $I$ » soit égale à zéro si cet intervalle ne contient pas  $\lambda^*$ , et à l'unité dans le cas contraire, c'est à dire si  $\lambda' < \lambda^* \leq \lambda''$ .

(Ces lignes sont copies conformes, en remplaçant  $R$  par  $R$ , des lignes 1 à 3 de la page 149. Nous y reviendrons.)

On peut ensuite rajouter une définition de vocabulaire en parlant au sujet de  $\lambda^*$  de "valeur possible" de l'opérateur  $R$ .

En revenant alors à la conséquence au postulat (W) signalée par von Neumann à la page 140, lignes 13 à 16, lignes qui contiennent justement le lapsus que nous avons signalé, nous pouvons maintenant énoncer, et sans lapsus, ces lignes de la façon suivante :

"Un opérateur  $R_j$  ne peut prendre que des valeurs égales à ses valeurs propres, c'est à dire aux nombres qui constituent son spectre."

Il est instructif de remarquer que la démonstration de cette conséquence peut se faire en copiant strictement les lignes 4 à 13 de la page 149 (texte auquel nous reviendrons) :

«D'après (W)', cette dernière condition (c'est à dire celle de la définition plus haut) s'écrit  $\|E(I)\phi\|^2 = 1$  ou encore  $\|\phi\| = \|E(I)\phi\|$  puisque  $\|\phi\| = 1$ . Aussi bien  $E(I)$  que  $1 - E(I)$  sont des opérateurs de projection ; on peut donc écrire, d'après le théorème 13, Ch II, § 4 :

$$\|\phi - E(I)\phi\|^2 = \|\phi\|^2 - \|E(I)\phi\|^2$$

$$\phi - E(I)\phi = 0$$

$$E(\lambda'')\phi - E(\lambda')\phi = E(I)\phi = 0$$

Faisons tendre  $\lambda' \rightarrow -\infty$  ; on a (cf S1 ch II & 7) :

$$E(\lambda'')\phi = \phi ; \text{ et } \lambda'' \rightarrow \infty \text{ donne } E(\lambda')\phi = 0.$$

$$\text{Donc } E(\lambda)\phi = \phi \text{ pour } \lambda \geq \lambda^* \text{ et } 0 \text{ pour } \lambda < \lambda^*$$

Or d'après Ch II, § 8, ces conditions caractérisent précisément la relation  $R\phi = \lambda^*\phi$ .....»

..... qui montre que  $\lambda^*$  est une valeur propre de  $R$  de vecteur propre  $\phi$ .

Ceci montre bien que le symbole  $F(\underline{R})$  est non opérant pour ce qui est de cette conséquence. Il en est de même de la déduction de (E1) à partir de (W) (Page 140) : il suffit de conférer un sens à  $\text{Esp}(F(\underline{R}), \phi)$  en utilisant la définition des "valeurs possibles" d'un opérateur.

Regardons la déduction de (E2) à partir de (E1). (p. 141, lignes 10-21) :

Ces lignes sont étonnantes : leur seul contenu démonstratif est le suivant : si  $S$  et  $T$  ( $T = F(\underline{R})$ ) sont deux opérateurs qui vérifient  $(S\phi, \phi) = (T\phi, \phi)$  alors ces deux opérateurs sont égaux. On ne comprend pas ce que "l'important résultat (F)" (cf p 10) a à voir avec cela.

Il nous reste à regarder la dernière implication :  $W$  peut être déduit de E1 ou E2.

Les lignes des pages 141 et 142 qui comportent cette déduction peuvent être copiées strictement en remplaçant partout les lettres majuscules grasses par des lettres majuscules ordinaires.

Avant de continuer notre analyse exhaustive des propos de von Neumann sur la correspondance  $\underline{R} \leftrightarrow R$ , faisons encore deux remarques de détail concernant les sept premières pages du chapitre III.

Nous avons remarqué que la définition du symbole "la grandeur  $F(\underline{R})$ " ne se trouve qu'à la page 205 alors qu'il est utilisé sous la forme  $F(\underline{R})$  avec un "F" majuscule à la page 140 et la page 141 jusqu'à l'énoncé de l'important résultat (F). Or ce résultat («Si  $R$  est l'opérateur de  $\underline{R}$   $f(\underline{R})$  sera l'opérateur de  $f(\underline{R})$ ») s'énonce avec un "f" minuscule exactement comme à la page 205

où ce symbole est défini. Il semble qu'il y ait eu un sac de noeuds dans le manuscrit de von Neumann. Mais quoi qu'il en soit, que von Neumann ait donné la définition de " $F(R)$ " dans un ordre logique convenable ou non, ne change rien à notre démonstration que ce symbole est inopérant.

La deuxième remarque concerne la structure de l'écriture " $\text{Esp}(\underline{R}, \phi) = (R\phi, \phi)$ " dans l'énoncé (E2). Cette égalité n'est pas homogène : à gauche nous trouvons une grandeur physique  $\underline{R}$  (dans l'idée de von Neumann) et l'espérance "mathématique" relativement à cette grandeur expérimentale, à droite nous trouvons des entités mathématiques  $R$  et  $\phi$ . Le membre de droite est homogène, le membre de gauche non, mélangeant des entités physiques et des entités formelles,  $R$  et  $\phi$ . Cela signifie que von Neumann fait (essaie de faire), une distinction entre "grandeurs physiques" et "opérateur", mais qu'il n'en fait pas entre "états physiques" et "états mathématiques". Autrement dit, von Neumann ne considère à priori au chapitre III que des états formels quantiques  $\phi$ .

Nous constatons donc dès le départ un flottement important de von Neumann au sujet de sa correspondance bijective entre "grandeurs" et opérateurs bien avant que cette correspondance ne devienne opératoire (aux yeux de von Neumann) dans la deuxième démonstration du théorème de compatibilité et dans le théorème sur les variables cachées.

## 2 -

Nous continuerons maintenant notre analyse sur la correspondance entre "grandeurs physiques" et opérateurs en regardant de près le chapitre III § 3 p. 145 à p. 158. Dans ce paragraphe, von Neumann traite de la mesure simultanée de deux grandeurs et établit le théorème sur la compatibilité de deux grandeurs.

Notre auteur donne deux démonstrations de ce théorème. La première démonstration ne fait pas appel à la correspondance bijective entre "grandeurs physiques" et opérateurs hermitiques hypermaximaux : elle suppose seulement que les opérateurs formels considérés  $R, S$ , sont interprétés dans le domaine physique expérimental par deux grandeurs physiques notées  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$ . (Elle ne présuppose pas qu'à tout opérateur correspond une grandeur physique et que réciproquement à toute grandeur physique correspond un opérateur. Nous faisons ici une lecture restrictive de la première démonstration de von Neumann. En effet von Neumann, qui postule cette correspondance bijective entre grandeurs et opérateurs, pense démontrer en toute généralité dans cette première démonstration où les spectres sont supposés discrets que deux grandeurs physiques quelconques sont simultanément mesurables si et seulement si leurs opérateurs correspondant commutent, c'est-à-dire que von Neumann pense démontrer un métathéorème qui a une connotation de complétude.

Ce que nous voulons montrer, c'est que même dans l'hypothèse d'une interprétation restrictive de la première démonstration (à savoir en ne postulant qu'une flèche "d'interprétation"  $R \rightarrow \underline{R}$  allant d'une partie du formel vers une partie de l'expérimental), cette démonstration n'atteint pas son but, car elle s'appuie sur une analyse non existante de la correspondance entre "états physiques" et "états mathématiques", c'est-à-dire les seuls états considérés sont les états quantiques formels  $\phi$  d'un espace de Hilbert, états qui sont interprétés dans le domaine physique. Dit autrement, la "mesurabilité simultanée des deux grandeurs  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$ " est dans cette première démonstration, uniquement relative à une définition dans le domaine formel entre les opérateurs  $R$  et  $S$  (qui sont la "source" de  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$ ):

La deuxième démonstration par contre, qui traite le cas général (relativement aux spectres), fait explicitement appel à la correspondance bijective entre "grandeurs physiques" et opérateurs.

Dans ce numéro 2 nous analyserons la première démonstration. L'étude de la deuxième démonstration, nous la reportons après l'analyse du théorème de complétude (sur les variables cachées).

Avant d'entamer la question de la mesure simultanée de deux grandeurs, von Neumann pose une question plus simple :

*Q- «Admettons qu'une première mesure de  $\underline{R}$  ait donné comme résultat la valeur  $\lambda^*$ ; quel sera l'état dans lequel va se trouver le système après cette mesure»  
(p. 148)*

(Insistons sur notre lecture restrictive de cette question, suggérée par notre typographie. Dans le symbole  $\underline{R}$ , c'est la lettre R, c'est à dire l'opérateur qui est premier, la barre en dessous lui associe une grandeur  $\underline{R}$ . Dans la typographie du texte de von Neumann, dans cet énoncé se trouve une lettre "R majuscule grasse" qui peut donc être considérée comme première. Ceci correspond bien à l'intention de von Neumann qui a en vue un théorème de complétude. Mais quelle que soit l'attitude adoptée (la nôtre, restrictive, ou celle de von Neumann), la grandeur physique dénotée soit par  $\underline{R}$  soit par "R grasse" ( $\mathcal{R}$ ) a une existence propre dans le champ physique expérimental de la mesure.)

Avant d'analyser la réponse que donne von Neumann à cette question, regardons de plus près les raisons qui l'ont amené à la poser. Pour cela il faut détailler la présentation que fait von Neumann de l'expérience de Compton-Simons (pp. 146,147).

L'expérience (choc d'un électron et d'un photon) est bien connue. Elle sert dans les textes "pédagogiques" à illustrer l'aspect corpusculaire des microsystemes. Etant une expérience de choc, la conservation de l'impulsion permet d'inférer de la mesure de l'impulsion de l'électron, l'impulsion du photon, "sans intervenir sur ce système". De ce point de vue "Compton-Simons" fait penser au complexe E.P.R. (postérieur au texte de von Neumann). Mais ce n'est bien sûr pas cet aspect que retient von Neumann. Au contraire il s'intéresse au système formé par l'électron  $e^-$  tout seul et la grandeur  $\underline{R}$  "position de l'électron". Il interprète "Compton-Simons" comme étant une succession de deux mesures  $M_1$ ,  $M_2$  ( $M_2$  intervenant tout juste après  $M_1$ ) de la même grandeur considérés à l'instant  $t_0$  du choc (c'est à dire  $t_0 < t_1 < t_2$ ). La mesure  $M_1$  intervient sur  $e^-$  (et l'électron est absorbé) et  $M_2$  intervient sur le photon (qui est aussi absorbé), mais von Neumann considère  $M_2$  comme étant une mesure de  $\underline{R}$  à l'instant  $t_0$  pour l'électron. La mesure  $M_2$  n'intervient nullement sur le système  $e^-$  (du moins dans la présentation qu'en fait von Neumann). Cette remarque aura son importance plus tard.

Le fait que le résultat de  $M_2$  est certain connaissant le résultat de  $M_1$  (qui lui n'est pas prévisible) (d'après le principe de la conservation), amène von Neumann à poser la question plus haut et à formuler la réponse quantique bien connue.

Mais étant donné l'importance des passages du texte précédant la formulation de la question Q pour comprendre les idées de von Neumann, citons-les in extenso : après avoir évoqué

*«qu'on peut imaginer trois types différents de causalité ou d'a-causalité» (p. 148)*

dont la deuxième alternative consiste à

*«imaginer qu'il existe une dispersion de valeurs de  $R$  pour la première mesure, mais que toute autre mesure, effectuée immédiatement après, est en quelque sorte contrainte de fournir exactement le même résultat.» (p. 149)*

Ensuite :

*«Cela étant, l'expérience de Compton-Simons montre que seule la deuxième alternative peut entrer en ligne de compte lorsqu'il s'agit d'une théorie statistique. Supposons donc que le système se trouve au début dans un état dans lequel il ne soit pas possible de prévoir avec certitude le résultat de la mesure de  $R$ .*

*Effectuons cette mesure  $M$  ( $M_1$  dans l'exemple cité plus haut) : de ce seul fait, (c'est nous qui soulignons) le système passe dans un autre état, à savoir un état dans lequel la valeur de  $R$  est parfaitement déterminée. Le nouvel état ne dépend pas d'ailleurs uniquement du dispositif de mesure  $M$  mais aussi du résultat de la première mesure (C'est von Neumann qui souligne) (lequel ne pouvait pas être prévu exactement lorsque le système se trouvait dans l'état initial) ;»*

C'est donc dans sa présentation de "Compton-Simons" que von Neumann trouve la justification de sa réponse à la question posée.

Voici la formulation du postulat de mesure quantique qu'il propose : (p.14---)

*«(M) Si une première mesure d'une grandeur  $R$  fournit la valeur  $\lambda^*$ , le système, du fait de cette mesure, passe dans un état tel que toute mesure faite immédiatement après fournit pour  $R$  avec certitude la même valeur  $\lambda^*$ .»*

Cette formulation appelle plusieurs remarques. Elle montre bien que von Neumann attache un état à un microsystème et que c'est la mesure qui est responsable de la "réduction". Ce postulat manifeste les conceptions de la mesure quantique de von Neumann. Nous y reviendrons au paragraphe consacré à la mesure dans le texte de von Neumann.

Ensuite il faut relever que c'est une analyse faite en termes classiques (à part la conception corpusculaire de la lumière) qui amène von Neumann à énoncer la principe de la mesure quantique. Cette démarche est répétée dans le paragraphe 4 de ce même chapitre consacré aux

inégalités de Heisenberg où von Neumann insiste explicitement sur le caractère classique de ces inégalités en reprenant en gros les arguments du "microscope de Heisenberg" où le traitement est essentiellement classique, non quantique; le côté non classique étant "seulement" contenu dans le fait de traiter simultanément la lumière de façon ondulatoire et corpusculaire ; (cette analyse est reprise plus tard par von Neumann après le Ch.III, § 6, sur la théorie de la lumière au Ch.IV, § 4, sur les mesures macroscopiques. (Voir notre paragraphe sur la mesure)). Nous avons déjà relevé (voir p.6) quelles sont aux yeux de von Neumann les caractéristiques essentielles de la théorie quantique, les inégalités de Heisenberg n'en font pas partie et il n'est pas gênant dans l'esprit de von Neumann de postuler un principe de mesure qui, du point de vue classique, est tout à fait raisonnable.

En fait von Neumann "démontre" en partie le postulat (M) en répondant à une question (Q') légèrement plus simple que (Q) :

(Q') «Considérons d'abord la question: dans quelles conditions une mesure de  $R$  peut-elle fournir avec certitude le résultat  $\lambda^*$ ? Nous allons y répondre d'une façon tout à fait générale sans introduire aucune hypothèse restrictive sur  $R$ .»

Et suivent deux démonstrations que nous reproduisons ici :

Soit  $E(\lambda)$  la décomposition de l'unité correspondant à  $R$ , et  $I$  l'intervalle  $(\lambda', \lambda'')$ . Nous pouvons formuler les données du problème de la façon suivante : la probabilité de trouver la valeur de  $R$  dans l'intervalle  $I$  est égale à zéro si cet intervalle ne contient pas  $\lambda^*$ , et à l'unité dans le cas contraire, c'est à dire si  $\lambda' < \lambda^* \leq \lambda''$ .

D'après W, cette dernière condition s'écrit  $\|E(I)\phi\|^2 = 1$  ou encore  $\|E(I)\phi\| = \|\phi\|$  puisque  $\|\phi\| = 1$ . Aussi bien  $E(I)$  que  $1-E(I)$  sont des opérateurs de projection ; on peut donc écrire, d'après le théorème 13, ch. II, § 4 :  $\|\phi - E(I)\phi\|^2 = \|\phi\|^2 - \|E(I)\phi\|^2 = 0$

$$\phi - E(I)\phi = 0$$

Faisons tendre  $\lambda'$  vers  $-\infty$ , on a (cf. ch. II, § 7)  $E(\lambda'')\phi = \phi$ , et  $\lambda''$  tend vers  $\infty$  donne  $E(\lambda')\phi = 0$ . Donc  $E(\lambda)\phi = \phi$  pour  $\lambda \geq \lambda^*$  et  $E(\lambda)\phi = 0$  pour  $\lambda < \lambda^*$ .

Or, d'après ch. II, § 8, ces conditions caractérisent précisément la relation  $R\phi = \lambda^*\phi$  qui montre que le résultat de la mesure sera nécessairement  $\lambda^*$ .

Une autre démonstration de  $R\phi = \lambda^*\phi$  est basée sur  $E_1$  (ou sur  $E_2$ ). Si  $R$  a certainement la valeur  $\lambda^*$ ,

l'espérance mathématique de  $(R - \lambda^*)^2$  sera nulle.  
L'opérateur correspondant sera  $F(R)$ , où

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^2$$

donc 
$$F(R) = (R - \lambda^*.1)^2.$$

On doit donc avoir

$$(R - \lambda^*.1)^2 (\phi, \phi) = (R - \lambda^*.1) \phi, \quad (R - \lambda^*.1) \phi =$$

$$| (R - \lambda^*.1) \phi |^2 = \| R\phi - \lambda^* \phi \|^2 = 0$$

c'est à dire

$$R\phi = \lambda^* \phi.$$

Et von Neumann de continuer :

«Par conséquent, dans l'hypothèse admise concernant  $R$  (cas du spectre purement ponctuel), toute mesure de  $R$  a comme conséquence de transformer un état  $\psi$  en un quelconque des autres états  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , dans lesquels le résultat de la mesure serait respectivement  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ »

( $-\phi_i$  étant les vecteurs propres de valeurs propres  $-\lambda_i$ )

Il y a une hypothèse fondamentale sous-jacente à ces passages des pages 148-149, à savoir :

la mécanique quantique est complète : l'état du système est toujours descriptible par un  $-\psi$ -d'un espace de Hilbert.

Nous allons justifier cette assertion. Cette accusation est particulièrement grave, car von Neumann à l'intention de démontrer un théorème de complétude (à savoir que deux grandeurs physiques sont mesurables si et seulement si leurs opérateurs commutent).

D'abord, les deux démonstrations recopiées montrent clairement que l'égalité  $v_m(R) = v_p(R)$  est démontrée uniquement dans le cas où on suppose que le système est dans un état quantique. Pour un type de système donné et pour une grandeur  $R$  donnée il est à priori imaginable de considérer des états non quantiques, c'est à dire, des états ne permettant pas un traitement quantique de la situation physique envisagée.

Mais, même si on considère qu'une mesure confère un état quantique à un microsystème (ce qui sauve alors les deux démonstrations) il n'en résulte pas qu'avant la mesure le système était dans un état quantique. Or, dans les citations des pages 148 et 149, il est parfaitement clair que von Neumann fait cette supposition.

Si on peut admettre que l'analyse de von Neumann de "Compton-Simons" peut suggérer le postulat (M), cette même analyse, légèrement changée peut suggérer des idées tout à fait contraires. Ceci montrera le caractère à priori du postulat (M), plutôt suggéré par le formalisme (ou des éléments idéologiques), que par l'analyse proposée laquelle paraît ainsi être arrangée ad hoc.

En effet, en reprenant les notations de la page 13 au lieu de faire d'abord  $M_1$  puis  $M_2$  ( $M_1$  intervenant sur l'électron), on fait d'abord  $M_2$ , qui intervient sur le photon, mais est une mesure sur l'électron considéré comme le sujet à l'étude, puis on fait  $M_1$ . Les conclusions de von Neumann sont les mêmes : le résultat de  $M_2$  est incertain, mais une fois connu ce résultat, le résultat de  $M_1$  est certain. Comme l'analyse de von Neumann se fait dans un cadre classique,

nous pouvons continuer l'analyse-bis en remarquant que la mesure M2 n'a changé en rien l'état physique de l'électron !

Continuons cette analyse-bis, en faisant remarquer que si dans son analyse (c'est à dire dans le cas M1 antérieur à M2), von Neumann a pu considérer que M2 est une mesure sur l'électron, c'est parce qu'on sait que le photon et l'électron ont inter-agi dans le passé. Livrons-nous alors à un jeu de science fiction. Formellement, rien n'empêche d'imaginer que von Neumann aurait pu insérer à ce niveau de ses "fondements" le produit tensoriel d'espace de Hilbert et de traiter le cas particulier de deux systèmes I et II, ayant inter-agi dans le passé pour être dans un état global du type  $\psi = \sum c_n u_n \otimes v_n$ , où  $u_n$  sont les vecteurs propres orthonormés d'une grandeur  $\underline{A}$ , et  $v_n$  ceux d'une grandeur  $\underline{B}$ .

Par exemple, prenons  $\underline{A} = \mathcal{S}_{x,1}$  et  $\underline{B} = \mathcal{S}_{z,2}$  (spins). Considérons maintenant le système I tout seul et décidons de mesurer la grandeur  $\mathcal{S}_{x,1}$  (l'indice "1" signifiant qu'on mesure la grandeur  $\mathcal{S}_x$  sur le premier système). En suivant von Neumann on peut considérer que pour cela il suffit de mesurer  $\mathcal{S}_{z,2}$  ! On a bien sûr latitude de mesurer  $\mathcal{S}_{z,1}$  directement sur I pour avoir mesuré simultanément deux grandeurs  $\mathcal{S}_{x,1}$  et  $\mathcal{S}_{z,1}$  dont les opérateurs sont éminemment non commutables. von Neumann (fictif) aurait alors immédiatement dégagé que

- il n'y a pas d'état formel  $\psi$  qui corresponde au sous-système I;
- il se pose une question de complétude de la mécanique quantique ;
- il est difficile de démontrer un métathéorème sur la mesure simultanée de deux grandeurs.

Mais revenons à von Neumann réel. Notre fiction dégage donc le caractère à priori du postulat (M) qui doit être regardé comme proposant, au niveau de la mesure, une interprétation du formalisme de la mécanique quantique. Nous avons déjà remarqué (à la page 10 et suivantes) que la première démonstration (il s'agit ici de la démonstration à la page 15) est entièrement contenue dans le champ formel et indépendante de "la bijection entre grandeurs physiques et opérateurs" dont il parle. Il en est de même de la deuxième démonstration.

En résumé, les raisonnements de von Neumann sont cohérents si on considère qu'ils sont faits à l'intérieur d'un champ formel dont certains éléments sont interprétés physiquement. La "correspondance bijective entre grandeurs physiques et opérateurs" est formellement inopérante.

Terminons ce n°2 en analysant la première démonstration du théorème de compatibilité. Comme nous avons signalé un contre-exemple (bien connu depuis EPR) à ce théorème, sa démonstration doit être interprétée et analysée dans le même esprit.

von Neumann commence sa première démonstration (p. 154) en considérant le cas où les opérateurs R et S ...

*... «correspondant aux grandeurs R et S ont un spectre discret .*

*Mesurons simultanément R et S ; après la mesure toutes les deux seront dans un état tel que R et S auront avec certitude les valeurs trouvées. Soient  $\lambda_m$  et  $\mu_n$  celles-ci et  $\psi$  l'état en question, on aura*

$$R.\psi = \lambda_m \text{ et } S.\psi = \mu_n \psi$$

On voit de nouveau à l'oeuvre dans ces lignes l'amalgame permanent que fait von Neumann entre le champ physique et le champ formel. Pour désembrouiller la situation il faut

procéder comme nous l'avons fait dans les pages précédentes, en posant une définition dans le champ formel ; définition du terme :

« Deux opérateurs  $R$  et  $S$  sont appelés "commensurables" si ..... »

Ensuite, réécrire la démonstration dans le champ formel pour aboutir au théorème mathématique :

Théorème - Deux opérateurs  $R$  et  $S$  sont commensurables si et seulement si ils commutent.

Ensuite il faut proposer, dans certaines conditions expérimentales, par rapport à certains opérateurs, une interprétation physique du terme mathématique de "commensurabilité" qui sera alors appelée mesure simultanée de deux grandeurs.

Nous sommes en présence de deux champs, le champ physique expérimental et le champ formel. Ces deux champs doivent être structurés indépendamment. Or chez von Neumann, il n'y a que le champ formel qui soit structuré, le champ physique expérimental étant plongé dans un flou verbal. A travers sa "correspondance bijective", von Neumann identifie les deux champs en ramenant l'un à l'autre. Il fait ici preuve d'un profond mentalisme et d'une profonde absence de rigueur.

D'après ce que nous venons de voir, nous pourrions-nous passer de l'analyse de sa deuxième démonstration, démonstration qui est basée explicitement sur la "correspondance bijective" et sur quasiment rien d'autre. Comme ce procédé est réutilisé par von Neumann dans son théorème sur les variables cachées, nous continuerons au n°3 à analyser ce que dit von Neumann sur cette correspondance et nous corroborerons au n°4 les conclusions auxquelles nous sommes déjà arrivés.

### 3 -

La suite des propos de von Neumann sur la correspondance  $R \leftrightarrow \underline{R}$  se trouve à la page 155, tout juste avant sa deuxième démonstration sur la compatibilité de deux grandeurs.

A la ligne 21 est définie la grandeur  $\underline{R} + \underline{S}$ , dans le cas de deux grandeurs simultanément mesurables :

*« Toute mesure simultanée de  $\underline{R}$  et de  $\underline{S}$  sera en même temps une mesure de  $\underline{R} + \underline{S}$  : en effet, en ajoutant les résultats, on obtiendra la valeur de  $\underline{R} + \underline{S}$ . »*

La grandeur " $\underline{R} + \underline{S}$ " s'en trouverait peut-être définie si l'expression "deux grandeurs sont simultanément mesurables" avait été définie.

Or à ce sujet on lit seulement (p. 205) :

*« Nous dirons en général que deux (ou plusieurs grandeurs)  $R$  et  $S$  sont simultanément mesurables s'il existe un dispositif qui permette de les mesurer en même temps dans le même système, la seule différence consistant en la manière dont il faut calculer leurs valeurs respectives à partir des indications numériques des instruments de mesure. »*

Ces lignes ont une allure de définition mathématique idéaliste avec un "il existe" bien typique. Du point de vue de la théorie physique c'est un bon exemple de verbalisme :

deux grandeurs sont simultanément mesurables si et seulement si elles sont simultanément mesurables !

Si ce genre de texte a pu survivre jusqu'à nos jours sans être pourfendu par la critique, c'est que le verbalisme est évocateur ; il n'en est pas moins vide.

Ensuite von Neumann démontre l'assertion suivante :

Si  $R$  correspond à  $\underline{R}$ , si  $S$  correspond à  $\underline{S}$ , alors l'opérateur  $R + S$  correspond à  $\underline{R} + \underline{S}$ , où  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$  sont deux grandeurs "simultanément mesurables".

Voici la démonstration qu'il en donne :

*De la définition de  $R + S$  «il s'ensuit que dans n'importe quel état  $\psi$  l'espérance mathématique de  $R + S$  sera égale à la somme des espérances mathématiques de  $R$  et de  $S$ . Remarquons que cela est vrai que  $R$  et de  $S$  soient statistiquement indépendants l'un de l'autre ou non, qu'il y ait ou non une corrélation entre eux quelle qu'elle soit d'ailleurs, ou enfin qu'il existe ou non de lien causal entre eux ; en effet, on sait que la loi Espérance mathématique s'écrit d'une part  $(T\psi, \psi)$  et d'autre part*

$$(R\psi, \psi) + (S\psi, \psi) = ((R + S)\psi, \psi)$$

*on a donc quel que soit  $\psi$*

$$(T\psi, \psi) = ((R + S)\psi, \psi)$$

*donc  $T = R + S$  : l'opérateur de  $R + S$  est donc  $R + S$ .»*

Remarquons d'abord que von Neumann insiste sur la linéarité de l'espérance mathématique. Cette linéarité est d'après lui un des piliers de sa démonstration du théorème de complétude. Cette linéarité lui permettra au chapitre IV de "définir" la somme de deux grandeurs physiques, même quand ces grandeurs ne sont pas simultanément mesurables. Cette linéarité a été critiquée comme étant fausse dans le cas général de grandeurs non compatibles (nous y reviendrons plus loin) mais aussi dans le cas où les grandeurs sont simultanément mesurables.

Un contre-exemple est fourni par les grandeurs  $\underline{R} = \mathcal{J}_{x,1}$  et  $\underline{S} = \mathcal{J}_{z,1}$  (voir p. 16). D'après ce qu'on sait, ces grandeurs sont simultanément mesurables et, selon von Neumann, la grandeur  $\underline{R} + \underline{S} = \mathcal{J}_{x,1} + \mathcal{J}_{z,1}$  est bien définie. Cet exemple montre deux choses :

- d'abord la démonstration de von Neumann ne s'applique pas : on ne peut pas l'écrire car l'écriture  $T\psi$ ,  $R\psi$ ,  $S\psi$  n'a pas de sens car la mesure de  $\underline{R} = \mathcal{J}_{x,1}$  se fait relativement à un état non quantique ;
- ensuite il montre qu'à  $\underline{R} + \underline{S}$  ne peut correspondre l'opérateur  $T = R + S$ , car pour un opérateur quelconque  $T$  nous avons vu que von Neumann démontre que  $vm(\underline{T}) = vp(T)$ . (cette démonstration suppose la limitation aux états quantiques). Or il est facile de constater que  $vm(\underline{R} + \underline{S}) = \{-\hbar/2, 0, \hbar/2\}$   
et  $vp(R + S) = \{-\hbar/\sqrt{2}, \hbar/\sqrt{2}\}$

Donc dans ce cas, l'intersection entre  $vm(\underline{T})$  et  $vp(T)$  est vide.

Ces considérations sont tirées de J. L. Park et H. Margenau - "Simultaneous Measurability in Quantum Theory", International Journal of Theoretical Physics, Vol 1, n°3 (1968) p.p. 211-283.

L'article en question montre bien les difficultés et contradictions que soulèvent le texte de von Neumann au sujet de la correspondance bijective entre grandeurs physiques et opérateurs. Néanmoins les auteurs de cet article sont soumis au pouvoir évocateur du verbalisme de von Neumann, c'est à dire qu'ils essaient de constituer une théorie de la mesure expérimentale en s'accrochant au seul élément "positif" dans le texte, à savoir que les "grandeurs physiques" sont "cernées" par rapport aux valeurs qu'elles "prennent". Mais ce faisant ils n'analysent pas la structure de l'erreur de von Neumann, ce que nous essayons justement de faire.

Notre analyse consiste à dire qu'une "grandeur physique" n'est pas définie par de simples considérations de "valeurs prises". Le symbole  $\underline{R}$  ne représente même pas une fonction, car il n'y a pas de domaine de définition. Pour nous, le symbole  $\underline{R}$  (ou  $R$  grasse) n'a pas d'existence propre ; il est lié de façon identifiante au symbole  $R$  : l'énoncé en question et sa démonstration est purement tautologique (moyennant la linéarité relative à la somme de deux opérateurs :

$$(R + S) \cdot \phi = R \cdot \phi + S \cdot \phi$$

Nous venons de dire que dans les paragraphes 1 à 3 du chapitre III, le symbole  $\mathbf{R}$  n'est pas défini explicitement comme une fonction. Or au paragraphe 5 de ce même chapitre, von Neumann revient sur cette question.

Dans les cinq premières lignes de ce paragraphe, von Neumann situe d'abord clairement le chapitre III § 1 dans le cadre de la quantification d'un système classique décrit dans un espace de configuration  $q_1, \dots, q_k$ . Il est vrai qu'au début du Ch. I § 1, p. 5, von Neumann signale que la considération du spin sort du cadre qu'il s'est tracé. Le symbole  $\underline{R}$  désigne ici une grandeur physique en mécanique classique et  $\underline{R}$  est considéré comme une fonction  $\underline{R}(q_1, \dots, q_k; p_1, \dots, p_k)$ .

Ensuite, le passage à la mécanique quantique consiste à associer univoquement à toute grandeur  $\underline{R}$  un opérateur hypermaximal  $R$ , cette association posant problème comme von Neumann l'a dit dès le Ch. I, § 1, dans sa note 14.

Il continue :

*«Cependant, sans rien préjuger quant à la relation entre  $\underline{R}$  et  $R$  nous avons constaté au Ch. III § 1 et § 3 les faits suivants :*

*(L)  $R$  et  $S$  étant les opérateurs correspondant aux grandeurs  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$ , l'opérateur  $aR + bS$  correspondra à la grandeur  $a\underline{R} + b\underline{S}$ .*

*(F) Si  $R$  est l'opérateur correspondant à la grandeur  $\underline{R}$ ,  $F(R)$  (où  $F(\lambda)$  est une fonction réelle quelconque) correspondra à  $F(\underline{R})$ .»*

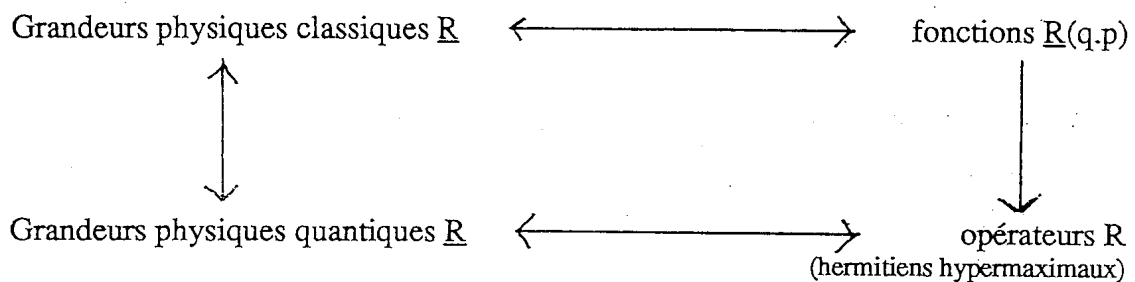
Quelques lignes plus loin : (p. 171, Ligne 6)

*«Quant au théorème (L) on le généralise en mécanique quantique en l'étendant aussi au cas où  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$  ne*

sont plus mesurables simultanément. Nous n'aborderons cette question que plus loin au Ch. IV § 1 ; pour le moment contentons-nous de remarquer que si  $R$  et  $S$  ne sont plus simultanément mesurables, on ne voit pas très bien quel sens il faut attribuer à l'expression  $aR + bS$ .»

Ceci appelle les remarques de détail suivantes. Dans l'énoncé (F) la "grandeur"  $F(R)$  n'est toujours pas définie. Au chapitre III § 1 et 3 nous avons seulement "constaté" la relation (L) pour des grandeurs  $R$  et  $S$  simultanément mesurables. Le bout de la phrase "... on le généralise en mécanique quantique ..." semble exprimer une opposition.

Regardons le schéma suivant :



La flèche horizontale du haut consiste dans une identification : l'habitude de la mécanique classique fait qu'on n'établit plus de distinction. Il y a néanmoins une différence conceptuelle entre les deux côtés de la flèche.

La flèche verticale de gauche est une bijection : il y a autant de grandeurs classiques qu'il y a de grandeurs quantiques, car nous sommes placés dans un cadre restreint (pas de spin). Cette flèche n'est nullement un isomorphisme car les procédures de mesures n'ont pas la même structure, à priori, en mécanique classique et en mécanique quantique.

La flèche verticale de droite est une flèche dans un sens seulement. C'est une association, un "principe de correspondance" qui pose des problèmes formels. Signalons "l'argument de Temple G." (Nature, June 8, 1935, p. 957) qui consiste à démontrer qu'il n'existe pas de flèche de ce type qui préserve les sommes, la multiplication par un scalaire, et les carrés. Signalons pour mémoire les articles plus récents de H.J. Groenewold - On the principles of elementary quantum mechanics, Physica 12 (1946) 405-460 et von t'Hove - Sur certaines représentations unitaires d'un groupe infini de transformations ; Proc Roy Acad. Sci. Belg 26 (1951) fasc. 6 pp. 1-102, articles qui traitent de l'obstruction à la quantification. (Rappelons que von Neumann a attiré l'attention sur les problèmes que pose cette flèche).

La flèche horizontale du bas est la flèche de von Neumann, sa "correspondance bi-univoque" respectant les relations formelles énoncées dans (L) et (F).

Il est manifeste que sur ce schéma,  $R$ , grandeur quantique, n'est pas définie comme une fonction. Ce serait une fonction qui n'aurait pas de domaine bien défini, mais en relation, non définie, avec le domaine des  $\psi$  (l'espace de Hilbert) et qui prendrait des valeurs selon qu'on effectue une mesure ou non, ou "si la lune se cache derrière la cheminée ou non". Bref, dans le texte de von Neumann,  $R$  n'est pas une fonction. Le langage de von Neumann étant évocateur, certains pourraient être amenés à tenter de définir  $R$  comme une fonction, mais alors en précisant la structure formelle des dispositifs de mesure, ou alors, dans un autre contexte, comme Kochen et Specker, en posant le problème des variables cachées (The problem of

Hidden Variables in Quantum Mechanics, Journal of Mathematics and Physics, Vol 17, n°1, 1967, p. 59).

Pour ne pas surcharger l'exposé, nous reportons à une étude ultérieure le "calcul des opérateurs de projections", qui est censé refléter les propriétés de systèmes. La même grille d'analyse s'applique bien sûr à ce texte (p. 171-175). Remarquons seulement que le texte suivant, ...

*«Nous pouvons faire correspondre à chaque propriété  $E$  une grandeur que nous définirons de la manière suivante : toute observation qui nous apprend que  $E$  existe ou n'existe pas constitue une mesure de cette grandeur ; le résultat de cette mesure sera égal à 1 lorsque la propriété existe et à 0 dans le cas contraire.»*

... est de nature analogue à celui-ci qui définit une fonction  $f$  par :

*« $f$  prend la valeur 1 si le (grand) théorème de Fermat est vrai et la valeur 0 si ce théorème est faux»*

... ce qui est un bel exemple de verbalisme mathématique.

Nous en arrivons maintenant au chapitre IV, chapitre auquel von Neumann a repoussé l'analyse de la correspondance bijective entre "grandeurs physiques" et opérateurs.

Or, que trouvons-nous dans ce chapitre ? D'abord, à la page 205, la définition de  $f(R)$  "utilisée" à maintes reprises.

*«Soit  $R$  une grandeur et  $f(\lambda)$  une fonction quelconque : le résultat de la mesure de  $f(R)$  est  $f(a)$  où  $a$  est la valeur fournie par la mesure de  $R$ »*

Cette définition est précédée de quelques considérations générales dans le "langage évocateur" de von Neumann :

*«Oublions pour un instant la mécanique quantique et prenons comme base de départ les considérations suivantes. Supposons qu'on donne un système  $\mathcal{S}$ . Pour un expérimentateur cela signifie qu'on indique quelles sont les grandeurs effectivement mesurables du système et quelles sont les relations fonctionnelles réciproques ; on définit en fait une "grandeur" en indiquant par quelle méthode on la mesure et de quelle façon il faut lire ou calculer sa valeur à partir par exemple de la position d'un index sur une échelle.»*

Une évocation n'est pas un processus constituant d'une théorie expérimentale.

A la même page, nous trouvons aussi la définition de "deux grandeurs  $R$  et  $S$  sont simultanément mesurables" (citation faite p.18).

Puis, à la page suivante (p. 206) se trouve la définition de la grandeur  $f(\underline{R}, \underline{S})$  ( $\underline{R}$  et  $\underline{S}$  étant simultanément mesurables) qui englobe le cas  $\underline{R} + \underline{S}$  (dans les mêmes conditions).

Le seul fait important dans ce § 1 du chapitre IV (quant à la correspondance  $\underline{R} \rightarrow R$ ) est la définition (p. 213) de la grandeur  $\underline{R} + \underline{S}$  dans le cas où  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$  ne sont pas simultanément mesurables (cf. p. ---). Nous discuterons cette définition au n°4.

Le § 2 du chapitre IV commence de cette façon (p. 216) :

*«Nous savons (cf. par exemple la discussion du Ch. III § 5) qu'aux diverses grandeurs physiques attachées à un système quantique, on peut faire correspondre univoquement des opérateurs hermitiques hypermaximaux et il y a tout lieu d'admettre que cette correspondance est en fait bi-univoque, c'est à dire qu'effectivement à chaque opérateur hypermaximal correspond une grandeur physique (au Ch. III §3 nous nous sommes déjà servis de cette propriété). Cette correspondance est régie par les lois suivantes (cf. (F), (L), Ch. III §5 ainsi que la fin du Ch. IV §1) :*

*I. Si  $R$  est l'opérateur de la grandeur  $\underline{R}$ , l'opérateur de  $f(R)$  ... etc ;*

*II. Si  $R, S, \dots$ , sont les opérateurs des grandeurs  $\underline{R}$  et  $\underline{S} \dots$ , l'opérateur de  $\underline{R} + \underline{S} \dots$  sera  $R + S \dots$  (on ne suppose pas que les grandeurs considérées soient simultanément mesurables) (cf. ce qui a été dit plus haut).»*

Il est clair que von Neumann renvoie du Chapitre III au Chapitre IV et que du Chapitre IV il renvoie au Chapitre III. On peut donc dire que von Neumann n'est pas d'une très grande rigueur dans sa rédaction. Mais en fait cette hésitation traduit une absence de rigueur plus profonde.

Rappelons que nous reviendrons plus bas sur la définition de  $\underline{R} + \underline{S}$  dans le cas général. Passons maintenant au théorème de complétude.

#### 4 - La question des variables cachées.

1)

Cette question est abordée au chapitre IV qui s'intitule : "Développement axiomatique de la théorie". En fait, von Neumann se propose dans ce chapitre de redémontrer la formule fondamentale  $\text{Esp}(\underline{R}, \phi) = (R\phi, \phi)$  "à partir de certaines hypothèses qualitatives très générales" (p. 204). von Neumann aborde dans ce chapitre l'étude "statistique" de la théorie, les chapitres précédents ayant un caractère plutôt probabiliste traitant du microsystème individuel.

Le problème des variables cachées s'exprime en effet dans la considération d'ensembles statistiques de systèmes  $\mathcal{S}$  identiques, appelés "collectifs" par von Neumann.

Si  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$  est un tel collectif de systèmes  $\mathcal{S}$  dans l'état quantique  $\phi$  en général, une grandeur  $R$  a une dispersion non nulle. La problématique des variables cachées consiste à vouloir déterminer davantage  $\phi$  par des paramètres cachés, ce qui, du point de vue du collectif  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ , revient à partitionner celui-ci en sous-collectifs dont chacun serait sans dispersion (pour toute grandeur  $R$ ).

On pourra lire le raisonnement heuristique de von Neumann sur l'impossibilité d'une telle partition dans les pages 208-210. Mais von Neumann ne se contente pas de ce raisonnement, qui est dû à une conscience aigüe de la non-commutativité des opérations de mesure, mais prétend donner une preuve de l'impossibilité de variables cachées.

Nous allons donc analyser cette preuve.

2)

La preuve de von Neumann est, comme nous l'avons signalé, fondamentalement basée sur la correspondance bi-univoque entre "grandeurs physiques" et opérateurs et quelques considérations d'ordre général, ce qui a permis à von Neumann d'écrire à la page 222, en conclusion de ses raisonnements :

*«Remarquons que nous n'avons même pas été obligés d'analyser plus en détail le mécanisme même des "paramètres cachés", la question ne se posant pas.»*

Après notre analyse du texte de von Neumann, nous pourrions répondre à celui-ci que "le théorème de von Neumann ne résout pas la question des variables cachées, celle-ci n'ayant même pas été posée".

Contrairement à von Neumann, Kochen et Specker posent explicitement le problème des variables cachées et arrivent à déduire une contradiction algébrique entre une théorie à variables cachées et la mécanique quantique. De même, J.S.Bell en construisant explicitement une théorie à variables cachées pour le spin en dimension deux c'est à dire en considérant explicitement des états non quantiques, (J. S. Bell, On the Problem of hidden Variables in Quantum Mechanics (1966) Reviews of modern physics, 38,p. 447), montre que la relation  $\text{Esp}(R+S) = \text{Esp } R + \text{Esp } S$  est fautive en général (on pourra trouver un modèle amélioré dans F.Selleri, Le grand débat de la théorie quantique, Flammarion 1986).

von Neumann postule cette relation, que  $R$  et  $S$  commutent ou non (nous y reviendrons dans un instant). Le théorème de Gleason montre que la non-commutativité est non pertinente. Des doutes sur cette égalité avaient déjà été exprimés par Gr. Hermann (cf Jammer, The Philosophy of quantum mechanics).

De Broglie est un des premiers à avoir critiqué la démonstration de von Neumann. On reviendra sur les raisons de De Broglie au paragraphe 4, consacré à la mesure.

Revenons donc au texte. Le fait que le "théorème de von Neumann" a résisté longtemps tient aux considérations "qualitatives très générales" que von Neumann développe au paragraphe 1 du chapitre IV. Ces considérations sont relatives à la statistique de collectifs pour des systèmes quantiques ou non, c'est à dire que ces considérations ne présupposent pas que le système admet une description quantique ou non et ne présupposent donc (apparemment) rien quant aux "états physiques".

Contrairement au premier résultat, relatif aux grandeurs compatibles, où von Neumann ne considère a priori que des états quantiques formels  $\phi$  le deuxième résultat sur les variables

cachées est, à première vue, non tributaire d'une telle limitation, ce qui paraît en effet essentiel pour un résultat de ce type.

Les considérations très générales auxquelles nous avons fait allusion consistent à caractériser un collectif donné par une fonction *Esp* qui prend une valeur *Esp R* pour chaque grandeur *R* ("l'espérance mathématique du collectif pour la grandeur *R*"), fonction qui vérifie quelques propriétés simples, et réciproquement une telle fonction est supposée caractériser un collectif.

Voici les propriétés vérifiées par "*Esp*" : (p. 212)

*«Il est évident que toute fonction qui représente l'espérance mathématique d'une grandeur *R* attachée à un collectif doit jouir des propriétés suivantes :*

*A - On doit avoir  $Esp\ R = 1$  lorsque *R* est identiquement égal à 1, c'est à dire lorsque que la "méthode de mesure" est la suivante : "ne rien mesurer puisque cela est inutile, *R* ayant constamment la valeur 1"*

*B - On a toujours  $Esp\ (aR) = a\ Esp\ (R)$ , quelque soit *R*, *a* étant un nombre réel.*

*C - On a  $Esp\ R \geq 0$  chaque fois que la grandeur *R* reste constamment, par sa nature même, non négative, par exemple, lorsqu'elle est égale au carré d'une autre grandeur *S*.*

*D - On a  $Esp\ (R + S + \dots) = Esp\ R + Esp\ S + \dots$  lorsque les grandeurs *R*, *S*, ... sont simultanément mesurables. Pour des grandeurs non simultanément mesurables,  $R + S + \dots$  n'a pas de signification (voir ce qui a été dit plus haut.)»*

Mais justement, la signification de  $R + S$  dans le cas général est précisée à la page suivante :

*«E - A partir d'un certain nombre de grandeurs *R* et *S*, ..., nous définirons une autre  $R + S$  indépendante du choix de la fonction *Esp* (*R*) par la condition  $Esp\ (R + S) = Esp\ R + Esp\ S$ . Si *R* et *S* sont simultanément mesurables,  $R + S + \dots$  sera la somme en vertu de *D*. En général cette grandeur ne sera définie qu'implicitement par la condition *E*, et il nous sera impossible de déduire, à partir des procédés de mesure qui définissent *R* et *S*, une méthode de mesure de  $R + S + \dots$ »*

Comme exemple, von Neumann, dans sa note 164 cite le cas suivant :

*«Par exemple, dans la théorie de Heisenberg d'un électron se mouvant dans un champ de potentiel  $v(x, y, z)$ , l'opérateur d'énergie*

$$H_0 = ((p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2) / 2m + V(Q^x, Q^y, Q^z)$$

est une somme de deux opérateurs non commutables.

$$R = ((p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2) / 2m \text{ et } S = V(Q^x, Q^y, Q^z).$$

La mesure de la grandeur  $R$  correspondant à  $R$  est une mesure de quantité de mouvement, celle de la grandeur  $S$  correspondant à  $S$  est une mesure de coordonnées. Cependant la grandeur  $R + S$  qui correspond à  $H_0 = R + S$  se mesure d'une toute autre façon que les précédentes ; par exemple en évaluant la fréquence des raies spectrales émises par cet électron (lié) ; en effet, en vertu de la relation fondamentale de Bohr, ces fréquences fixent les niveaux d'énergie, c'est à dire les valeurs de  $R + S$ . Malgré cela on a en toutes circonstances  $\text{Esp } (R + S) = \text{Esp } R + \text{Esp } S.$ »

Plusieurs remarques. Les trois grandeurs  $H$ ,  $R$  et  $S$  se mesurent expérimentalement en mesurant des positions, les dispositifs étant à chaque fois différents, les valeurs des grandeurs s'en déduisant à l'aide de relations théoriques (comme par exemple la relation de Bohr).

von Neumann n'en tient absolument pas compte dans ses analyses. Son texte est très sommaire, si ce n'est vide, au sujet de la théorie expérimentale de la mesure, de sa structure. Ensuite, l'exemple est mal choisi, dans le sens que la grandeur énergie est déjà définie, alors que dans l'énoncé (E), à partir de deux grandeurs  $R$  et  $S$  est définie implicitement une nouvelle grandeur  $R + S$ . Dans l'exemple choisi, la grandeur "énergie" est définie dans le champ expérimental à travers des dispositifs de mesure et des relations théoriques. On ne voit pas très bien comment on peut définir une grandeur expérimentale (et donc sa mesure), à l'aide d'une relation implicite dont les termes, comme le fait remarquer von Neumann, ne permettent pas de définir un procédé de mesure de la grandeur "définie". Il est à remarquer aussi que dans la note 164, von Neumann écrit d'abord la relation  $H_0 = R + S$ , et ensuite la relation  $\underline{H_0} = \underline{R} + \underline{S}$ . Il faut noter aussi que von Neumann relève lui-même ce qui l'a amené à poser la condition générale (E). Ainsi, l'énoncé de (E) est précédé du texte suivant (p. 213) :

«Cependant, en mécanique quantique on peut concevoir l'existence d'une opération mathématique distincte des précédentes et couvrant un domaine de possibilités plus étendu, à savoir la suivante : l'addition de deux grandeurs quelconques qui ne sont pas nécessairement mesurables en même temps. La possibilité de définir une pareille opération tient au fait que la somme  $R + S$  de deux opérateurs hermitiques est encore un opérateur hermitique même si  $R$  et  $S$  ne sont pas commutables, tandis que il n'en est pas ainsi pour la produit  $RS$  ; en effet,  $RS$  n'est hermitique que si  $R$  et  $S$  commutent et seulement dans ce cas (cf. Ch.II, §5). Les espérances mathématiques s'ajoutent pour chaque état (Cf. E2, Ch.III, §1)

$$(R\phi, \phi) + (S\phi, \phi) = ((R + S)\phi, \phi)$$

égalité qui est vraie quel que soit le nombre de termes. Nous utiliserons ce fait en énonçant la condition générale suivante E dont nous ne limiterons pas pour l'instant l'application à la mécanique quantique.»

Toutes ces remarques montrent clairement que le point de départ de von Neumann est le domaine formel, le calcul des opérateurs, le domaine physique expérimental de la mesure, le calcul des grandeurs étant lui défini entièrement à partir de celui-ci.

Encore deux remarques de détail : la condition E de la page 213 (Ch.IV) est parfaitement homogène, contrairement à la relation E de la page 141 (Ch.III), comme nous l'avons remarqué. Cette fois-ci, von Neumann ne présuppose rien quant à "l'état physique", ce qui cadre bien avec ses intentions.

La fonction "Esp" caractérise un collectif et la grandeur  $\underline{R} + \underline{S}$  est définie implicitement, le "indépendant du choix de la fonction Esp( $\underline{R}$ )" voulant dire que la grandeur " $\mathcal{T} = -\underline{R} + \underline{S}$ " définie est telle que  $\text{Esp}(\mathcal{T}) = \text{Esp}(\underline{R}) + \text{Esp}(\underline{S})$  quelle que soit la fonction Esp, c'est à dire quel que soit le collectif considéré. Cela revient à postuler implicitement que deux grandeurs  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$  sont égales si et seulement si

$$(e) \quad \text{Esp } \underline{R} = \text{Esp } \underline{S} \text{ pour toute Esp.}$$

von Neumann en déduit comme cas particulier que " $\mathcal{T} = -\underline{R} + \underline{S}$ " est égale à la somme  $\underline{R} + \underline{S}$  si  $\underline{R}$  et  $\underline{S}$  sont simultanément mesurables (à cause de la condition D).

3)

Dans le §1 du chapitre IV se trouve les deux définitions qui interviennent dans la démonstration du théorème de complétude, à savoir :

- un collectif a une dispersion nulle lorsque  $\text{Esp}(\underline{R}^2) = (\text{Esp}(\underline{R}))^2$  pour toute grandeur  $\underline{R}$ .
- Un collectif caractérisé par le fonction Esp est pur si la condition
 
$$\text{Esp}(\underline{R}) = \alpha \text{Esp}'(\underline{R}) + \beta \text{Esp}''(\underline{R}) \quad (\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1)$$
 entraîne  $\text{Esp}(\underline{R}) \equiv \text{Esp}'(\underline{R}) \equiv \text{Esp}''(\underline{R})$ .

C'est au §2 du chapitre IV que von Neumann établit sa preuve. Elle se fait en deux étapes.

*Première étape.* Il s'agit d'un résultat contenu entièrement dans le champ formel :

Il n'y a pas d'états (mélanges) sans dispersion pour toutes les "grandeurs"  $\underline{R}$ . Les états purs  $\phi$  sont élémentaires : ils ne sont pas décomposables en mélange.

*Deuxième étape.* Tout collectif est décrit par une fonction Esp qui prend une valeur pour chaque grandeur  $\underline{R}$ . A une telle fonction Esp correspond un unique opérateur hermitien positif de trace 1, U, tel que

$$\text{Esp}(\underline{R}) = \text{Tr}(\underline{R}U)$$

où R est l'opérateur correspondant à la grandeur  $\underline{R}$ . L'opérateur U caractérise le collectif ; il ne dépend que de lui (c'est à dire de la fonction Esp) et est indépendant de la grandeur  $\underline{R}$ .

Avant de commenter et d'analyser ces deux étapes, donnons la parole à von Neumann pour montrer comment ces deux points règlent la question des paramètres cachés (p. 221-222) :

«Il y aurait encore à discuter la question des "paramètres cachés" mentionnée au Ch.III, §2. Le problème consiste à trouver si la dispersion des ensembles statistiques purs caractérisés par des fonctions d'onde  $\phi$  (c'est à dire par  $E_2$ ) ne proviennent pas en réalité du fait que ces ensembles purs ne constituent pas les états élémentaires véritables mais bien des mélanges ; - en sorte que pour décrire complètement un état il faudrait se donner en dehors de la fonction d'onde  $\phi$ , d'autres éléments (les "paramètres cachés") lesquels, conjointement à  $\phi$ , détermineraient le tout avec précision, c'est à dire conduiraient à des collectifs dépourvus de dispersion. Le caractère statistique du collectif pur décrit par  $\phi$  seul ( $U = P_\phi, \|\phi\| = 1$ ) apparaîtrait alors comme la moyenne sur tous les états réels qui le composent, en d'autres termes comme la moyenne sur le domaine des valeurs des "paramètres cachés" correspondant à ces états. Or cela est impossible pour deux raisons : premièrement parce que le collectif pur décrit par  $\phi$  pourrait être représenté par le mélange de deux collectifs distincts, ce qui est absurde puisque contraire à la définition même de ce collectif ; et deuxièmement parce que les collectifs à dispersion nulle qui devraient correspondre aux état "réels" (en d'autres termes qui devraient être constitués uniquement par des systèmes dans un seul et même état ("réel") n'existent absolument pas.»

4)

Venons donc à l'analyse des deux moments de la démonstration.

Le premier point est purement mathématique, ce qui fait que nous le laisserons de côté, car il ne présente aucune difficulté et ne soulève guère question. La démonstration de von Neumann de ce point est faite après le deuxième point, et on pourra en trouver une démonstration dans un quelconque manuel de "mécanique quantique".

L'essentiel de l'analyse doit donc se concentrer sur la deuxième étape.

Faisons d'abord une remarque sur l'égalité

$$\text{Esp}(\mathbf{R}) = \text{Tr}(\mathbf{U}\mathbf{R})$$

Dans l'esprit de von Neumann, cette égalité lie deux domaines différents : à gauche le domaine expérimental des grandeurs et à droite le domaine formel. C'est justement en cette égalité entre ces deux domaines différents que consiste le théorème de complétude de von Neumann. La signification fondamentale du deuxième point est, selon von Neumann, la suivante :

Quel que soit le collectif que vous considérez, que vous imaginez, que vous auriez pu imaginer, que vous n'imaginez pas (encore), il peut être représenté par un opérateur hermitien positif de trace 1,  $\mathbf{U}$ , c'est-à-dire, rien n'échappe au système formel défini par l'espace de Hilbert décrivant le système en question.

Mais comment von Neumann s'y prend-il pour établir ce résultat ?

Voici sa démonstration :

Soit  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  un système orthogonal, normal et complet. Considérons au lieu de l'opérateur  $R$  la matrice  $a_{\mu\nu} = (R\varphi_\mu, \varphi_\nu)$ . Formons encore les opérateurs dont les matrices ont comme éléments

$$e_{\mu\nu}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \mu = \nu = n \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$f_{\mu\nu}^{(mn)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \mu = m, \nu = n \\ 1 & \text{pour } \mu = n, \nu = m \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \quad g_{\mu\nu}^{(mn)} = \begin{cases} i & \text{pour } \mu = m, \nu = n \\ -i & \text{pour } \mu = n, \nu = m \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ces opérateurs sont d'ailleurs respectivement

$$P_{[\varphi_n]} \quad P \left[ \frac{\varphi_m + \varphi_n}{\sqrt{2}} \right] = P \left[ \frac{\varphi_m - \varphi_n}{\sqrt{2}} \right] \quad \cdot \quad P \left[ \frac{\varphi_m + i\varphi_n}{\sqrt{2}} \right] = P \left[ \frac{\varphi_m - i\varphi_n}{\sqrt{2}} \right]$$

soient  $U^{(n)}, V^{(mn)}, W^{(mn)}$  les grandeurs physiques correspondantes.

On a évidemment en vertu de  $a_{nn} = \bar{a}_{nn}$

$$a_{\mu\nu} = \sum_n a_{nn} e_{\mu\nu}^{(n)} + \sum_{m < n} \operatorname{Re} a_{mn} f_{\mu\nu}^{(mn)} + \sum_{m < n} \operatorname{Im} a_{mn} g_{\mu\nu}^{(mn)}$$

donc, entre grandeurs

$$R = \sum_n a_{nn} U^{(n)} + \sum_{m < n} \operatorname{Re} a_{mn} V^{(mn)} + \sum_{m < n} \operatorname{Im} a_{mn} W^{(mn)}$$

et en vertu de II et de B'

$$\begin{aligned} \operatorname{Esp}(R) &= \sum_n a_{nn} \operatorname{Esp}(U^{(n)}) + \sum_{m < n} \operatorname{Re} a_{mn} \operatorname{Esp}(V^{(mn)}) + \\ &\quad + \sum_{m < n} \operatorname{Im} a_{mn} \operatorname{Esp}(W^{(mn)}). \end{aligned}$$

Donc, si l'on pose

$$\left. \begin{aligned} u_{nn} &= \operatorname{Esp}(U^{(n)}) \\ u_{mn} &= \frac{1}{2} \operatorname{Esp}(V^{(mn)}) + \frac{i}{2} \operatorname{Esp}(W^{(mn)}) \\ u_{nm} &= \frac{1}{2} \operatorname{Esp}(V^{(mn)}) - \frac{i}{2} \operatorname{Esp}(W^{(mn)}) \end{aligned} \right\} m < n$$

on aura

$$\operatorname{Esp}(R) = \sum_{m, n} u_{nm} a_{mn}$$

Or, on a  $u_{nm} = \bar{u}_{mn}$ , ce qui nous permet de définir un opérateur hermitique <sup>(166)</sup>  $U$  au moyen de la relation  $(U \xi_m, \varphi_n) = u_{mn}$ . Le second membre n'est autre que la trace de  $UR$  (voir ch. III, § 11), donc la formule définitive peut s'écrire

$$(Tr) \quad \text{Esp}(R) = \text{Trace}(UR)$$

dans laquelle  $U$  est un opérateur hermitique indépendant de  $R$  <sup>(167)</sup>, donc défini uniquement par l'ensemble statistique considéré

Analysons cette démonstration. La comparaison des lignes 14 et 16 du haut est frappante : la ligne 14 est écrite de façon "indicielle" et la ligne 16 de façon fonctionnelle. Pourquoi cette différence d'écriture ? Y-a-t-il une différence fondamentale entre ces deux lignes ? Il aurait suffi d'appeler  $U^{(n)}$  l'opérateur  $P\phi_n$ ,  $V^{(m,n)}$  le projecteur  $P((\phi_m + \phi_n)/\sqrt{2}) - P((\phi_m - \phi_n)/\sqrt{2})$  et  $w(m,n)$  désignant le troisième, pour que les lignes 14 et 16 prennent *exactement la même forme*. En simplifiant légèrement on peut écrire pour la ligne 14

$$(10) \quad R = A + B + C, \text{ relations entre opérateurs,}$$

et pour la ligne 16

$$(8) \quad \underline{R} = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}, \text{ relations entre grandeurs,}$$

et la structure de la ligne 6 (du bas) est

$$(6) \quad \text{Esp}(\underline{R}) = \text{Esp}(\underline{A}) + \text{Esp}(\underline{B}) + \text{Esp}(\underline{C})$$

Les trois dernières lignes (de la démonstration) définissent  $U$  (indépendamment de  $R$ ) et la formule  $\text{Esp}(R) = \text{Tr}(RU)$  suit immédiatement.

La comparaison des lignes 16 et 14 dévoile clairement ce que fait von Neumann dans le fond :

En supposant défini l'espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$  qui décrit quantiquement le système, les symboles  $R, P\phi, U(n), V(n,m), A, B, C$  etc..., sont définis. Par contre, les symboles  $\underline{R}, \underline{P\phi}, \underline{U(n)}, \underline{V(n,m)}, \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$  ne sont définis que par le fait de correspondre à  $R, P\phi, U(n)$  etc.... Ces symboles n'ont pas de valeur opératoire propre : ils ont formellement inopérants, ils ne sont pas eux-mêmes structurés en un domaine formalisé indépendant. Nous avons déjà souligné ce phénomène à diverses reprises et il est particulièrement flagrant ici. Ce que von Neumann opère ici s'appelle en mathématique un "transport de structure" :

un ensemble  $\mathfrak{O}$  (représentant ici l'ensemble des opérateurs d'un certain type) est défini et structuré (ici par une addition) et mis ensuite en bijection formelle avec un ensemble noté ici  $\mathfrak{G}$  ("les grandeurs"). Par bijection formelle nous voulons signifier que l'ensemble  $\mathfrak{G}$  est en quelque sorte défini par cette bijection même ; il n'a pas d'existence avant l'écriture de cette bijection. L'ensemble  $\mathfrak{G}$  est alors structuré "par transport de structure" :

si  $\alpha \in \mathfrak{G}$  correspond à  $a \in \mathfrak{O}$ , via la bijection,

si  $\beta \in \mathfrak{G}$  correspond à  $b \in \mathfrak{O}$ , via la bijection,

alors on pose par définition :

$\alpha + \beta$  est l'élément de  $\mathfrak{G}$  qui correspond à  $a + b$ , via la bijection.

On pourrait objecter à notre analyse que l'ensemble des grandeurs  $\mathfrak{G}$  existe au même titre que l'ensemble des opérateurs  $\mathfrak{O}$ . Si nous avons analysé dans le détail et de façon exhaustive les propos de von Neumann au sujet de  $\mathfrak{G}$ , c'était pour montrer à quel point ce contenu était maigre

et ne permettait en aucune façon de structurer  $\mathfrak{G}$  de façon indépendante. Le texte de von Neumann ne permet pas cette structuration ; le langage de l'auteur est évocateur, mais rien de plus. Le texte ne peut pas être considéré comme constituant d'une théorie de la mesure des grandeurs physiques.

Pour bien corroborer notre analyse, notons, comme plus haut, "la" bijection de von Neumann entre  $\mathfrak{O}$  et  $\mathfrak{G}$  par  $R \longleftrightarrow \underline{R}$ . A partir de cette bijection on peut en construire une quantité d'autres, qui jouent exactement le même rôle que celle de von Neumann (qui vérifient les mêmes postulats) et qui peuvent donc chacune prétendre à "la" bijection entre grandeurs et opérateurs.

En effet, soit  $T$  un opérateur unitaire quelconque et posons  $\overline{R} = \underline{T R T^{-1}}$

La bijection  $R \longleftrightarrow \overline{R}$  est un candidat tout à fait valable. La transformation  $R \longleftrightarrow T R T^{-1}$  est très courante ; elle ne change pas le spectre et on pourrait être tenté d'engager une discussion visant à introduire une relation d'équivalence identifiant les grandeurs  $\underline{R}$  et  $\underline{T R T^{-1}}$ . Pour couper court à cette discussion, prenons au lieu de  $T$  unitaire un opérateur  $T$  inversible quelconque et construisons la correspondance biunivoque  $R \longleftrightarrow \overline{R}$  où  $\overline{R} = \underline{T R T^*}$  (\* conjugué hermitique)

De nouveau nous avons un candidat pour "la" correspondance biunivoque de von Neumann. Mais cette fois ci, les spectres peuvent être changés et si  $\overline{R}$  est "la" grandeur qui correspond à l'opérateur  $R$  il n'y a plus aucune relation entre l'ensemble des valeurs de la grandeur  $\overline{R}$  et le spectre de l'opérateur  $R$  correspondant. Si la bijection  $R \longleftrightarrow \underline{R}$  est remplacée par la bijection  $R \longleftrightarrow \overline{R}$ , il faut bien sûr remplacer la fonction  $\text{Esp } \underline{R}$  par

$$\text{Esp}(\overline{R}) = \text{Esp}(\underline{T R T^*}).$$

La nouvelle fonction  $\text{Esp}$  vérifie alors les mêmes propriétés formelles que l'ancienne fonction  $\text{Esp}$  et la démonstration de von Neumann se déroule aussi bien avec la bijection  $R \longleftrightarrow \overline{R}$  et la fonction  $\text{Esp}$  qu'avec la bijection  $R \longleftrightarrow \underline{R}$  et la fonction  $\text{Esp}$ . C'est l'évocation des valeurs prises par "la grandeur physique"  $\underline{R}$  qui pousse le lecteur à accepter la relation  $\text{Esp}(\underline{R} + \underline{S}) = \text{Esp } \underline{R} + \text{Esp } \underline{S}$  comme étant une relation absolument générale liant domaine expérimental et domaine formel. (Nous avons remarqué au début de ce paragraphe qu'une structuration (partielle) de l'ensemble des grandeurs et états physiques permet de dévoiler la fausseté de cette relation interprétée comme établissant un lien entre le domaine expérimental et le domaine formel). Si on se refuse à faire un tel lien, il reste néanmoins quelque chose de la démonstration de von Neumann (quant à la deuxième étape). En effet, on peut dire que dans ces pages de von Neumann se trouve le départ de ce qu'on appelle maintenant l'approche algébrique de la mécanique quantique. Cette approche consiste à partir avec une algèbre d'opérateur  $\mathfrak{O}$ , de définir, en gros, un état comme fonctionnelle linéaire  $E$  sur  $\mathfrak{O}$ . La démonstration de von Neumann montre alors qu'à un tel état correspond, de façon unique, en rajoutant une condition de finitude, un opérateur de type  $U$  défini sur un espace de Hilbert  $\mathfrak{H}$ .

Revenons maintenant à la deuxième démonstration du théorème de compatibilité, dont nous avons laissé l'analyse en suspens. Il est parfaitement clair, d'après ce qui a été dit, que cette démonstration ne peut prétendre établir le résultat convoité. Par contre le texte de cette démonstration (pp. 155-156) a un contenu. Il établit en fait le résultat suivant :

Il n'y a pas d'application injective  $\gamma$  de l'ensemble des opérateurs  $\mathfrak{O}$  hermitiens dans une algèbre commutative  $\mathfrak{A}$  vérifiant les relations suivantes :

(i)  $\gamma(F(R)) = F(\gamma(R))$  où  $F$  est un polynôme ;

$$(ii). \gamma(R + S) = \gamma(R) + \gamma(S)$$

Il suffit de lire les relations dans le texte de von Neumann dans le sens  $R \rightarrow \underline{R}$ , c'est à dire en à partir du donné  $R$ , en posant  $\underline{R} = \gamma(R)$ .

Dans un premier temps on établit donc qu'à  $(R.S + S.R)/2$  correspond via  $\gamma$ , l'élément  $\underline{R.S}$  de  $\mathcal{Q}$ .

A  $(F(R).G(S) + G(S).F(R))/2$  correspond  $F(\underline{R}).G(\underline{S})$ , élément de  $\mathcal{Q}$ .

Dans un deuxième temps, si  $E$  (resp.  $F$ ) sont des décompositions de l'unité associées à  $R$  (resp.  $S$ ), on a  $E = F(R)$ ,  $G(S) = F$  (on supprime les indices à  $E$  et  $F$ ).

D'après le premier temps, à  $(E.F + F.E)/2$  correspond  $\underline{E.F} = F(\underline{R}).G(\underline{S})$  et ensuite, à  $\{E.(EF+FE)/2 + (EF+FE)/2.E\}/2$  correspond  $F(\underline{R}).[F(\underline{R})G(\underline{S})]$ .

Or la relation  $E^2 = E$  c.à.d.  $(F(R))^2 = F(R)$  donne  $F(\underline{R}) = (F(\underline{R}))^2$ , c'est à dire  $F(\underline{R}).G(\underline{S}) = F(\underline{R}).[F(\underline{R}).G(\underline{S})]$ .

On en déduit  $(E.F + F.E)/2 = \{E.(EF+FE)/2 + (EF+FE)/2.E\}/2$  l'application étant injective, et ensuite, comme dans le texte,  $E.F = F.E$  et  $R.S = S.R$ . Ce qui est une contradiction,  $\mathcal{Q}$  n'étant pas commutative.

Ce résultat n'est pas insignifiant et peut éventuellement apporter une contradiction entre la mécanique quantique et une théorie à variables cachées (Cf. un résultat de ce type chez Kochen et Specker). Mais "en face" de  $\mathcal{Q}$  il faut quelque chose,  $\mathcal{Q}$ ! Dans le texte de von Neumann tel n'est pas le cas.

Nous pouvons maintenant résumer la structure de l'erreur de von Neumann. Comme nous l'avons dit au début, von Neumann se situe dans un contexte de mathématiques ensemblistes idéalistes et formalistes. Les idéalités mathématiques sont supposées exister mais elles sont du moins formellement définies. Une phrase verbale ne définit pas sans précaution une idéalité mathématique. Les paradoxes du début du siècle en sont témoin. Or, si les idéalités mathématiques d'espace de Hilbert, d'opérateur hermitien ont un sens dans le contexte mathématique ensembliste, les idéalités de "grandeurs physiques" n'en ont aucun, von Neumann raisonne quasiment dans un vide formel, vide non immédiatement apparent car voilé par le transport de structure sous-jacent. von Neumann fait là preuve d'une absence de rigueur étonnante.

On n'oserait pas soupçonner von Neumann de ne pas avoir compris les fondements des mathématiques de l'époque. Mais les faits sont là : ce que von Neumann reproche à Dirac : «de ne satisfaire aucunement aux exigences de la rigueur mathématique, même lorsqu'on réduit ces exigences aux minimum habituel requis en physique théorique» (p.2), von Neumann le fait à un degrés bien supérieur, à notre avis, car il tombe dans le pire des verbalismes. Dirac qui a un esprit ouvert et créateur énonce la contradiction de la fonction  $\delta$  comme une dissonance stridente et révolutionnaire, dissonance qui a trouvé sa résolution dans un accord parfait d'un champ formel nouveau avec un champ dépassé. Rien de tel chez von Neumann qui, recroquevillé sur son formalisme pense pouvoir démontrer quasiment à l'intérieur de ce formalisme un théorème de complétude. Il pensait pouvoir s'en sortir grâce à sa correspondance bijective, (correspondance arrangée dans le sens bijectif en ne considérant que des opérateurs hypermaximaux un opérateur non maximal ayant une infinité d'extensions maximales (Cf.p.119, Ch.II)).

Tant d'entorses à la rigueur scientifique ne peuvent s'expliquer que par des raisons extérieures, idéologiques. En effet, la question des variables cachées apparaît ainsi sous sa forme idéologique (Cf. le livre de Selleri déjà cité).

Nous continuerons notre analyse de la rigueur chez von Neumann au §3, en étudiant la théorie de la mesure. Il ne s'agit pas ici de la théorie de la mesure expérimentale dont nous avons constaté l'absence quasi totale dans le texte, mais de la théorie de la mesure quantique avec le sens qu'on donne habituellement à cette expression.

### § 3 LA RIGUEUR EN THEORIE DE LA MESURE QUANTIQUE

Dans les paragraphes précédents, nous avons relevé certaines idées de von Neumann quant à la mesure quantique. Dans les énoncés (W) (p.139), on trouve des expressions floues : "la probabilité pour que ..... prennent respectivement des valeurs .....". Ou bien (p.138) : "la probabilité pour que le système se trouve .....". Et encore (p.143) : "malgré cela il nous est impossible de prévoir la valeur exacte que prend une grandeur dans cet état". Ailleurs, dans l'exposé de l'expérience de Compton-Simons (p.148) : "Effectuons cette mesure M : de ce seul fait, le système passe dans un autre état". Ceci, ajouté au fait déjà souligné que von Neumann attache un  $\psi$  à un système, peut faire croire que chez von Neumann, l'acte de mesure (l'appareil de mesure) est responsable de la réduction. (il s'agit bien ici de l'appareil de mesure, car une ligne plus loin : "le nouvel état ne dépend pas d'ailleurs uniquement du dispositif de mesure M mais aussi du résultat de la première mesure". La lettre "M" est utilisée aussi bien pour l'acte de mesure que pour le dispositif de mesure).

Mais dans le chapitre consacré spécialement au processus de mesure on lit : (p.287)

*«Il nous faut tout d'abord mettre en évidence un caractère essentiel de la notion de "mesure" au sujet duquel, indépendamment de toute autre chose, il ne saurait y avoir aucun doute. La mesure elle-même, c'est à dire le phénomène de perception subjective qui lui est associé, constitue une entité nouvelle, distincte de l'univers physique qui entoure l'observateur, et qui ne peut s'y ramener.»*

Le moins qu'on puisse dire, c'est que les conceptions de von Neumann sont floues et fluctuantes.

Nous ne ferons pas, dans ce paragraphe, une étude exhaustive des conceptions de von Neumann sur la mesure quantique. Nous nous limiterons dans notre étude à ce qui nous paraît essentiel à notre propos sur la rigueur chez von Neumann pour corroborer notre thèse à ce sujet. Une étude plus détaillée sera faite ultérieurement.

Ce sont les chapitres V et VI qui contiennent les élaborations de von Neumann sur la mesure quantique. Voici le contenu de ces chapitres :

Chapitre V :      CONSIDERATIONS GENERALES

§ 1 - Mesure et réversibilité

§ 2 - Considérations thermodynamiques

§ 3 - Problèmes de réversibilité et d'équilibre

§ 4 - Les mesures macroscopiques

## Chapitre VI : LE PROCESSUS DE MESURE

§ 1 - Enoncé du problème

§ 2 - Systèmes composés

§ 3 - Analyse du processus de mesure des grandeurs physiques

Pour démêler les élaborations de von Neumann, il est important, d'après notre étude, de bien séparer les parties ayant un "contenu formel" mathématique des parties interprétatives ayant un contenu physique. Cette façon de procéder fera nettement apparaître le caractère idéologique de la conception de von Neumann.

Ainsi faut-il regrouper ensemble le début de Chapitre V, §1, et le Chapitre VI, §2. Il faut ajouter à ceci la page 300 du Chapitre VI, §3, où est établie l'impossibilité de décrire (mathématiquement) le processus de type (1), c'est à dire "la réduction" appliquée au système  $S$  en considérant une "interaction" (opérateur hamiltonien) entre  $S$  et  $M$ , l'appareil de mesure,  $M$  étant supposé être dans un mélange, ainsi que la considération de la fonction  $S(U) = -k\text{Tr}\text{Log}U$  (entropie) des §3 et §4 du Chapitre V qui permet d'établir l'irréversibilité du processus de type (1) : ce processus ne peut être "remonté" à l'aide d'une suite de processus de ce type ou de processus de type (2), c'est à dire, suivant l'équation causale de Schrödinger.

Cet ensemble constitue la partie formelle du texte. S'y trouvent rassemblés les "faits expérimentaux mathématiques".

La deuxième partie est constituée par le contenu physique des deux chapitres. Nous la limiterons à la fin du chapitre V, §1 et les §1 et §3 du chapitre VI.

De cette partie, on peut encore extraire une formulation au niveau formel, mathématique, du concept de "mesure quantique idéale", qui consiste à corréler biunivoquement des états orthogonaux de  $S$  à des états orthogonaux de  $M$ . Cette formulation étant bien connue depuis E.P.R. (et von Neumann), nous ne la rappellerons pas.

D'après notre analyse générale, c'est toujours la partie formelle qui est primordiale chez von Neumann. C'est ainsi que, d'après nous, sa théorie de la mesure quantique a dû être inspirée par les propriétés mathématiques du produit tensoriel à l'étude duquel il est amené en remarquant que le processus de type (1) est nécessaire et que

*«la raison de cette nécessité est la suivante : lorsque nous étudions l'effet d'une mesure sur un système  $S$  il ne nous est pas possible de considérer le système  $S$  isolé ; pour pouvoir évaluer numériquement son interaction avec le système de mesure  $M$ , il faut étudier le système complet  $S + M$ »*  
(p.242)

L'étude du produit tensoriel, en utilisant le concept de mesure idéale, montre alors qu'il est équivalent d'appliquer les processus (1) et (2) à  $S_1$  ou seulement le processus (2) à  $S_1 \cup S_2$ , et par récurrence (1) et (2) à  $S_1 \cup \dots \cup S_n$  ou uniquement (2) à  $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S_{n+1}$ , la "séparation" pouvant d'ailleurs se placer à n'importe quel endroit.

Mais que fait von Neumann de ce contenu formel ? Le produit tensoriel et le concept de mesure idéale comportent malheureusement un avatar formel, à savoir le processus (2) appliqué à  $S_1 \cup S_2$  aboutit à une superposition linéaire et non à un mélange. Il faut donc l'intervention d'un troisième système etc... Ce qui amorce la régression à l'infini et pousse von Neumann aux assertions suivantes :

*«Il est d'ailleurs indifférent d'englober ou non l'observateur lui-même dans le système M et remplacer la relation entre les états de S et la position de certaines aiguilles dans M par la relation entre les états de S et les réactions chimiques qui ont lieu dans l'oeil de l'observateur ou même dans son cerveau (c'est à dire entre ces états et ce que l'observateur "a vu" ou "a perçu" au moment de l'observation). (Nous examinerons ce point plus en détail au Chapitre VI, §1)» (p.242, Ch.V, §1)*

Justement, au chapitre VI, §1, p.287, se trouve la citation faite à la page 33. von Neumann continue ainsi :

*«Dans ces conditions, pour que nous puissions malgré tout aboutir, en partant de nos mesures, à une image, à une conception scientifique de l'univers qui nous entoure, nous sommes bien obligés d'admettre la validité d'un principe fondamental qu'on appelle le principe du parallélisme psychophysique. Celui-ci postule qu'il est possible de décrire le phénomène de l'aperception, malgré son caractère subjectif, comme s'il avait lieu dans l'univers physique proprement dit ; en d'autres termes qu'il est possible de lui faire correspondre des phénomènes proprement physiques ayant lieu dans l'univers objectif, dans l'espace ordinaire. (Naturellement, cette correspondance nous oblige toujours à localiser ces phénomènes physiques en des points de l'espace qu'occupent déjà certaines parties de notre corps ; cela ne les empêche pas moins d'appartenir à l'univers objectif environnant).»*

Suit un exemple où la grandeur mesurée est la température sur un système S à l'aide d'une chaîne S --- thermomètre --- colonne de mercure ---- rétine de l'oeil --- cerveau (chimique).

*«Le principe du parallélisme psycho-physique, dans son essence même, exige que cette frontière puisse être tracée aussi loin que l'on voudra dans le corps de l'observateur réel.» (p.288)*

Nous assistons dans ces lignes à une chaîne d'entorses à la rigueur scientifique :

Au niveau 1 - On traite quantiquement un système  $S$ . Ceci signifie que, dans un certain contexte physique, on associe un certain espace de Hilbert au système  $S$  et on applique les principes de la mécanique quantique dans cette situation. L'espace de Hilbert est obtenu de diverses façons (par exemple, à travers un principe de correspondance, etc...). Ce qui est essentiel c'est que, dans chaque cas, l'espace de Hilbert est défini mathématiquement.

Au niveau 2 - On rajoute au système  $S$  l'appareil de mesure  $M$ , système macroscopique de comportement classique. Le système  $M$  est néanmoins traité quantiquement c'est à dire on lui associe un  $\psi$ . Or, aucun "principe de correspondance", aucune théorie (à moins de la faire) ne permet d'associer un espace de Hilbert défini mathématiquement (au sens même idéaliste de ce terme) à un tel système. Or von Neumann qui n'a pas fait une telle théorie, fait cette opération mentale. Nous sommes ici dans la même situation qu'au §2 : il est peut-être possible de donner un sens mathématique au symbole  $R$ , mais dans le texte il n'en a pas. Peut-être est-il possible d'associer un espace de Hilbert à  $M$  (vue la complexité de  $M$ , il n'est pas évident que "d'une façon ou d'une autre" on puisse attacher un  $\psi$  mathématiquement construit au système  $M$  global qui par ailleurs a un comportement classique).

Mais chez von Neumann ce n'est pas le cas. Récupérer la situation en disant que la partie de  $M$  qui interagit avec  $S$  admet un traitement quantique, ne sauve en rien von Neumann (la recherche d'une solution n'est de toute façon pas évidente, car les théories mathématiques actuelles ne permettent pas de traiter un corps étendu à l'aide de méthodes finies; c'est à dire,  $M$  doit être considéré comme un système infini, et la théorie des représentations montre d'ailleurs que dans ce cas il y a des représentations non équivalentes)

C'est à dire, sans une théorie physique des systèmes tels que  $M$ , associer un  $\psi$  à  $M$  est du pur verbiage. von Neumann tombe de nouveau dans une absence de rigueur fondamentale.

Au niveau 3 - On rajoute une chaîne de systèmes  $M_i$  de plus en plus "petits", c'est à dire on replonge dans le micro-monde où on pourrait parler de  $\psi$ .

Cette régression dans le micro-monde est rendue "possible" à travers le principe du parallélisme psycho-physique. Ce principe paraît des plus douteux du point de vue scientifique. On se passera de le critiquer. von Neumann s'engouffre dans ce principe, qui est de nouveau un principe de "correspondance bijective", !, et induit le lecteur sur un terrain flou, camouflant au passage la distinction entre niveaux non réductibles l'un à l'autre. On assiste à un "observateur observé s'observant..."

Une telle absence de rigueur la plus élémentaire ne peut de nouveau s'expliquer que par une poussée idéologique. Ce qui est historiquement ahurissant, c'est de voir l'influence qu'a eu ce texte sur les mentalités postérieures. Pour ne citer que London-Bauer et Wigner ! Même de Broglie est tombé (momentanément) dans ce travers. Des centaines d'articles font ainsi preuve d'une attitude non scientifique déplorable. Et nous ne sommes pas encore sortis de cette période malgré la théorie des  $C^*$ -algèbres qui permettrait un traitement plus convenable. Le point culminant est à notre avis atteint par la théorie d'Everett où on attache un  $\psi$  à tout l'univers. Nous sortons là totalement du champ de la physique au sens ordinaire du terme, c'est à dire nous sortons du champ formel, outil conceptuel et constituant de la théorie physique pour accéder à un champ fantasmatique entaché de souvenirs de potache.

## CONCLUSION GENERALE

Nous jugeons le texte de von Neumann de façon négative. Comme apport positif nous voyons l'introduction des opérateurs densités et l'ébauche de l'approche algébrique de la mécanique quantique, ainsi que son essai sur les observables macroscopiques, où on peut voir le germe de la théorie des déformations d'algèbres de Lie. L'apport strictement mathématique est minime (la théorie spectrale est due à D.Hilbert). Le label de rigueur ne s'applique qu'à la partie mathématique. Dans la partie qui a un contenu physique, nous pensons avoir démontré que von Neumann fait preuve d'une absence de rigueur caractérisée en tombant dans des principes de correspondance bijective sans contenu formel. Ceci est particulièrement étonnant de la part d'un mathématicien, rompu aux méthodes formelles. Notre conclusion en est que des éléments extérieurs de nature idéologique ont interféré pour orienter l'exposé dans un sens déterminé. Comme éléments idéologiques nous en avons relevé deux :  
le caractère a-causal des processus élémentaires et l'opération de mesure vue comme une opération mentale de l'observateur.

Dans le premier cas, comme dans le deuxième, la "démonstration" de ces deux principes est faite à travers une "correspondance bijective" et c'est dans ces deux "démonstrations" que le texte de von Neumann fait preuve d'une attitude non scientifique. Notre analyse de texte montre une convergence de nos conclusions avec les affirmations de F.Selleri dans le livre déjà cité.

Compilons ici pour terminer quelques passages du livre de Selleri :

*«En bref, notre thèse est que ce qui semble être le contenu arbitraire des théories physiques résulte des pressions sociales et des courants culturels dominants. Il arrive que cette conséquence soit claire et que le choix effectué par le physicien construisant une nouvelle théorie soit conscient, d'autres fois, il arrive que ce choix, inconscient, s'effectue au cours du processus d'induction sous-jacent.*

*Le rôle de la société dans la création d'une nouvelle théorie a été admis implicitement ou explicitement par quelques uns des fondateurs et des opposants de la mécanique quantique*

*Heisenberg écrivait : "la physique moderne n'est qu'une partie, mais une partie très caractéristique, du processus historique général tendant à l'unification et à l'extension de notre monde actuel.»*

«Dans son travail très important sur la théorie quantique, Paul Forman trouve "d'une éclatante évidence que, dans les années qui suivirent la fin de la Première Guerre Mondiale et avant même l'essor d'une mécanique quantique a-causale, sous l'influence de "courants de pensée", de nombreux physiciens allemands, pour des raisons incidemment liées au développement de leur propre discipline, ont pris des distances ou ont répudié explicitement la causalité en physique."

La pression de l'ambiance intellectuelle générale fut si forte que bon nombre de physiciens furent conduits à "ardemment espérer, activement rechercher et volontairement embrasser une mécanique a-causale".

Au cours des sombres années qui suivirent la défaite de l'Allemagne dans la Première Guerre Mondiale, la tendance intellectuelle dominante dans la République de Weimar était "une philosophie de la vie" existentialiste (Lebens-Philosophie) qui s'opposait fortement au rationalisme, en général, et en particulier dans les sciences exactes.

Cette "philosophie de la vie" n'était pas une véritable philosophie élaborée par une école donnée, mais bien plutôt une tendance générale de la culture allemande, qui s'opposait à toute Weltanschauung rationnelle, comme la dialectique ; les systématisations logiques, l'explication causale, les mathématiques, etc... Elle fut promue par des intellectuels, des politiciens et même des hommes de sciences.»

«Certains même s'engagèrent dans la recherche avec les idées anti-causales qu'ils avaient acceptées dans leurs activités socio-politiques, avant même de devenir physiciens. On peut dire que ce fut le cas de Jordan et de Heisenberg. Ce dernier est connu pour avoir été un membre très actif d'un groupe de droite (il a été un "Weisser Ritter") de la Jugendbewegung et là, il dut défendre sa décision de devenir physicien. Ce qu'il fit en faisant valoir que la physique théorique a "débusqué des problèmes qui défiaient toute la base philosophique de la science, la structure de l'espace et du temps et même la validité des lois causales".

Les événements les plus remarquables furent les "conversions" de gens qui, auparavant, avaient cru en la causalité. Une fois encore, laissons P. Forman

*raconter cette histoire : "les conversions quasi-religieuses à l'a-causalité ... devinrent un phénomène courant dans la communauté scientifique allemande, pendant l'été et la fin de 1921. Comme si un grand réveil venait de se produire, un physicien succédait à un autre devant une assemblée académique pour renoncer à la doctrine satanique de la causalité et proclamer l'heureuse nouvelle que les physiciens étaient sur le point de délivrer le monde de sa servitude.»*

Juin 1991

Séminaire EPIPHYMATHS

Jean MERKER

Mathématiques

Faculté des Sciences et Techniques

25030 BESANCON CEDEX