LE TEST DES INEGALITES DE BELL DANS LE CADRE D'UNE THEORIE A VARIABLES CACHEES

ou

L'EXPERIENCE E.P.R. DU PAUVRE

INTRODUCTION

Le principal mérite du théorème de Bell (aussi bien dans sa version originale [1] de 1964 que dans les démonstrations variées qui lui ont fait suite) est d'établir un critère simple permettant d'expérimenter et de trancher entre deux interprétations possible du monde quantique. Il se traduit par une inégalité que nous noterons pour l'instant $S \leq \alpha$ traduisant le fait que, si l'on se place à l'intérieur d'une théorie à variables cachées locales, le résultat de certaines mesures déterminées est toujours inférieur ou égal à la valeur numérique α.

Ce théorème se présente comme un théorème mathématique "cadre" situé en dehors de toute interprétation physique. Il peut donc à ce titre servir de repère à tout physicien quelle que soit l'interprétation qu'il donne ou veut donner aux expériences réalisées : en particulier, il peut aussi bien servir de repère

— à un partisan des variables cachées (cherchant sans doute à ce titre à vérifier que l'inégalité de Bell n'est pas violée, c'est à dire que dans tous les cas $S \leq \alpha$)

— qu'à un quanticien "orthodoxe" (cherchant au contraire à mettre en évidence la violation de cette inégalité en cherchant à trouver un cas où l'on ait S sensiblement supérieur à α)

Cet aspect du théorème de Bell montre que pour être conduit à trancher entre "théorie quantique" et "théorie à variables cachées" il n'est pas nécessaire de se placer dans le cadre de la théorie quantique; il revient au même, pour cela, de montrer

— que la théorie quantique permet de prévoir des expériences violant l'inégalité de Bell,

— que de montrer qu'une théorie à variables cachées ne peut expliquer certains résultats expérimentaux.

Malgré cela, les raisonnements habituels sont toujours effectués dans le cadre de la théorie quantique. Nous nous proposons de montrer qu'en nous plaçant au contraire dans celui

1 J.S. Bell, Physics 1, 195 (1964)

d'une théorie à variable cachées (locales), nous sommes amenés plus simplement encore (et en utilisant des expériences moins couteuses) à conclure en faveur de la théorie quantique. En d'autres termes, pour trancher le débat d'interprétation posé par Einstein, Podoslsky et Rosen, il coûte beaucoup plus cher

— de se placer dans le cadre de l'interprétation orthodoxe et de construire dans le cadre de cette théorie une expérience vérifiant les résultats de la mécanique quantique (expérience de type E.P.R, par exemple)

— que de se placer dans le cadre d'une interprétation déterministe et de montrer que dans ce cadre certaines expériences très simples à réaliser violent l'inégalité de Bell.

I LES VARIABLES CACHEES

On suppose que le photon est complètement déterminé lors de son émission. Sa "carte d'identité" (ou encore, son "plan de vol") est fixée une fois pour toutes et tient compte de tout ce qu'il pourrait rencontrer sur sa route. En se limitant au cas où le seul "obstacle" possible serait un polariseur d'orientation $\vec{a}$ donnée, un modèle de "carte d'identité" pourrait être " $\mathcal{E}(\vec{a}\,;\lambda)$ " signifiant : si le photon rencontre sur sa route un polariseur orienté suivant la direction $\vec{a}$, il traversera ou ne traversera pas ce polariseur suivant la valeur respectivement $\lambda = +1$ ou $\lambda = -1$ du paramètre λ qui le détermine. Il est clair que ce paramètre, qui restaure ainsi le déterminisme, nous est actuellement inconnu ; c'est une variable qui nous est, pour le moment, "cachée".

Exemple : L'expérience montre que des photons (pourtant tous préparés de façon identiques) envoyés sur un polariseur à deux voies A passent dans certains cas par la voie + et dans d'autres cas par la voie – .

— La mécanique quantique interprète ce résultat de manière indéterministe : bien qu'identiques, les photons ne se comportent pas toujours de la même façon. Pourquoi cela ? Parce que, n'étant pas complètement déterminés lors de leur émission, ils n'ont aucun critère de choix imposé devant l'obstacle imprévu qu'ils rencontrent et adoptent donc leur attitude finale "au hasard" .

— Dans le cadre d'une théorie à variables cachées on raisonnerait au contraire de la manière suivante : les photons, *en réalité*, ne sont pas identiques : une des variables servant à les décrire (variable qui nous est pour le moment inconnue et que nous notons λ) diffère d'un photon à l'autre. C'est la donnée de cette variable λ qui détermine l'attitude du photon arrivant sur le polariseur A ; suivant sa valeur, le photon est "programmé" dès son émission pour passer par une voie ou par une autre.

Bien sûr, pour qu'une telle théorie soit en elle même "complète", et pour que le photon soit parfaitement déterminé, il faut que toutes les situations possibles soient prévues au départ et inscrites dans sa "carte d'identité". Ainsi, au lieu de $\mathcal{E}(\vec{a}, \lambda)$ nous décrirons sa "carte d'identité" de manière plus détaillée en la notant $\mathcal{E}(\vec{a}, \lambda_a\,;\ \vec{b}, \lambda_b\,;\ \vec{c}, \lambda_c\,;\ldots)$ en rappelant que les valeurs λ_a, λ_b, λ_c,... du paramètre λ décrivent avec précision tous les comportements ultérieurs possibles du photon :

— passer par telle voie s'il rencontre un polariseur orienté suivant $\vec{a}$,

— passer par telle voie s'il rencontre un polariseur orienté suivant $\vec{b}$,

— passer par telle voie s'il rencontre un polariseur orienté suivant $\vec{c}$, etc...
Bien entendu une notation plus compacte, mais moins explicite pour la question *qui nous* préoccupe serait $\mathcal{E}(\vec{\theta}; \lambda(\theta))$

II RAPPEL DU THEOREME DE BELL.

Dans un tel cadre, les résultats de toutes les mesures de polarisation possibles sont complètement déterminées. Nous noterons $A(\vec{a}; \lambda)$ le résultat de la mesure effectuée avec un polariseur à deux voies A, orienté suivant l'axe $\vec{a}$. Nous noterons ces deux voies $\vec{a_+}$ et $\vec{a_-}$ en convenant de donner à $A(\vec{a}; \lambda)$ la valeur +1 si le photon passe alors par la voie $\vec{a_+}$, et la valeur -1 s'il passe par la voie $\vec{a_-}$ qui lui est perpendiculaire

Si l'on considère alors deux photons, le premier tombant sur le polariseur A, le second sur un polariseur B, la valeur du produit $A(\vec{a}; \lambda).\ B(\vec{b}; \lambda)$ caractérise le comportement relatif des deux photons :

— $A(\vec{a}; \lambda).\ B(\vec{b}; \lambda) = +1$ exprime le fait que les photons sont tous les deux passés par la voie + ou par la voie – du polariseur qu'ils ont rencontré;

— $A(\vec{a}; \lambda).\ B(\vec{b}; \lambda) = -1$ exprime au contraire le fait que l'un des photons est passé par la voie + (ou –) de son polariseur alors que l'autre est passé par la voie – (ou +) du sien.

Il est intéressant, dans une telle expérience, de déterminer si l'attitude de l'un des photons par rapport à l'autre, est ou non aléatoire. Quand les photons passent tous deux dans la même voie + du polariseur qu'ils rencontrent, est-ce, ou non, un hasard ? Le moyen de répondre à cette question est de faire un grand nombre d'expériences utilisant chacune une paire de photons identiques et de calculer la moyenne du produit $A(\vec{a}; \lambda).\ B(\vec{b}; \lambda)$ correspondant à chaque expérience. Cette moyenne, que nous noterons $E(\vec{a}, \vec{b})$, définit ce que l'on appelle le "coefficient de corrélation" des photons[2].

— Une valeur $E(\vec{a}, \vec{b}) = +1$ exprimera le fait que les photons se comportent toujours de *manière corrélée en réagissant de façon identique* devant l'obstacle qu'ils rencontrent; on dira que leur corrélation est totale.

— Une valeur $E(\vec{a}, \vec{b}) = -1$ exprimera le fait que les photons réagissent toujours de *manière corrélée mais en réagissant de façon contraire* devant l'obstacle qu'ils rencontrent (en passant l'un par la voie + et l'autre par la voie –) ; là encore, on dira encore que leur corrélation est totale.

— Une valeur $E(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ exprimera le fait que les photons sont complètement indépendants.

Si l'on fait successivement quatre types de mesures correspondant à orienter le premier polariseur A suivant les directions \o(a_1;\s\up6(→)) puis \o(a_2;\s\up6(→)) et le second

2 dans un cas comme le nôtre où les valeurs moyennes de $A(\vec{a}; \lambda)$ et de $B(\vec{b}; \lambda)$ sont toutes deux nulles et où $[A(\vec{a}; \lambda)]^2 = [B(\vec{b}; \lambda)]^2 = 1$

suivant les orientations $\vec{b_1}$ puis $\vec{b_2}$, l'inégalité de Bell (sous une forme exprimée par J.F Clauser, M.A. Horne, A. Shimony et R.A. Holt [3]) s'écrit alors :

(1) $$2 \leq S \leq 2$$

En posant

(2) $$S = E(\vec{a_1}, \vec{b_1}) - E(\vec{a_1}, \vec{b_2}) + E(\vec{a_2}, \vec{b_1}) + E(\vec{a_2}, \vec{b_2})$$

elle exprime le fait qu'une théorie à variables cachées locale ne peut prévoir (pour ce type d'expérience), de valeur de S supérieure, en valeur absolue, à +2.

La mécanique quantique permet au contraire de prévoir des valeurs au delà de cette limite.

Le théorème de Bell ouvre ainsi la voie à des tests expérimentaux permettant de trancher expérimentalement entre ces deux types de théorie : un seul cas expérimental violant l'inégalité (1), détruira l'idée d'une possibilité d'existence de variables cachées locales. Il est inutile de rappeler que de tels cas ont été trouvés (en considérant par exemple des photons émis lors de certaines cascades atomiques). L'expérience a ainsi permis de trancher en faveur de la mécanique quantique en mettant en évidence l'existence de cas où l'inégalité se trouve violée d'environ 40%.

III RAISONNEMENT DANS LE CADRE D'UNE THEORIE A VARIABLES CACHEES

Dans le cadre de la théorie quantique, il n'est pas possible de parler de la polarisation d'un photon indépendamment de l'expérience permettant de la mesurer :

— nul ne peut dire quelle était la polarisation du photon avant son passage dans un polariseur A : tout photon, quelle qu'ait été sa polarisation, avait une chance non nulle de passer dans le polariseur : le fait qu'il passe n'apporte donc aucune connaissance sur ce qu'aurait pu être cette polarisation avant la rencontre de A. En paraphrasant Heisenberg, "en parler n'est donc qu'une question de convenance personnelle n'ayant aucun caractère physique".

— de plus, le polariseur modifie une polarisation précédemment acquise par le photon en lui donnant la polarisation correspondant à l'axe par lequel le photon passe.

On comprend que dans un tel cadre d'interprétation, des mesures de corrélations de polarisation exigent d'avoir affaire à des paires de photons... Malheureusement, sur le plan pratique, des expériences concernant des paires de photons sont toujours délicates... et couteuses.

Nous nous proposons de montrer que ces complications ne sont imposées que dans le cadre de la théorie quantique. Si l'on se place au contraire dans le cadre d'une "théorie à variables cachées", on peut aisément utiliser le théorème de Bell en raisonnant sur des photons uniques... et arriver aux mêmes conclusions "à moindre frais".

Si l'on se place dans le cadre d'une théorie à variables cachées, l'interprétation des différents calculs présentés ci-dessus sont en effet très différents. En effet, dans un tel cadre, un photon donné a des propriétés déterminées une fois pour toutes lors de son émission. Les

---

[3] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony et R.A. Holt, Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969)

polariseurs, d'autres part, ne modifient en rien ces propriétés, mais permettent, comme dans toute expérience "classique", de mesurer les caractéristiques du photon. Deux polariseurs A et B, orientés chacun dans une direction donnée et placés à la suite l'un de l'autre permettront de connaître le "code génétique" du photon pour ces deux polarisations :

— la valeur $A(\vec{a}\,;\lambda) = +1$ indique que le photon possède la propriété "passe dans la direction $\vec{a}_+$;

Le fait de placer ensuite un autre polariseur B ne détruit en rien cette propriété, mais permet au contraire d'acquérir de nouvelles informations concernant le *même* photon :

— la *nouvelle* valeur trouvée $B(\vec{b}\,;\lambda) = -1$ indiquera que le photon, *en plus* de la propriété déjà connue "passe dans la direction $\vec{a}_+$" possède également la caractéristique "passe dans la direction $\vec{b}_-$".

Contrairement à ce qui se passait dans le cadre de la théorie quantique orthodoxe où ils n'avaient de sens que pour des paires de photons, les produits $A(\vec{a}\,;\lambda)\,.\,B(\vec{b}\,;\lambda)$ acquièrent ainsi, dans une théorie à variables cachées, un sens physique *pour un seul et même photon* :

la valeur $A(\vec{a}\,;\lambda)\,.\,B(\vec{b}\,;\lambda) = +1$ exprime alors le fait que le photon considéré possède simultanément la propriété

— "passe par la voie $\vec{a}_+$" et "passe par la voie $\vec{b}_+$"

ou

— "passe par la voie $\vec{a}_-$" et "passe par la voie $\vec{b}_-$"

en d'autres termes, sa "nature" est telle qu'il adoptera toujours le même comportement devant ces deux directions pourtant différentes (on pourra dire encore, que ces deux directions ne sont pas pour lui "distinguables").

Au contraire, la valeur $A(\vec{a}\,;\lambda).\,B(\vec{b}\,;\lambda) = -1$ exprimera le fait que le photon considéré possède simultanément la propriété

— "passe par la voie $\vec{a}_+$" et "passe par la voie $\vec{b}_-$"

ou

— "passe par la voie $\vec{a}_-$" et "passe par la voie $\vec{b}_+$"

en d'autres termes, sa "nature" est telle qu'il adoptera toujours un comportement contraire devant ces deux directions. (on pourra dire encore, que ces deux directions sont pour lui "orthogonales").

Ainsi, dans le cadre d'une théorie à variables cachées, il est possible de réaliser une expérience utilisant l'inégalité de Clauser, en n'expérimentant que sur des photons uniques, sans avoir à considérer des paires. Dans ce cas, la mesure de corrélation correspond à mettre en évidence l'existence simultanée de deux caractères donnés *sur le même photon.*

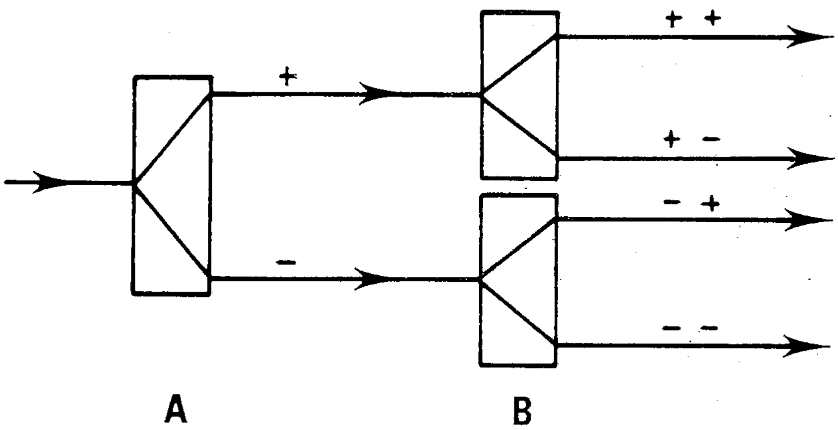
Nous allons voir que cette remarque permet de trancher en faveur de la théorie quantique contre les théories à variables cachées locales en n'utilisant que des expériences très simples à réaliser. En d'autres termes,

— dans le cadre de la mécanique quantique, seules des expériences très complexes permettent de mettre en évidence une violation de l'inégalité de Bell

— dans le cadre d'une théorie à variables cachées (locales) des expériences beaucoup plus simples suffisent à mettre en évidence une violation l'inégalité de Bell.

IV L'EXPERIENCE E.P.R. DU PAUVRE

Considérons l'expérience présentée sur la figure 1. Chaque élément du montage est un polariseur à deux voies que nous noterons respectivement + et – . Chaque polariseur est orientable. Nous noterons θ_1 l'orientation du premier (A) , et θ_2 l'orientation des seconds (B) (pour des raisons de simplicité, les polariseurs B seront toujours orientés de la même façon).



(figure 1)

Dans un tel montage, et en raisonnant toujours dans le cadre d'une théorie à variables cachées,

— la détection d'un photon sur la voie supérieure indique que le photon détecté possède simultanément les propriétés "passe par une voie $\overrightarrow{a_+}$" (puisqu'il est passé dans la voie supérieure du premier polariseur) et "passe par une voie $\overrightarrow{b_+}$" (puisqu'il est passé dans la voie supérieure du second polariseur) , de même,

— la détection d'un photon sur la voie troisième voie (en partant du haut de la figure) indique que le photon détecté possède simultanément les propriétés "passe par une voie $\overrightarrow{a_-}$" (puisqu'il est passé dans la voie inférieure du premier polariseur) et "passe par une voie $\overrightarrow{b_+}$" (puisqu'il est passé dans la voie supérieure du second polariseur) ...

L'inégalité de Bell va nous permettre de tester sans ambigüité si une telle interprétation (variables cachées), attribuant au photon des propriétés déterminées et restaurant donc le déterminisme, est viable ou si, au contraire, elle ne l'est pas.

V LE RESULTAT EXPERIMENTAL

L'expérience présentée sur la figure 1 est facile à réaliser sans utiliser beaucoup de matériel.

Qu'allons nous trouver ? Dans un tel cas, le résultat est tellement sûr que nous pouvons nous contenter de simuler l'expérience en la remplaçant par le calcul théorique :

Notons θ_1 l'orientation $\vec{a}$, du polariseur A par rapport à la verticale du laboratoire, et θ_2 celle, $\vec{b}$, des polariseurs B par rapport à ce même axe de référence. A la sortie de chacune des quatre voies possibles les probabilités de détection d'un photon sont alors (voir la figure 1)

$$P_{++} = P_{--} = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1) \tag{3}$$

$$P_{+-} = P_{-+} = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_2 - \theta_1) \tag{4}$$

Rappelons que dans le cadre "déterministe" ou nous nous sommes placés, les grandeurs existent indépendamment de l'appareil de mesure si bien que P_{++} est interprétable comme la probabilité pour que le photon considéré possède simultanément les propriétés "passe par la voie $\vec{a_+}$" et "passe par la voie $\vec{b_+}$" (4). On est alors naturellement conduit à calculer le coefficient de corrélation E(a,b) qui va nous indiquer comment ces différentes propriétés de passage peuvent être présentes ou non *sur le même photon.*

Ce coefficient de corrélation va nous permettre en effet de savoir si les propriétés "passe par une voie $\vec{a}$" et "passe par une voie $\vec{b}$" peuvent *exister simultanément* sur un même photon; en d'autres termes, il va nous permettre de tester *s'il est possible d'attribuer ces propriétés déterministes au photon*, ou encore, s'il est possible de considérer le photon comme "programmé" à l'avance en ce qui concerne l'attitude qu'il doit prendre à la rencontre de *deux* polariseurs considérés.

Un calcul simple montre que dans ce cas :

$$\begin{aligned} E(a,b) &= P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+} = \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - \sin^2(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \cos[2(\theta_2 - \theta_1)] \end{aligned} \tag{5}$$

Pour répondre à la question posée (le photon peut il être considéré comme "programmé à l'avance" ?), nous allons utiliser l'inégalité de Bell-Clauser en rappelant (eqs (1) et (2)) qu'une telle programmation déterministe se manifestera par un résultat expérimental vérifiant $|S| < 2$.

Pour tester l'inégalité de Bell (*dans ce cadre d'une théorie à variables cachées* comme nous nous sommes proposés de la faire) l'expérimentateur va faire successivement quatre séries de mesures en orientant le premier polariseur A suivant les directions $\vec{a_1}$ puis $\vec{a_2}$ et le second suivant les orientations $\vec{b_1}$ puis $\vec{b_2}$. Il va ensuite calculer l'expression

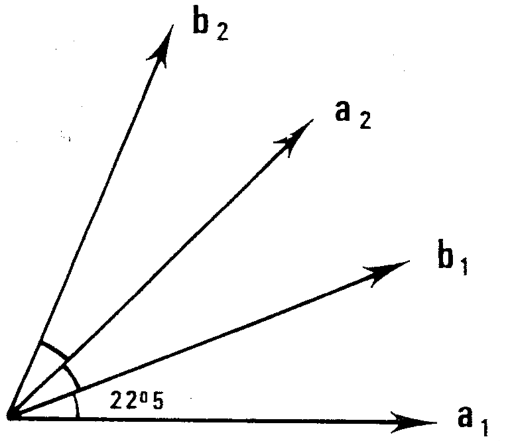
$$S = E(\vec{a_1}, \vec{b_1}) - E(\vec{a_1}, \vec{b_2}) + E(\vec{a_2}, \vec{b_1}) + E(\vec{a_2}, \vec{b_2}) \tag{6}$$

---

4 rappelons qu'en mécanique quantique orthodoxe, P_{++} correspond à la probabilité pour que l'*un* des photons de la paire emprunte la voie a alors que l'*autre* emprunte la voie b .

Il se rendra compte sans difficulté que certaines orientations conduisent à une violation évidente de l'inégalité (1). Considérons ainsi les orientations présentées sur la figure 2 où

$$(\vec{a_1}, \vec{b_1}) = (\vec{b_1}, \vec{a_2}) = (\vec{a_2}, \vec{b_2}) = 22{,}5° \tag{7}$$



(figure 2)

nous avons dans ce cas (en utilisant 5 et 2)

$$S = \cos[2(22{,}5°)] - \cos[6(22{,}5°)] + \cos[2(22{,}5°)] + \cos[2(22{,}5°)]$$

$$= 3 \,.\, 0{,}707 - (-0{,}707) = 2{,}828 > 2 \tag{8}$$

qui viole évidemment l'inégalité de Bell (1).

VI CONCLUSIONS DE L'EXPERIENCE

On peut résumer ainsi les résultats exposés ci-dessus :

— Dans le cadre d'une description déterministe du photon , les produits $A(\vec{a}; \lambda).B(\vec{b}; \lambda)$ et donc les coefficients E(a,b) prennent un sens pour des photons considérés *individuellement.*

— Il s'en suit que, dans le cadre d'une telle description, l'expérience présentée sur la figure 1 suffit pour envisager un test logiquement valable de l'inégalité de Bell.

— L'expérience, très simple, montre qu'obligatoirement certaines orientations des polariseurs conduisent à une violation de l'inégalité de Bell ;

— Il en découle que l'expérience en question n'est pas interprétable en termes de variables cachées.

— Il s'en suit sans aucune ambigüité qu'une interprétation déterministe (en termes de variables cachées) n'est pas envisageable. En d'autres termes, il n'est pas possible de considérer le photon comme "programmé à l'avance" et possédant ainsi une "carte d'identité" lui indiquant *dès son émission* ce qu'il devra faire en fonction de tous les différents obstacles qu'il rencontrera sur son chemin.

La simple expérience présentée ci-dessus permet ainsi de trancher sans ambigüité et "à moindre frais", entre les deux interprétations du monde quantique que sont celle des variables cachées locales et celle de la théorie quantique. Elle ne permet pas cependant de poser directement d'autres problèmes comme celui de la non-localité. Sur ce point, elle pose néanmoins une question supplémentaire :

— On lit très souvent que la violation de l'inégalité de Bell implique la non-localité des photons (voir l'appendice qui suit); "L'expérience E.P.R. du pauvre" montre que l'inégalité de Bell peut se trouver violée, sans qu'il puisse être fait référence à l'inséparabilité des photons ni à la non-localité.

Séminaire EPIPHYMATHS

J.M. VIGOUREUX
Laboratoire de Physique Moléculaire
Faculté des Sciences et Techniques
La Bouloie
25030 Besançon, Cedex

Appendice

Ce problème du lien entre violation de l'inégalité de Bell et non-localité a été soulevé en séminaire. Il n'est pas inutile à ce sujet de préciser les choses suivantes.
La question de la non-localité est souvent posée à partir du paradoxe E.P.R. Dans de nombreux textes, elle est alors affirmée comme seule issue possible à la coexistence des deux constatations suivantes:

1) Pour un photon unique passant dans un polariseur, la réponse + ou – est aléatoire
2) Pour des photons couplés et pour deux *orientations identiques* des polariseurs, les réponses "à droite" et "à gauche" sont parfaitement corrélées. La réponse à gauche, par exemple est aléatoire mais une fois ce résultat acquis, la réponse à droite est parfaitement déterminée, et ceci pour chaque couple de photons individuels.

Il est important de souligner que les deux constatations ci-dessus n'impliquent nullement la non-localité. Des systèmes classiques faciles à imaginer peuvent les vérifier. La question de la non-localité ne commence à se poser que lorsque l'on ajoute aux deux points ci-dessus, les résultats concernant le cas où le polariseur de droite et celui de gauche ne sont plus orientés de façon identique :

3) Pour des positions différentes des deux polariseurs, toutes les réponses, pour *une paire* de photons donnée, sont possible : (+,+), (+,–), (–,+), (–,–) ; Malgré cela, pour *un ensemble de paires*, une corrélation apparait entre les résultats

Ce point crucial, là encore, n'est pas non plus suffisant pour poser le débat de la non-localité (des systèmes classiques peuvent également le vérifier) qui ne se pose en toute rigueur que lorsqu'on arrive au résultat quantitatif.

4) Les corrélations trouvées varient en $\cos(2\theta)$. Ce que montre le théorème de Bell, c'est en effet qu'aucun système "classique" (à variables cachées) ne peut représenter les corrélations quantiques en $\cos(2\theta)$.

Il est important de souligner qu'une différence *qualitative* aussi fondamentale que celle existant entre localité ou non-localité apparaît ainsi liée à une différence *quantitative*.

Il est également intéressant de noter que la non localité est affirmée généralement pour *chaque* couple de photons, alors que cette inférence, déduite du point 3), est faite à partir d'une observation statistique.