Symétries quantiques
quelques remarques

Introduction

Le cas des symétries quantiques des systèmes à deux niveaux (espace de Hilbert de dimension deux) est intéressant de plusieurs points de vue. C'est le cas du « spin 1/2 » qui est ressenti comme étant de nature non classique, ou typiquement quantique. L'expression : " après un tour de 2π le vecteur d'état change de signe; il faut un double tour pour amener le vecteur d'état dans son état initial", qui donne lieu à beaucoup de spéculations renforce encore cette idée de caractère particulier.
Nous nous proposons de faire quelques remarques qui au contraire vont dans le sens de démystifier le "spin 1/2", et cela nous permettra aussi de faire quelques remarques épistémologiques de caractère général au sujet des diverses interprétations de la mécanique quantique et de leur usage scientifique.
La première remarque à soulever est que le phénomène du "spin 1/2" est lié à la dimension 2. On sait en effet qu'à n'importe quel système de degré deux on peut associer un "spin fictif 1/2", c'est à dire, après paramétrisation on se retrouve avec les observables et vecteurs d'état ayant la forme classique d'un spin 1/2.
Ensuite il faut rappeler que J. Bell a montré que le spin admet une théorie à variables cachées alors qu'il y a de fortes présomptions que ce n'est pas le cas pour des systèmes de degré plus élevé. Ceci accentue le caractère particulier de la dimension deux mais non le caractère quantique de ce cas.
Dans de nombreux textes sur la mécanique quantique on trouve exposée une analogie classique sur le phénomène de "rotation 4π" (cf. par exemple "Quantique" de Lévy-Leblond et F Balibar), mais on en tire rarement la conclusion, non qui s'impose, mais qui est la plus immédiate, à savoir que ce phénomène est lié à la dimension deux et est de "nature classique", et que rien n'oblige à considérer le spin comme une dimension "interne" de la "particule". Cette vision de la structure interne a été largement propagée par la théorie des jauges. Nous y reviendrons.
Nous montrerons, par une analyse du formalisme qu'une certaine confusion des concepts de symétrie est à l'origine du glissement de l'explication du phénomène "4π" par une dimension interne. Nous resterons à un niveau immédiat de compréhension. Une technicité mathématique cache souvent l'essentiel. Du point de vue formel, ce qui se cache derrière les arbres, c'est la théorie des groupes et algèbres de Lie et de leur représentations, avec les concepts de revêtements et relèvements. Mais n'oublions pas qu'un structure mathématique, organisée d'un certain point de vue, a sa propre "sémantique" qui n'a pas de façon obligée un pendant ailleurs (en physique par exemple). Pour un traitement mathématique relativement simple on pourra consulter : Symmetry Theory on a Two-Level Quantum System, J. Carinena et M. Santander, Foundations of Physics, vol 15, n° 8 1985 .

1 - Considérations générales sur le concept de symétrie

a) - différents types de symétries

Distinguons trois types de symétries : les symétries formelles, les symétries propres et les symétries impropres.
Par symétries formelles nous entendons les transformations du système mathématique formel qui respectent la structure mathématique qui est censée "parler" du système physique à l'étude. Les symétries formelles sont donc les automorphismes de cette structure mathématique. Dans l'interprétation du formalisme certaines (ou toutes) symétries formelles prennent un sens physique et peuvent alors être classées comme symétrie propre ou symétrie impropre.
Parmi les symétries propres il y a les symétries liées à l'espace géométrique. Ce sont les symétries sans lesquelles il ne saurait y avoir d'exigence d'objectivité scientifique.
En effet, les résultats d'expérience ne sauraient être objectifs que s'ils ne sont pas liés à l'observateur particulier qui les obtient, c'est à dire, la théorie physique constituante des expériences doit être invariante par le groupe des déplacements et donc de son sous-groupe SO_3
Cette exigence a une connotation positiviste, mais elle peut avoir des conséquences théoriques importantes (cf. la relativité d'Einstein" dans "Le monde quantique" par M. Paty, Ed. Seuil).
Les symétries dues au groupe des déplacements sont appelées propres dans le sens qu'on peut effectivement les réaliser physiquement: le laboratoire "ici" peut être, avec son contenu physique, être transféré "là".
Les symétries propres sont donc les symétries formelles qu'on peut effectivement réaliser. Le groupe de symétries produit par le groupe des déplacements de l'espace géométrique est le "groupe de l'objectivité scientifique". Toute théorie physique doit être invariante par ce groupe : c'est une nécessité épistémologique. En fait, il est également nécessaire de considérer les translations par rapport au temps comme des symétries propres.

b) - symétries impropres

Dans le groupe précédent n'apparaissent ni l'inversion par rapport au temps, ni les réflexions d'espace. Ces symétries ont un statut particulier, car l'inversion par rapport au temps ne saurait être une symétrie propre. Il en est de même de l'inversion par rapport à l'espace. Les symétries qui n'admettent pas de réalisation physique sont appelées impropres. Ainsi un grand nombre de symétries formelles sont impropres. Le renversement du temps et l'inversion d'espace occupent une position intermédiaires (cf. The Physics of Time Reversal, R.Sachs, Univ. of Chicago Press).
En effet, la trajectoire- image (dans un miroir) peut être réalisé physiquement en changeant les conditions initiales, c'est à dire, si on prépare un système dans les conditions initiales correspondant aux images des conditions initiales dans le miroir, on peut considérer que la réflexion est une symétrie physique si la trajectoire effective observée (avec les nouvelles conditions initiales) est la même que celle vue dans le miroir.
De même pour le renversement par rapport au temps : le "miroir" consistant ici dans un film tourné à l'envers. De nouveau, e, changeant les conditions initiales (c'est à dire on prend comme conditions initiales du nouveau système les conditions finales du système de départ, et on parle de symétrie physique, si les phénomènes alors observés sont identiques à ceux du film tourné à l'envers.

Contrairement aux symétries propres, il n'y a pas de nécessité logique que les systèmes physiques se plient à ces deux symétries. Au cas où on découvre un phénomène ne respectant pas cette (ces) symétries, deux attitudes théoriques sont possibles.
Première attitude : on prend acte du fait que les réflexions ne sont pas des symétries.
Deuxième attitude : on maintient le postulat des symétries de réflexion et on cherche à "expliquer" le phénomène observé en supposant que le système n'a pas été complètement spécifié, c'est à dire on cherche des variables cachées qu'on aurait oubliées et dont la non-prise en compte est "responsable" du défaut de symétrie.
Par contre, un tel choix n'existe pas pour les symétries du groupe des déplacements. Un défaut de symétrie observé met devant l'obligation de compléter la théorie par des variables cachées ou d'élaguer la théorie de ses aspects non objectifs (c'est à dire non invariants par le groupe des déplacements).
Une autre alternative peut évidemment se présenter, et s'est déjà présentée, à savoir celle qui consiste à changer de "groupe d'objectivité" : le groupe galiléen a été remplacé par le groupe lorentzien considéré d'abord comme global, puis seulement comme local.

c) - symétries formelles et symétries propres

Il est bien connu qu'il y a deux façons de voir un "changement de repères". Il y a le point de vue passif et le point de vue actif.
1) Point de vue passif.
Dans ce "point de vue", les "objets" ne sont pas eux-mêmes transformés, déplacés. La situation physique est inchangée, c'est seulement la description qui change, qui est relative à un nouveau repère. La symétrie en cause est donc une symétrie formelle admettant un interprétation de symétrie impropre. Cette même symétrie formelle admet aussi une interprétation mélangée à savoir : à chaque repère on peut associer un observateur, et chacun observe de son point de vue une même situation physique, elle inchangée. Il s'agit donc bien d'une symétrie impropre, car dans une symétrie propre, l'ensemble de la situation physique doit être transformée alors qu'ici seulement l'observateur est changé de place.
2) Point de vue actif.
Le repère est inchangé mais la situation physique S_1 est changée en une nouvelle situation S_2 .
En incluant l'observateur dans la situation physique, on voit que cette symétrie formelle admet une interprétation en terme de symétrie propre.
En mécanique classique, ces différents ponts de vue, qu'on inclue l'observateur ou non dans la situation physique, donnent des descriptions équivalentes ou du moins cohérentes entre elles. Ceci tient au fait que l'observé est toujours strictement distingué de l'observateur et que les objets physiques sont toujours nommés dans le formalisme. *Or il n'en est plus de même dans le formalisme de la mécanique quantique.*

2 - Symétries en mécanique quantique : cas de la dimension 2.

a) - présentation classique

Les considérations d'ordre général s'appliquent évidemment à la mécanique quantique, celle-ci devant être une théorie physique donc scientifique et partant objective. C'est à dire cette théorie doit être invariante par le groupe SO_3 en particulier. Un défaut de symétrie par rapport à ce groupe obligerait à une révision de la théorie, à la recherche de variables cachées, d'espaces "internes" etc.

La question qui se pose alors par rapport au spin est la suivante : est-ce que le défaut observé dans le cas du spin dans une rotation "2π" ne justifie-t-il pas (ou n'oblige pas) l'introduction d'un espace supplémentaire, la phase ?
Plaçons-nous dans le cas d'un système de degré deux. Un simple calcul de paramétrisation ramène une matrice hermitienne quelconque (de trace nulle) sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{+i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ensuite, en interprétant les paramètres comme des angles polaires et en introduisant la direction u définie par ces angles on écrit que cette matrice "est" S_u c'est à dire l'observable de spin selon la direction u et on a la formule bien connue

$$S_u = S_x \sin\theta \cos\phi + S_y \sin\theta \sin\phi + S_z \cos\theta$$

qui donne à S_u son caractère vectoriel.
Les vecteurs propres de Su prennent alors évidement la forme bien connue et le vecteur d'état π s'écrit

$$\psi = \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \,|+\rangle_z + \sin(\theta/2)e^{i\phi/2}\,|-\rangle_z$$

Sur cette expression on voit "qu'une rotation d'angle 2π" change le vecteur ψ en $-\psi$ mais que par contre une "rotation d'angle 4π" laisse le vecteur inchangé.
Le paradoxe est alors levé en disant que "-1" n'est qu'un facteur de phase comme un autre et que les deux vecteurs ψ et $-\psi$ sont équivalents, seule la droite passant par ψ ayant une signification physique.
Le paradoxe est alors souvent réintroduit au sujet du phénomène Ahranov-Bohm ; dans ce phénomène on dégage surtout l'aspect "réel" du potentiel vecteur A du champ électromagnétique. Ceci est mis en évidence en réalisant une superposition du type ϕ–ψ, superposition qui est réalisée en faisant traverser un faisceau ψ une région à champ nul, mais avec un potentiel vecteur. C'est à dire on agit <u>physiquement</u> sur ψ. Que cette action physique soit interprétée comme "tournant" le ψ ne change rien au fait qu'une préparation d'une superposition ϕ-ψ n'a rien à voir en toute généralité au problème de symétrie. Le fait de "tourner" ψ tout seul montre d'ailleurs bien qu'il ne peut s'agir ici de symétrie au sens propre, car dans une symétrie au sens propre <u>toute</u> la situation physique doit être tournée.

b)

Considérons donc une situation simple décrite par un seul ψ et faisons "tourner" ce seul ψ. Faire une symétrie propre ne revient pas tout simplement à faire une substitution $\theta \to \theta+2\pi$. En effet quel peut être le sens mathématique de la phrase "faire une rotation $R(2\pi)$ d'angle 2π ?". La transformation $R(2\pi)$ dans l'espace géométrique <u>est</u> la transformation identique. Donc faire une rotation d'angle 2π dans l'espace géométrique consiste à faire passer un objet à partir de sa position initiale, par des positions intermédiaires en le faisant tourner d'un certain angle à la fois de sorte qu'à la fin des opérations un tour complet a été effectué. Une rotation d'angle 2π est donc une certaine courbe tracée dans le groupe SO_3 courbe fermée sur l'élément identité de ce groupe. Faire une rotation d'angle 4π n'est alors pas identique à faire une rotation d'angle 2π car cela revient à parcourir deux fois la courbe précédente. Ces opérations ne peuvent être équivalentes qu'en adoptant un certain point de vue. Si on veut donner un sens mathématique clair à la phrase "faire une rotation d'angle 2π" on tombe naturellement dans le cadre des groupes vus comme une "surface" et dans la théorie des revêtements ou relèvements et le concept d'homotopie. De ce point de vue, chercher le revêtement universel du groupe SO_3 , à savoir SU_2 est parfaitement naturel. Une exposition motivée de tout ce contexte mathématique théorique serait la bienvenue. D'après les remarques précédentes la sémantique propre à cette structure mathématique n'est pas sans rapport avec le contenu physique.

D'après les remarques précédentes, une rotation d'angle 2π est de même nature qu'une rotation quelconque d'angle α, et au lieu d'étudier le problème de "tourner" un ψ dans un cas limite, analysons la question dans un cas ordinaire de rotation d'angle α autour d'un axe u. On sait (cf. un quelconque manuel de mécanique quantique) que l'opérateur de rotation géométrique $R(\alpha)$ produit un opérateur unitaire notée $\mathcal{R}(\alpha)$ dans l'espace de Hilbert:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) - iu_z\sin(\alpha/2) & (-iu_x - u_y)\sin(\alpha/2) \\ (-iu_x + u_y)\sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) + iu_z\sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$$

et on a les deux formules de transformation pour les vecteurs d'états et les observables :

$$\psi \rightarrow R(\alpha).\psi = \psi'$$

$$A \rightarrow R^* A R = A'$$

Ces deux transformations sont pour l'instant des transformations (symétries) formelles, car on n'en a donné aucune interprétation. En effet si l'interprétation d'une rotation géométrique formelle est relativement claire (nous avons vu qu'il y en a plusieurs mais qu'elles n'entraînent pas d'incohérence (les rotations géométriques font partie de la "mécanique" (cinématique) classique). Par contre dans l'espace abstrait hilbertien tel n'est pas forcément le cas.
Donc quelle interprétation donner à ces deux formules ? La deuxième admet une interprétation relativement claire et admise généralement par tout le monde à savoir si l'observable A est attachée à un certain appareil de mesure, l'observable A' est alors attachée à ce même appareil tourné effectivement d'un angle α. Cette transformation partielle, qui n'implique qu'une partie de l'appareillage expérimental, est donc propre dans le sens qu'elle peut être effectivement réalisée (à l'aide d'un hamiltonien classique).

La transformation entre vecteurs d'états par contre n'admet pas une telle interprétation. Il ne peut s'agir ici d'une transformation propre car aucune action physique n'est supposée s'exercer sur ψ Le vecteur ψ' est "le même", mais vu autrement (vu par l'observateur (l'appareil de mesure) tourné d'un angle α. Dans l'interprétation des formules de transformation on fait donc un mélange de symétrie propre et de symétrie impropre. Ce traitement différent des deux formules de transformation introduit ainsi une "torsion". Dans l'interprétation de la mécanique quantique où le vecteur d'état ψ ne désigne pas l'objet quantique, mais uniquement sa relation à l'appareil de mesure, cette torsion est tout à fait ordinaire et de même nature que la torsion d'un ruban fixé à une extrémité et dont on fait tourner d'une angle α l'autre extrémité. Pour un tel ruban, une rotation de 2π laisse une torsion résiduelle, par contre une rotation d'angle 4π n'en a pas : c'est une propriété topologique globale du groupe SO_3. (cf. le livre de Lévy-Leblond et Balibar déjà cité).

Donc, le fait d'interpréter le vecteur d'état de façon relationnelle montre que le phénomène " 2π, 4π " est de nature classique, dans le sens qu'il n'a rien à voir à la "nature intrinsèque" du spin. L'interprétation de Copenhague a ceci de cohérent qu'elle reconnaît cette nature relationnelle et qu'elle évite ainsi un certain nombre de paradoxes (dont celui de la mesure quantique entre autre). Notons aussi que l'interprétation de Copenhague n'est pas contraire à une conception réaliste. Ce n'est que le -isme qu'on rajouterait à "Bohr" (ce qu'ont fait certains continuateurs zélés de Bohr) qui ferait sortir de la sphère d'une position réaliste. La tendance actuelle de considérer que le ψ est attaché à un microsystème individuel procède à notre avis de vieilles habitudes de type plutôt classique et cette position consiste de ce point de vue en un retour en arrière. En effet, à force de manipuler des vecteurs d'états desquels on dit "soit ψ l'état du système", ou des phrases du genre : "l'évolution du système est décrit par $t \to \psi(t)$", on considère que le label ψ est attaché au microsystème. Ce point de vue est évidemment porteur de paradoxes.

3 - Conclusion

Ce qui caractérise la mécanique quantique (dans le cas de systèmes physiques simples) c'est d'un côté la définition claire de la structure mathématique utilisée (mais tel n'est pas le cas en théorie de la mesure quantique), et de l'autre côté le caractère flou, variable et incomplet de l'interprétation du formalisme. Chaque interprétation a ses "avantages" et ses "difficultés" (cf. A Sudbery, Quantum Mechanics and the particles of nature, Cambridge University Press, pour un résumé succinct). Ce "mal" a existé dès l'origine de la formalisation de la théorie quantique (1925). On pourrait introduire à ce propos un nouveau concept de "complémentarité" : à savoir, chaque interprétation apporte un éclairage différent, complémentaire des autres interprétations. C'est la totalité de toutes les interprétations qui donnera la meilleure idée du système quantique. Que ces interprétations soient contraires entre elles, ou contradictoires en elles-mêmes sur certains points, n'entrave nullement l'avancée du physicien.

Bien plus, à la provocation de Born-Heisenberg au congrès de Solvay de 1927 où ces auteurs ont placé l'intuition physique dans le caractère non contradictoire des théories mathématiques (cf. C. Chevalley, "Une nouvelle science" dans "Le Monde Quantique" déjà cité), on peut répondre par une autre provocation : l'exigence de cohérence logique est-ce une nécessité dans le processus scientifique ?

En effet, il est clair que ce n'est pas la rigueur ou la cohérence logique qui est le moteur de la physique. Pendant des siècles, les physiciens ont tenu (et tiennent) un langage "incohérent" et font en même temps des progrès considérables.

Jean MERKER
Mathématiques
Faculté des Sciences
25030 Besançon Cedex